

Supplement til Matematik 1GB

Jan Philip Solovej

Forord

Disse noter er skrevet som supplement til bogen *Funktioner af en og flere variable* af Ebbe Thue Poulsen. Noterne er skrevet til brug på kurset Matematik 1 Grundkursus B ved Københavns Universitet. Dette er 3. version af noterne. Der er kun mindre ændringer i forhold til 2. version der hed *Supplement 2002*. De fleste af disse ændringer kan ses på hjemmesiden

<http://www.math.ku.dk/ma/kurser/Mat1GB/Noter/rettelser2002.html>

Første version udkom i marts 2001 og hed *Noter til Mat1GB forår 2001*. Der var en del ændringer i 2. version i forhold til 1. version. Specielt refereres nu til bogen *Funktioner af en og flere variable*. Desuden er teksten flere steder blevet revideret og Eksempel 2.1.1, Opgave 2.2, Opgave 2.3 og Opgave 2.4 er blevet ændret.

Store dele af Kapitlerne 2, 4 og 5 er en bearbejdning af tilsvarende kapitler i Indledning til Matematisk Analyse II af Henrik Stetkær, Klaus Thomsen og Christina Tønnesen-Friedman, der ved Aarhus Universitet bruges som supplement til *Funktioner af en og flere variable*.

Tak til Henrik Stetkær, Klaus Thomsen og Christina Tønnesen-Friedman for tilladelse til at bruge deres materiale. Ansvar for materialet i disse noter ligger dog udelukkende hos undertegnede.

Tak også til Henrik Schlichtkrull for værdifulde kommentarer til Kapitlerne 1 og 6.

Jan Philip Solovej
København 16. december 2002

Noternes indhold

I disse noter vil vi behandle en del forskellige emner, der sammen udgør sidste del af pensum for Mat1GB. Kapitlernes rækkefølge svarer til den rækkefølge, emnerne vil blive gennemgået i.

Noterne skal opfattes som en første indføring i emnerne og materialet er flere steder behandlet noget overfladisk. Mange af emnerne tages op i større detalje i senere matematikkurser ved Københavns Universitet. Vi nævner her nogle af de kurser på Bacheloruddannelsen, hvor emnerne tages op igen.

De geometriske objekter kurver og flader og de tilhørende integrationsbegreber, der behandles i Kapitlerne 1 og 6, tages op igen i kurset Mat3GE (Geometri).

En mere fuldstændig integrationsteori, dog uden det store geometriske indhold, kommer på kurset Mat3MI (Mål og Integralteori).

Potensrækker og deres konvergens fra Kapitel 5 er et af hovedemnerne i kurset Mat2KF (Kompleksfunktionsteori). Andre rækker, hvis led er funktioner, de såkaldte Fourierrækker, tages op i kurset Mat2AN (Analyse).

Ekstremum under bibetingelse og Lagranges metode fra Kapitel 3 tages op på kurset Mat2OK (Optimering og konveksitet).

Differentialligninger tages op i kurserne Mat2AN og Mat2DD (Differential og differensligninger).

Indhold

Forord	iii
Indhold	viii
1 Kurver og flader	1
1.1 Kurver	1
1.1.1 DEFINITION. Kurveparametrisering	1
1.1.2 DEFINITION. Reparametrisering	2
1.1.3 DEFINITION. Parametriserede og orienterede kurver	2
1.1.4 DEFINITION. Glatte punkter og hastighedsvektoren	3
1.1.5 LEMMA. Reparametriseringer og hastighedsvektorer	3
1.1.6 DEFINITION. Tangentlinie for en glat parametriseret kurve	4
1.1.7 DEFINITION. Sempel kurveparametrisering	5
1.1.8 LEMMA. Sempel kurveparametrisering har kontinuert invers	5
1.1.9 SÆTNING. Sempel kurve er karakteriseret ved sit spor	6
1.1.10 SÆTNING. Kontinuitet af enhedstangentvektorer	7
1.1.11 DEFINITION. Glatte simple kurver og enhedstangentfelter	8
1.2 Flader	9
1.2.1 DEFINITION. Fladeparametrisering	9
1.2.2 DEFINITION. Reparametriseringer og parametriseret flade	9
1.2.3 DEFINITION. Glatte punkter og normalvektoren	10
1.2.4 LEMMA. Reparametriseringer og normalvektorer	10
1.2.5 DEFINITION. Tangentplan for glat parametriseret flade	11
1.2.6 DEFINITION. Elementære domæner i planen	12
1.2.7 BEMÆRKNING. Randen af et elementært domæne	12
1.2.8 DEFINITION. Glat orienteret flade	13
1.2.9 LEMMA. Kontinuert invers af fladeparametrisering	14
1.2.10 SÆTNING. Kontinuitet af enhedsnormalvektorer	14
1.2.11 BEMÆRKNING. Rand af flade og lukket flade	14
1.2.12 Grafer for funktioner af en og to variable	17
1.2.13 DEFINITION. Niveaumængder, -kurver og -flader	18
1.2.14 SÆTNING. Gradienten er vinkelret på niveaumængder	19
1.3 Opgaver til Kapitel 1	20

2	Implicit givne og inverse funktioner	23
2.1	Implicit givne funktioner	23
2.1.1	SÆTNING. Implicit givne funktioner–generel version	24
2.1.2	SÆTNING. Tilfældet $m = 1$ og implicit differentiation	25
2.1.3	BEMÆRKNING. Niveaukurver/flader er kurver/flader	26
2.2	Inverse funktioner	28
2.2.1	SÆTNING. Sætningen om inverse (omvendte) funktioner	28
2.3	Opgaver til Kapitel 2	29
3	Ekstremum under bibetingelser	31
3.1	Lagranges Metode	32
3.1.1	SÆTNING. Lagranges metode	32
3.2	Opgaver til Kapitel 3	35
4	Differentialligninger	37
4.1	Generelle betragtninger og sprogbrug	37
4.1.1	DEFINITION. Et m 'te ordens begyndelsesværdiproblem	37
4.1.2	DEFINITION. Lokale løsninger	38
4.1.3	DEFINITION. Maksimale løsninger	38
4.1.4	DEFINITION. Globale løsninger	38
4.1.5	SÆTNING. Generel eksistens og éntydighedssætning	38
4.1.6	DEFINITION. Lineære differentialligninger	38
4.1.7	SÆTNING. De homogene løsninger udgør et underrum	39
4.1.8	SÆTNING. Partikulær og generel løsning	39
4.1.9	DEFINITION. Den komplekse eksponentialfunktion	40
4.2	Første ordens separable ligninger	41
4.2.1	DEFINITION. Separable ligninger	41
4.2.2	SÆTNING. Eksistens og éntydighed for separable ligninger	41
4.3	Første ordens lineære ligninger	44
4.3.1	SÆTNING. Løsning til 1. ordens lineære homogene ligninger	44
4.3.2	SÆTNING. Løsning til 1. ordens lineære inhomogene ligninger	45
4.3.3	SÆTNING. Eksistens- og éntydighedssætningen	46
4.3.4	KOROLLAR. 1. ordens lineær ligning med konstant koefficient	47
4.4	Anden og højere ordens ligninger	47
4.4.1	SÆTNING. Løsning til 2. ordens homogen ligning	48
4.4.2	SÆTNING. Lineære n . ordens homogene ligninger	50
4.4.3	SÆTNING. Løsnings til 2. ordens lineær inhomogen ligning	51
4.4.4	SÆTNING. Eksistens- og éntydighedssætningen	52
4.4.5	Gættemetoden (ukendte koefficienters metode)	52
4.5	Opgaver til Kapitel 4	57

5	Taylorrækker og potensrækker	59
5.1	Taylorpolynomier	59
5.1.1	DEFINITION. Taylorpolynomium	60
5.1.2	SÆTNING. Karakterisering af Taylorpolynomium	60
5.1.3	SÆTNING. Taylors formel med restled	62
5.1.4	KOROLLAR. Vurdering på restleddet	63
5.2	Definition og konvergens af potensrækker	67
5.2.1	DEFINITION. Potensrække	67
5.2.2	SÆTNING. Konvergensradius	69
5.2.3	SÆTNING. Kvotient- og rodkriterie for konvergensradius	70
5.2.4	DEFINITION. Sumfunktion for potensrække	72
5.2.5	SÆTNING. Kontinuitet og differentiabilitet af sumfunktion	72
5.2.6	SÆTNING. Ledvis differentiation og integration	73
5.2.7	SÆTNING. Regning med potensrækker	73
5.3	Taylorrækker og deres konvergens	74
5.3.1	DEFINITION. Taylorrækken for funktion af en variabel	74
5.3.2	SÆTNING. Potensrække er Taylorrække for sin sumfunktion	74
5.3.3	SÆTNING. Taylorrækker for kendte funktioner	75
5.3.4	BEMÆRKNING. Om at bestemme Taylorrækken for en funktion	77
5.3.5	BEMÆRKNING. Om at finde sumfunktionen for en potensrække	78
5.3.6	BEMÆRKNING. Om at finde summen af uendelige rækker	80
5.4	Opgaver til Kapitel 5	80
6	Integration i flere variable	87
6.1	Plan og rumintegraler	87
6.1.1	DEFINITION. Elementære domæner	88
6.1.2	SÆTNING. Itereret integral	88
6.1.3	SÆTNING. Transformationssætningen	89
6.1.4	DEFINITION. Polære koordinater i planen	90
6.1.5	DEFINITION. Sfæriske koordinater i rummet	91
6.2	Kurveintegral	92
6.2.1	DEFINITION. Kurveintegral og kurvelængde	92
6.2.2	SÆTNING. Reparametriseringer og kurveintegraler	92
6.2.3	DEFINITION. Arbejdsintegral	93
6.2.4	SÆTNING. Reparametriseringer og arbejdsintegraler	93
6.2.5	SÆTNING. Arbejdsintegraler for simple kurver	94
6.2.6	SÆTNING. Analysens fundamentalsætning flervariabel version	94
6.2.7	DEFINITION. Regulære domæner	95
6.2.8	BEMÆRKNING. Randen af et regulært domæne	95
6.2.9	SÆTNING. Greens formel	96

6.2.10	BEMÆRKNING. Konservative vektorfelter	98
6.3	Fladeintegraler	99
6.3.1	DEFINITION. Fladeintegral og fladeareal	99
6.3.2	DEFINITION. Fluksintegral	100
6.3.3	SÆTNING. Fluksintegraler for glat orienteret flade	100
6.3.4	DEFINITION. Divergens og rotation	101
6.3.5	SÆTNING. Gauss' formel, Divergenssætningen	101
6.3.6	SÆTNING. Stokes' formel	102
6.4	Opgaver til Kapitel 6	102

Kapitel 1

Kurver og flader

1.1 Kurver

Vi skal i dette og det følgende afsnit beskrive de geometriske objekter kurver og flader. Selvom alle nok har en opfattelse af, hvad en kurve eller flade er, er det ikke helt nemt at give præcise matematiske definitioner af disse objekter. Den matematiske litteratur er også fyldt med ikke helt identiske definitioner.

Man kan tænke på kurver eller flader som specielle delmængder f.eks. af rummet \mathbb{R}^3 . Men når det drejer sig om kurver, kan man også tænke på bevægelsen langs kurven eller blot, hvordan kurven bliver gennemløbet.

Et til kurver og flader nært beslægtet geometrisk objekt er grafen for en reel funktion. Vi vil sammenligne disse begreber i Afsnit 1.2.12

1.1.1 Definition (Kurveparametrisering)

*En kurveparametrisering er en kontinuert afbildning $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Hvis I er et lukket interval $[a, b]$ kalder vi $\mathbf{r}(a)$ og $\mathbf{r}(b)$ for endepunkterne for kurveparametriseringen. Vi siger at parametriseringen er lukket, hvis $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Vi vil kalde billedmængden (værdimængden) $C = \mathbf{r}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ for **sporet** af kurveparametriseringen.*

Bemærk at forskellige parametriseringer kan have samme spor. F.eks. er

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{og} \quad \mathbf{r}_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \quad t \in [0, \pi]$$

begge parametriseringer af enhedscirklen. Man vil ofte benytte en sprogbug, hvor man opfatter parametriseringen \mathbf{r} som værende en funktion af tiden. De to parametriseringer af enhedscirklen gennemløber cirklen på forskellig tid.

I stedet for blot at identificere en *kurve* som en punktmængde, altså som sporet af parametriseringen, er det bedre at huske på, hvordan kurven er blevet gennemløbet uden dog at tage hensyn til hvor hurtigt. Mere præcist vil man identificere parametriseringer, der fremkommer af hinanden ved, hvad vi vil kalde reparametriseringer.

1.1.2 Definition (Reparametrisering)

En **reparametrisering** af en kurveparametrisering $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en ny kurveparametrisering givet som en sammensat funktion $\mathbf{r} \circ h : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor reparametriseringsfunktionen $h : I' \rightarrow I$ er en strengt monoton, kontinuert funktion på et interval^a I' , som opfylder $h(I') = I$. Vi kalder reparametriseringsfunktionen h **glat**, hvis h er kontinuert differentiabel på det indre af I' og $h'(t) \neq 0$ for alle indre punkter t .^b

Vi siger at reparametriseringen er **orienteringsbevarende**, hvis h er strengt voksende og **orienteringsvendende** hvis h er strengt aftagende.

^aVi ved så fra *Funktioner af en og flere variable* Sætning 5.23 at den inverse (omvendte) funktion til h har de samme egenskaber.

^bVi ved så igen fra *Funktioner af en og flere variable* Sætning 7.8 at den inverse har de samme egenskaber.

Det er klart, at reparametriseringer ikke ændrer billedmængden.

1.1.3 Definition (Parametriserede og orienterede kurver)

Vi siger, at parametriseringer, der fremkommer af hinanden ved reparametriseringer, repræsenterer samme **parametriserede kurve**. Parametriseringer, der fremkommer af hinanden ved orienteringsbevarende reparametriseringer, siges at repræsentere samme **orienterede kurve**.

Den anden parametrisering af enhedscirklen ovenfor fremkommer af den første ved reparametriseringsfunktionen $[0, \pi] \ni t \mapsto 2t \in [0, 2\pi]$. De to kurveparametriseringer

$$[-2\pi, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \quad (1.1)$$

$$[-2\pi, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos |t|, \sin |t|) \quad (1.2)$$

har også begge enhedscirklen som billedmængde, men fremkommer ikke af de tidligere eller af hinanden ved reparametriseringer. Parametriseringen (1.1) beskriver cirklen gennemløbet to gange imod urets retning. Parametriseringen (1.2) beskriver cirklen gennemløbet to gange, første gang med uret og anden gang mod uret.

Vi vil generelt sige at parametriseringer, som ikke fremkommer af hinanden ved reparametriseringer repræsenterer *forskellige* parametriserede kurver, også selvom de har samme spor altså gennemløber samme punktmængde.

Enhedscirklen kan selvfølgelig også beskrives, som mængden af punkter (x, y) der løser ligningen $x^2 + y^2 = 1$. Dette er helt analogt til, at en linie i planen kan beskrives enten ved en parametrisering eller ved en ligning. Vi vender tilbage til beskrivelsen af kurver i planen ved ligninger i Definition 1.2.13.

Givet en kurveparametrisering er der, som vi skal se, en lang række størrelser man kan beregne. Et afgørende spørgsmål er, hvilke af disse størrelser der kun

afhænger af den parametriserede kurve eller mere præcist, hvilke størrelser der ikke ændrer sig, hvis vi reparametriserer kurven.

Vi begynder med at definere begrebet hastighedsvektor.

1.1.4 Definition (Glatte punkter og hastighedsvektoren)

Lad $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en kurveparametrisering, som skrevet i koordinater har formen

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Hvis t_0 er et indre punkt i I og \mathbf{r} er differentiabel i t_0 , d.v.s., hvis hver af koordinaterne x_1, \dots, x_n er differentiable i t_0 , da kaldes vektoren

$$\mathbf{r}'(t_0) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

for **hastighedsvektoren** for kurveparametriseringen i t_0 . Vi kalder længden af hastighedsvektoren for **farten** af kurveparametriseringen i t_0 . En kurveparametrisering $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ siges at være **glat** i et indre punkt t_0 , hvis den er kontinuert differentiabel i et åbent interval indeholdende t_0 og hvis $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Vi siger, at en kurveparametrisering er **glat**, hvis den er glat i alle punkter.

Bemærk, at hvis vi tænker på hastighedsvektoren som en $n \times 1$ -matrix så er den præcis Jacobi-matricen for afbildningen \mathbf{r} .

Parametriseringen (1.2) er glat i alle indre punkter undtagen punktet $t = 0$. De øvrige parametriseringer af cirklen, vi betragtede, er glatte i alle indre punkter. Et eksempel på en parametrisering af cirklen, der er differentiabel, men ikke glat i punktet $t = 0$, er givet ved

$$[-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}] \ni t \mapsto (\cos(t^2), \sin(t^2)).$$

Denne parametrisering fremkommer i øvrigt af parametriseringen (1.2) ved reparametriseringsfunktionen $[-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}] \ni t \mapsto t|t| \in [-2\pi, 2\pi]$.

Det bør være klart, at hastighedsvektoren ikke blot afhænger af kurven, men af selve parametriseringen. Den samme kurve kan jo gennemløbes hurtigt eller langsomt. På den anden side, bør det være intuitivt forståeligt, at den *linie*, der udgår fra et givet punkt på kurven og har hastighedsvektoren som tangentvektor, faktisk kun afhænger af kurven. Det er indholdet af den næste sætning.

1.1.5 Lemma (Reparametriseringer og hastighedsvektorer)

Lad $\mathbf{r} \circ h : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en reparametrisering af kurveparametriseringen $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, fremkommet ved en glat reparametrisering h . Da vil $\mathbf{r} \circ h$ være glat i et indre punkt t af I' , hvis og kun hvis \mathbf{r} er glat i punktet $h(t)$. I bekræftende fald vil hastighedsvektoren for $\mathbf{r} \circ h$ i t være parallel med hastighedsvektoren for \mathbf{r} i $h(t)$.

Bevis. Bemærk først, at h afbilder indre punkter i indre punkter (fordi intervalendepunkter afbildes i endepunkter). Lemmaet er en simpel konsekvens af kædere-
reglen.¹ Antag først at \mathbf{r} er glat i $h(t)$. Da vil $(\mathbf{r} \circ h)'(t) = \mathbf{r}'(h(t))h'(t)$. Altså er
hastighedsvektoren for reparametriseringen blot ganget med skalaren $h'(t)$, som
vi har antaget forskellig fra nul. Derfor er $\mathbf{r} \circ h$ glat i t og hastighedsvektorerne
er parallelle.

Hvis omvendt $\mathbf{r} \circ h$ er glat i t bruger vi blot, at h^{-1} , har de samme egenskaber,
som h og at $\mathbf{r} = (\mathbf{r} \circ h) \circ h^{-1}$. \square

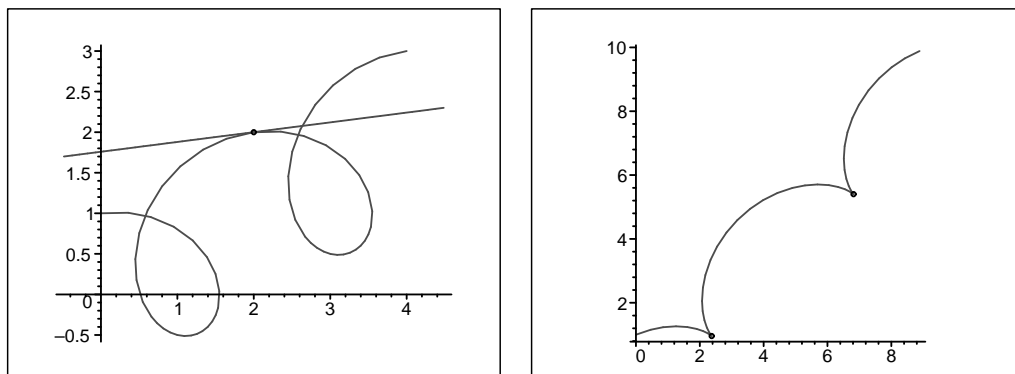
1.1.6 Definition (Tangentlinie for en glat parametriseret kurve)

Hvis kurveparametrisering $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ er glat i et punkt t_0 , hvor $\mathbf{r}(t_0) = p$,
siger vi, at den parametriserede kurve i punktet p har en tangentlinie givet
ved parametriseringen

$$L(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0), \quad L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Den givne parametrisering for tangentlinien afhænger af, den kurveparamete-
risering vi starter fra, men som konsekvens af Lemma 1.1.5 giver reparamete-
riseringer af kurveparametriseringen samme tangentlinie $L(\mathbb{R})$.

Bemærk at tangentlinien her er givet ved en parametrisering defineret på hele \mathbb{R} .



Figur 1.1: (a) Kurve med glat parametrisering og tangentlinie, (b) Kurve med to ikke-
glatte punkter

En mulig reparametrisering af (1.3) er givet ved

$$L'(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)t, \quad L' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

¹Kædereglens 2. udgave Sætning 9.14 i *Funktioner af en og flere variable*

Eksempel 1.1.1 Figur 1.1a viser kurven

$$(x(t), y(t)) = (2t + \sin(2\pi t), t + \cos(2\pi t)), \quad t \in]0, 2[$$

samt tangentlinien i punktet $(x(1), y(1)) = (2, 2)$ som er givet ved parametriseringen (fra (1.4)), $\mathbb{R} \ni t \mapsto (2 + t(2 + 2\pi), 2 + t)$.

Læseren bør checke resultatet. Bemærk at denne kurve skærer sig selv. I disse skæringspunkter er der to tangentlinier, men hver af disse hører til forskellige parameterværdier.

Figur 1.1b viser kurven

$$(x(t), y(t)) = \left(\sqrt{2}\pi t + \sin(2\pi t), \sqrt{2}\pi t + \cos(2\pi t) \right), \quad t \in]0, 2[.$$

Kurveparametriseringen er differentiabel, men ikke glat i $t = 3/8$ og $t = 11/8$ svarende til de markerede punkter på figuren. Man ser klart, at kurven heller ikke har en tangentlinie i disse punkter.

De sidste begreber vi skal indføre er *simple kurver* og *simple lukkede kurver*.

1.1.7 Definition (Simpel kurveparametrisering)

En kurveparametrisering $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ kaldes *simpel*, hvis den er injektiv på intervallet $[a, b]$. Den kaldes *simpel lukket*, hvis den er injektiv på $[a, b[$ og $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Den første parametrisering i Eksempel 1.1.1 er ikke simpel, men det er den anden.

For simple ikke-lukkede kurveparametriseringer \mathbf{r} vil vi identificere kurven med sporet, altså punktmængden $\mathbf{r}([a, b])$. Det giver mening fordi, som vi skal se i Sætning 1.1.9, er alle simple kurveparametriseringer med samme spor faktisk reparametriseringer af hinanden. For simple lukkede parametriseringer vil vi også identificere kurven med sporet, men startpunktet (de sammenfaldende endepunkter) vil være et specielt punkt på kurven.

1.1.8 Lemma (Simpel kurveparametrisering har kontinuert invers)

Hvis $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en simpel kurveparametrisering, vil den inverse (omvendte) funktion $\mathbf{r}^{-1} : \mathbf{r}([a, b]) \rightarrow [a, b]$ være kontinuert.

Hvis $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en simpel lukket kurveparametrisering, vil restriktionen af parametriseringen til $]a, b[$ have en invers^a $\mathbf{r}^{-1} : \mathbf{r}(]a, b[) \rightarrow]a, b[$, som er kontinuert.

^aVi tillader os at kalde den inverse \mathbf{r}^{-1} , selvom den kun er defineret på $\mathbf{r}(]a, b[)$.

Bevis. Beviset er næsten identisk i de to tilfælde. Vi giver det her for en simpel lukket kurveparametrisering og overlader det til læseren at gennemføre beviset for en simpel kurveparametrisering. Lad os kalde $C' = \mathbf{r}([a, b])$. Bemærk at da \mathbf{r} er injektiv på $[a, b]$, vil $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a) \notin C'$.

Vi giver et indirekte bevis for kontinuiteten af \mathbf{r}^{-1} . Vi antager, at \mathbf{r}^{-1} ikke er kontinuert i $p \in C'$. Det betyder, at

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists q \in C' : \|p - q\| < \delta \quad \text{og} \quad |\mathbf{r}^{-1}(p) - \mathbf{r}^{-1}(q)| > \varepsilon.$$

Altså kan vi finde $\varepsilon > 0$, så vi for alle $n \in \mathbb{N}$ kan vælge en følge $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ i C' , så

$$\|p_n - p\| < 1/n \quad \text{og} \quad |\mathbf{r}^{-1}(p) - \mathbf{r}^{-1}(p_n)| > \varepsilon. \quad (1.5)$$

Vi sætter $t = \mathbf{r}^{-1}(p)$ og $t_n = \mathbf{r}^{-1}(p_n)$, for $n = 1, 2, \dots$. Da vil $t \in]a, b[$ og $t_n \in]a, b[$ for $n = 1, 2, \dots$.

Vi vil nu vise, at der findes en delfølge $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, så $t_{n_k} \rightarrow t$ når $n \rightarrow \infty$, hvilket jo er i modstrid med (1.5), som giver at $|t - t_{n_k}| > \varepsilon$ for alle k .

For at vise eksistensen af en delfølge som angivet benytter vi os af Bolzano-Weierstrass Sætning.² Den giver os, at der ihvertfald findes en konvergent delfølge $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Der må gælde, at $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = t' \in [a, b]$. Vi skal blot vise, at $t' = t$.

Da \mathbf{r} er kontinuert, vil $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t_{n_k}) = \mathbf{r}(t')$. På den anden side ved vi, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t_n) = \lim_n p_n = p.$$

Vi konkluderer derfor, at $\mathbf{r}(t') = p = \mathbf{r}(t)$. Da $p \in C'$ og $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b) \notin C'$, ser vi, at t' hverken kan være a eller b og derfor er $t' \in]a, b[$. Injektiviteten af \mathbf{r} giver derfor, at $t' = t$ og vi har vist, at $t_{n_k} \rightarrow t$ når $k \rightarrow \infty$ som påstået. \square

1.1.9 Sætning (Simple kurve er karakteriseret ved sit spor)

Hvis $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er simple kurveparametriseringer med samme spor, findes der en reparametrisering $h : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$, så $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ h$.

Hvis $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er simple lukkede kurveparametriseringer med samme spor, som har samme startpunkt $\mathbf{r}_1(a_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$, findes der en reparametrisering $h : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$, så $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \circ h$.

Bevis. Vi betragter først simple kurveparametriseringer. Vi sætter simpelthen $h = \mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}_2$. Fra Lemma 1.1.8 er h en kontinuert injektiv funktion og den opfylder, at $h([a_2, b_2]) = [a_1, b_1]$. Det er ikke svært at konkludere fra mellemværdisætningen,³ at h så er strengt monoton (se opgave 1.7).

²Se Sætning 4.29 i *Funktioner af en og flere variable*

³Mellemværdisætningen er Sætning 5.16 i *Funktioner af en og flere variable*

For simple lukkede parametriseringer sikrer vores antagelse $\mathbf{r}_1(a_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$, at $\mathbf{r}_1(]a_1, b_1[) = \mathbf{r}_2(]a_2, b_2[)$. Vi kan derfor igen definere $h = \mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}_2$, hvilket giver en kontinuert injektiv funktion på $]a_2, b_2[$ med billede $]a_1, b_1[$. Igen kan vi fra mellemværdisætningen konkludere, at h er strengt monoton og yderligere at vi kan udvide h til en kontinuert funktion fra $[a_2, b_2]$ på $[a_1, b_1]$. \square

Vi burde også have vist, at hvis \mathbf{r}_1 og \mathbf{r}_2 er glatte i alle indre punkter, så er reparametriseringsfunktionen h glat. Det er desværre lidt mere indviklet, så vi udelader det her.

Vi skal nu se, hvordan man for simple kurver, kan give en alternativ beskrivelse af orienteringen.

1.1.10 Sætning (Kontinuitet af enhedstangentvektorer)

Hvis $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er simpel eller simpel lukket og glat i alle indre punkter $]a, b[$, definerer vi en afbildning $\mathbf{T}_\mathbf{r} : C' \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor $C' = \mathbf{r}(]a, b[)$, på følgende måde. Hvis $p = \mathbf{r}(t)$, sætter vi

$$\mathbf{T}_\mathbf{r}(p) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Denne afbildning er da kontinuert.

Hvis \mathbf{r}_1 fremkommer fra \mathbf{r} ved en glat orienteringsbevarende reparametrisering, har vi $\mathbf{T}_{\mathbf{r}_1} = \mathbf{T}_\mathbf{r}$. På den anden side, hvis \mathbf{r}_1 fremkommer fra \mathbf{r} ved en glat orienteringsvendende reparametrisering, har vi $\mathbf{T}_{\mathbf{r}_1} = -\mathbf{T}_\mathbf{r}$.

Bevis. Da kurveparametriseringen er simpel er \mathbf{r} injektiv på $]a, b[$, derfor vil der til ethvert punkt $p \in C'$ findes et entydigt $t \in]a, b[$ så $p = \mathbf{r}(t)$. Forskriften for $\mathbf{T}_\mathbf{r}$ giver derfor mening.

Vi kan også skrive

$$\mathbf{T}_\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}' \circ \mathbf{r}^{-1}}{\|\mathbf{r}' \circ \mathbf{r}^{-1}\|}.$$

Kontinuiteten af \mathbf{T} følger derfor af Lemma 1.1.8.

Vi mangler at vise, hvordan $\mathbf{T}_\mathbf{r}$ ændrer sig, hvis vi reparametriserer \mathbf{r} . Lad $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \circ h$, hvor h er en glat reparametrisering. Da vil $\mathbf{r}'_1(t) = \mathbf{r}'(h(t))h'(t)$. Lad $p = \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(h(t))$. Da vil

$$\mathbf{T}_\mathbf{r}(p) = \frac{\mathbf{r}'(h(t))}{\|\mathbf{r}'(h(t))\|} = \frac{\mathbf{r}'_1(t)}{\|\mathbf{r}'_1(t)\|} \frac{|h'(t)|}{h'(t)}.$$

Den sidste påstand i sætningen følger da umiddelbart af, at $h'(t) > 0$ for en orienteringsbevarende glat reparametrisering og $h'(t) < 0$ for en orienteringsvendende glat reparametrisering. \square

1.1.11 Definition (Glatte simple kurver og enhedstangenter)

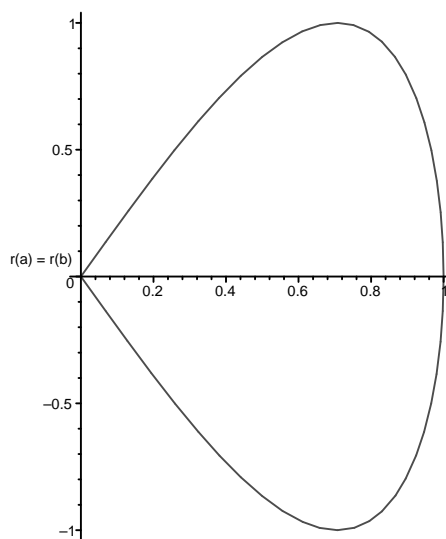
Lad $C = \mathbf{r}([a, b])$ være billedmængden for en simpel eller simpel lukket kurveparametrisering \mathbf{r} , som er glat på $]a, b[$. Hvis der findes en kontinuert afbildning $\mathbf{T} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, så $\mathbf{T}(p) = \mathbf{T}_{\mathbf{r}}(p)$ for alle $p \in C' = \mathbf{r}(]a, b[)$, kalder vi kurven C for en **glat simpel** eller **glat simpel lukket** kurve. Vi kalder afbildningen \mathbf{T} for et **enhedstangentfelt** for kurven.

Bemærk at Lemma 1.1.10 kun sikrer eksistensen af et kontinuert enhedstangentfelt på $C' = \mathbf{r}(]a, b[)$. En simpel kurve er altså glat, hvis enhedstangentfeltet kan udvides kontinuert til endepunkterne. Det er ikke altid muligt, som det næste eksempel viser.

Eksempel 1.1.2 Betragt kurveparametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t)), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Kurven er vist på Figur 1.2. Kurven er simpel lukket (Læseren bør overbevise sig om dette). Der kan ikke findes et kontinuert enhedstangentfelt på hele kurven. For $\mathbf{r}'(-\pi/2) = (1, -2)$ og $\mathbf{r}'(\pi/2) = (-1, -2)$ er ikke parallelle.



Figur 1.2: Kurven er simpel lukket, men ikke glat.

Enhedstangentfelterne for en glat simpel kurve er altså præcis afbildningerne beskrevet i Lemma 1.1.10 bortset fra, at de er udvidet til endepunkterne. Bemærk at vi kan karakterisere orienteringen af en glat simpel kurve ved enhedstangentfelter. Vi vil bruge en analogi til dette for flader i næste afsnit.

1.2 Flader

Vi studerer flader meget analogt til vores behandling af kurver, men vi vil ikke gå i lige så stor detalje her. Vi betragter kun flader indeholdt i \mathbb{R}^3 .

1.2.1 Definition (Fladeparametrisering)

En **fladeparametrisering** er en kontinuert afbildning $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, defineret på en delmængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Vi kalder billedmængden $\mathbf{r}(D)$ for **sporet** af fladeparametriseringen.

Bemærk at vi for kurver betragtede afbildninger defineret på intervaller, mens vi her tillader afbildninger på enhver delmængde af \mathbb{R}^2 . For at få en bedre definition, burde man have specificeret egenskaber ved definitionsområdet D , men det springer vi over her, men vender tilbage til det, når vi diskuterer glatte orienterede flader nedenfor.

1.2.2 Definition (Reparametriseringer og parametriseret flade)

En **reparametrisering** af en fladeparametrisering $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en ny fladeparametrisering givet som en sammensat funktion $\mathbf{r} \circ T : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$, hvor $T : D' \rightarrow D$ er en kontinuert funktion med kontinuert invers $T^{-1} : D \rightarrow D'$. Vi siger, at reparametriseringsfunktionen T er *glat*, hvis den er kontinuert differentiabel i alle indre punkter og dens Jacobi-matrix DT i alle indre punkter er invertibel.^a

Vi siger, at fladeparametriseringer, der fremkommer af hinanden ved reparametriseringer, repræsenterer samme **parametriserede flade**.

^aDet følger da fra den nedenfor anførte Sætning 2.2.1 om inverse funktioner, at det samme gælder for den inverse funktion.

Som for kurver vil vi generelt sige, at fladeparametriseringer, der ikke fremkommer af hinanden ved reparametrisering, repræsenterer *forskellige* parametriserede flader, også selvom de måtte have samme spor.

1.2.3 Definition (Glatte punkter og normalvektoren)

Lad $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en fladeparametrisering, som skrevet i koordinater har formen

$$\mathbf{r}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

Hvis (u_0, v_0) er et indre punkt i D og \mathbf{r} er differentiabel i (u_0, v_0) , d.v.s., hvis hver af koordinaterne x_1, x_2, x_3 er differentiable i (u_0, v_0) da kaldes krydsproduktet

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

for **normalvektoren** for fladeparametriseringen i (u_0, v_0) . En fladeparametrisering $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ siges at være **glat** i et indre punkt (u_0, v_0) , hvis den er kontinuert differentiabel i en åben kugle med centrum i (u_0, v_0) og hvis $\mathbf{N}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$. Vi siger, at en fladeparametrisering er glat, hvis den er glat i alle punkter.

Bemærk at 3×2 matricen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

præcis er Jacobi-matricen $D\mathbf{r}(u_0, v_0)$ for afbildningen \mathbf{r} i punktet (u_0, v_0) . Hvis normalvektoren $\mathbf{N}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$, vil søjlerne i $D\mathbf{r}(u_0, v_0)$ være lineært uafhængige og billedrummet (søjlerummet for matricen) er en plan, hvis normalvektor netop er $\mathbf{N}(u_0, v_0)$.

1.2.4 Lemma (Reparametriseringer og normalvektorer)

Lad $\mathbf{r} \circ T : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en reparametrisering af fladeparametriseringen $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ fremkommet ved en glat reparametrisering T . Da vil $\mathbf{r} \circ T$ være glat i et indre punkt (u, v) af D' , hvis og kun hvis \mathbf{r} er glat i punktet $T(u, v)$. I bekræftende fald vil normalvektoren for $\mathbf{r} \circ T$ i (u, v) være parallel med normalvektoren for \mathbf{r} i $T(u, v)$.

Bevis. Vi vil ikke her bevise, at $T(u, v)$ er et indre punkt i D . Det vil faktisk være en konsekvens af Sætning 2.2.1 om inverse funktioner. Resten af lemmaet følger af Kædereglens.⁴

⁴Kædereglens 3. udgave Sætning 9.36 i *Funktioner af en og flere variable*

Antag først at \mathbf{r} er glat i $T(u, v)$. Da vil

$$D(\mathbf{r} \circ T)(u, v) = D\mathbf{r}(T(u, v))DT(u, v).$$

Vi vil først benytte denne identitet til at konkludere, at billedrummet (søjlerummet) for 3×2 matricen $D(\mathbf{r} \circ T)(u, v)$ er lig med billedrummet for 3×2 matricen $D\mathbf{r}(T(u, v))$.

En vektor $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ ligger i billedrummet for $D(\mathbf{r} \circ T)(u, v)$, hvis der findes en vektor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ så $\mathbf{U} = D(\mathbf{r} \circ T)(u, v)\mathbf{V}$. Det følger da af identiteten ovenfor, at $\mathbf{U} = D\mathbf{r}(T(u, v))(DT(u, v)\mathbf{V})$ og derfor er \mathbf{U} også i billedrummet for $D\mathbf{r}(T(u, v))$.

Hvis omvendt $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ ligger i billedrummet for $D\mathbf{r}(T(u, v))$, findes der en vektor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ så $\mathbf{U} = D\mathbf{r}(T(u, v))\mathbf{V}$. Da $DT(u, v)$ er invertibel, har vi

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r} \circ T)(u, v) (DT(u, v)^{-1}\mathbf{V}) &= D\mathbf{r}(T(u, v))DT(u, v)DT(u, v)^{-1}\mathbf{V} \\ &= D\mathbf{r}(T(u, v))\mathbf{V} = \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Derfor er \mathbf{U} også i billedrummet for $D(\mathbf{r} \circ T)(u, v)$ og vi har vist at de to billedrum stemmer overens.

Normalvektoren for \mathbf{r} i punktet $T(u, v)$ er krydsproduktet af de to søjler i $D\mathbf{r}(T(u, v))$. Derfor er normalvektoren forskellig fra nul, hvis og kun hvis søjlerne er lineært uafhængige d.v.s., hvis og kun hvis billedrummet har dimension 2. Desuden er retningen af normalvektoren for \mathbf{r} i $T(u, v)$ entydigt givet ved, at normalvektoren er ortogonal på billedrummet for $D\mathbf{r}(T(u, v))$. Retningen af normalvektoren for $\mathbf{r} \circ T$ kan karakteriseres på samme måde ud fra denne matrix' billedrum. Derfor konkluderer vi, da de to billedrum er ens, at $\mathbf{r} \circ T$ er glat i (u, v) med en normalvektor parallel med normalvektoren for \mathbf{r} .

Hvis omvendt $\mathbf{r} \circ T$ er glat i (u, v) , benytter vi blot at T^{-1} har de samme egenskaber som T . \square

Vi ved fra diskussionen af differentiability af vektorfunktioner, at afbildningen,

$$L(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + D\mathbf{r}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.6)$$

er en god tilnærmelse til funktionen \mathbf{r} nær punktet (u, v) . Vi ved præcis, at ingen anden lineær afbildning, kan være en bedre approksimation til \mathbf{r} nær (u_0, v_0) end L . Vi kalder derfor $L(\mathbb{R}^2)$ *tangentplanen* i punktet $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

1.2.5 Definition (Tangentplan for glat parametriseret flade)

Lad $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en fladeparametrisering, der er glat i et indre punkt (u_0, v_0) , hvor $\mathbf{r}(u_0, v_0) = p$. Vi siger da, at den parametriserede flade i punktet p har en **tangentplan** givet ved parametriseringen (1.6) eller ækvivalent givet som planen gennem p med normalvektor $\mathbf{N}(u_0, v_0)$. Den givne parametrisering for tangentplanen afhænger af, den fladeparametrisering vi starter fra, men som konsekvens af Lemma 1.2.4 giver reparametriseringer af fladeparametriseringen samme tangentplan $L(\mathbb{R}^2)$.

Vi kommer nu til begrebet en *glat orienteret flade*. Definitionen af dette begreb er i høj grad motiveret af definitionen af en glat simpel kurve i Definition 1.1.11. Først definerer vi, hvilke mængder D de pågældende fladeparametriseringer er defineret på.

1.2.6 Definition (Elementære domæner i planen)

Vi kalder en mængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ for et **elementært domæne**,^a hvis den kan skrives på en af de følgende to måder.

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq o(x)\} \quad (1.7)$$

eller

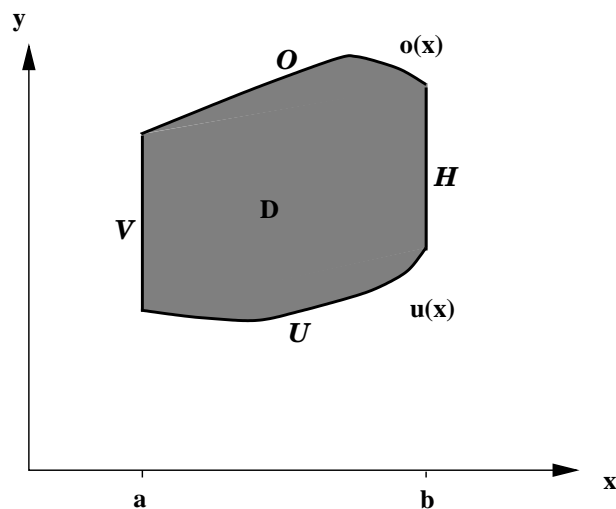
$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, v(y) \leq x \leq h(y)\} \quad (1.8)$$

hvor $v, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eller $u, o : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner, der opfylder $v < h$ på $]c, d[$ eller $u < o$ på $]a, b[$. (Her står v, h, u, o for henholdsvis venstre, højre, under og over.)^b

^aBetegnelsen *elementært domæne* er ikke standard i litteraturen.

^bDisse mængder optræder også i Sætning 10.13 og Korollar 10.14 i *Funktioner af en og flere variable*.

Disse elementære domæner er også vigtige for vores diskussion af flervariabel integration i Kapitel 6.



Figur 1.3: Et elementært domæne af typen (1.7)

1.2.7 Bemærkning (Randen af et elementært domæne)

Randen ∂D af et elementært domæne⁵ er foreningsmængden af de mængder, der kan skrives på samme måde som D , men med et af ulighedstegnene erstattet af et lighedstegn. F.eks. for D af typen (1.7) får vi

$$\partial D = \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{O}, \quad (1.9)$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x, y) \mid x = a, u(a) \leq y \leq o(a)\} & \mathcal{U} &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y = u(x)\} \\ \mathcal{H} &= \{(x, y) \mid x = b, u(b) \leq y \leq o(b)\} & \mathcal{O} &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y = o(x)\}. \end{aligned}$$

Her refererer \mathcal{V} , \mathcal{H} , \mathcal{U} og \mathcal{O} til henholdsvis venstre-, højre-, under- og oversiden af randen.

1.2.8 Definition (Glat orienteret flade)

En **glat orienteret flade** er en delmængde $S \subseteq \mathbb{R}^3$, som er billedmængden $S = \mathbf{r}(D)$ af en fladeparametrisering $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ med følgende egenskaber:

- fladeparametriseringen er defineret på et elementært domæne D .
- fladeparametriseringen er glat i alle indre punkter af D , d.v.s., på

$$D \setminus \partial D.$$

- Parametriseringen \mathbf{r} er injektiv på det indre af D og

$$\mathbf{r}(\partial D) \cap \mathbf{r}(D \setminus \partial D) = \emptyset. \quad (1.10)$$

- Der findes en kontinuert afbildning $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ kaldet et **enhedsnormalfelt**, så $\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{N}(u, v) / \|\mathbf{N}(u, v)\|$ i alle indre punkter (u, v) af D . Her er $\mathbf{N}(u, v)$ normalvektoren for parametriseringen \mathbf{r} .

Vi siger at enhedsnormalfeltet definerer en orientering af fladen.

Denne definition kan være ret svær at forstå, men den kan motiveres ved at tænke på en flade som formet ved at folde et stykke papir og lime det sammen langs kanten. Det flade papir er mængden D i planen og måden den bliver foldet på, er givet ved afbildningen \mathbf{r} . Det stykke, der bliver limet, er en del af randen ∂D . Derfor er afbildningen ikke injektiv på randen. At et kantstykke limes fast til et andet kantstykke og altså ikke til det indre udtrykkes i betingelsen (1.10).

⁵Generelt er randen af en mængde, den mængde af punkter der hverken er indre punkter i mængden eller dens komplementær mængde.

1.2.9 Lemma (Kontinuert invers af fladeparametrisering)

Hvis $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en fladeparametrisering, med egenskaberne givet i Definition 1.2.8, vil restriktionen af \mathbf{r} til $D \setminus \partial D$ have en kontinuert invers $\mathbf{r}^{-1} : \mathbf{r}(D \setminus \partial D) \rightarrow D \setminus \partial D$.

Bevis. Beviset er identisk med beviset for Lemma 1.1.8. □

1.2.10 Sætning (Kontinuitet af enhedsnormalvektorer)

Hvis $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en fladeparametrisering, med egenskaberne givet i Definition 1.2.8. Definerer vi en afbildning

$$\mathbf{n}_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(D \setminus \partial D) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

på følgende måde. Hvis $p = \mathbf{r}(u, v)$, sætter vi

$$\mathbf{n}_{\mathbf{r}}(p) = \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|},$$

hvor \mathbf{N} er normalvektoren hørende til \mathbf{r} . Afbildningen $\mathbf{n}_{\mathbf{r}}$ er da kontinuert.

Bevis. Beviset følger af Lemma 1.2.9, da

$$\mathbf{n}_{\mathbf{r}}(p) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}^{-1}(p))}{\|\mathbf{N}(\mathbf{r}^{-1}(p))\|}$$

□

Hvilke reparametriseringer, der bevarer retningen af $\mathbf{n}_{\mathbf{r}}$, altså orienteringen, er diskuteret i Opgave 1.11.

Kravet om eksistensen af funktionen \mathbf{n} i Definition 1.2.8, er altså et spørgsmål om, hvorvidt $\mathbf{n}_{\mathbf{r}}$ kan udvides til $\mathbf{r}(\partial D)$.

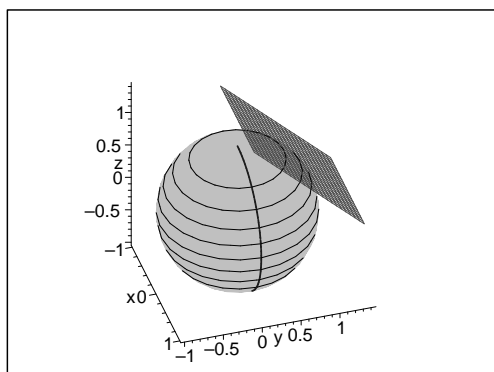
1.2.11 Bemærkning (Rand af flade og lukket flade)

Hvis parametriseringen \mathbf{r} i Definition 1.2.8 er injektiv på hele D , kalder vi $\partial S = \mathbf{r}(\partial D)$ for **fladens rand**.

Man kan vise, at denne definition ikke afhænger af parametriseringen. Hvis altså $\tilde{\mathbf{r}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en anden parametrisering af S med egenskaberne i Definition 1.2.8, som er injektiv på hele \tilde{D} , vil $\tilde{\mathbf{r}}(\partial \tilde{D}) = \mathbf{r}(\partial D)$.

I den helt modsatte situation, hvor vi til ethvert punkt p på fladen altid kan finde en parametrisering $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, med egenskaberne i Definition 1.2.8, så p ikke ligger på billedet af randen ∂D af D , d.v.s. $p \notin \mathbf{r}(\partial D)$, siger vi, at fladen er **lukket**.

Vi afslutter med, at betragte et par eksempler.



Figur 1.4: Kugle med tangentplan

Eksempel 1.2.1 (Kuglefladen)

Kuglefladen med radius 1 kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \sin(u) \\ \sin(v) \sin(u) \\ \cos(u) \end{pmatrix},$$

hvor $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Se også Definition 6.1.5 af sfæriske koordinater. Den givne parametrisering af kuglefladen er injektiv på det indre af definitionsmængden. Billedet af randen ∂D giver en halv storcirkel, som er vist på Figur 1.4. Det er klart, at vi ved at vælge en roteret parametrisering kan flytte billedet af randen til et helt andet sted på kuglen. Det passer med vores definition, af at denne kugleflade er lukket. Bemærk at man kan vælge et kontinuert enhedsnormalfelt f.eks. det *udadrettede enhedsnormalfelt*, så kuglefladen bliver en glat orienteret flade. Det udadrettede enhedsnormalfelt er givet ved afbildningen

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

restringeret til kuglefladen. Lad os beregne normalvektoren til parametriseringen

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \sin(u)^2 \cos(v) \\ \sin(u)^2 \sin(v) \\ \cos(u) \sin(u) \end{pmatrix} = \sin(u) \mathbf{r}(u, v).$$

Da $\mathbf{N}(u, v) = \sin(u) \mathbf{r}(u, v) = \sin(u) \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v))$ i indre punkter (u, v) og $\sin(u) > 0$ her, er $\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{N}(u, v) / \|\mathbf{N}(u, v)\|$.

Den *indadrettede* enhedsnormal definerer også et enhedsnormalfelt, hvilket giver den anden mulige orientering af fladen.

På Fig.1.4 viser vi tangentplanen i punktet

$$\mathbf{r}(\pi/4, \pi/2) = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2).$$

For at finde dens parametrisering udregner vi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(\pi/4, \pi/2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(\pi/4, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Vi får da, at parametriseringen for tangentplanen er

$$L(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (v - \pi/2) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} (u - \pi/4).$$

Vi kan nemt finde ligningen for tangentplanen, da vi kender normalvektoren, som jo er lig med \mathbf{r} . Ligningen er altså

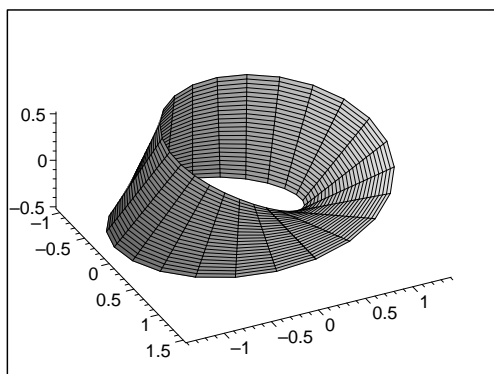
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.$$

Læseren bør checke resultaterne.

Ikke alle flader kan orienteres. De mest berømte eksempler på dette er Möbius bånd. På Figur 1.5 viser vi et Möbius bånd med parametriseringen

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u)(1 + v \cos(u/2)), \sin(u)(1 + v \cos(u/2)), v \sin(u/2)),$$

defineret for $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1/2, 1/2]$. Læseren bør ved at betragte figuren forsøge at overbevise sig om, at man ikke kan definere et kontinuert enhedsnormalfelt for denne flade. Denne flade er *ikke* en glat orienteret flade. Man vil normalt kalde den en glat flade, men det er lidt mere indviklet at definere, så vi vil undlade dette her.



Figur 1.5: Möbius bånd

1.2.12 Grafer for funktioner af en og to variable

Vi skal nu se, at grafer for funktioner af en og to variable, som man skulle forvente, virkelig er henholdsvis kurver i \mathbb{R}^2 og flader i \mathbb{R}^3 .

Grafen for en kontinuert funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ defineret på et lukket interval I , er et eksempel på en simpel kurve i \mathbb{R}^2 . Husk,⁶ at grafen er defineret som mængden

$$\{(x, f(x)) \mid x \in I\}.$$

Det er klart, at dette er en simpel kurve parametriseret ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, f(t)), \quad t \in I.$$

Bemærk at hvis f er kontinuert differentiabel i et åbent interval omkring et punkt t , så er kurveparametriseringen glat i punktet t . Betingelsen $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ er nemlig automatisk opfyldt, da $\mathbf{r}'(t) = (1, f'(t))$. Tangentlinien til kurven i et punkt $(a, f(a))$ har parametriseringen

$$L : t \mapsto (a, f(a)) + (t - a)(1, f'(a)),$$

men denne linie har jo netop ligningen $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, svarende til tangenten for grafen.⁷

Hvis $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuert differentiabel funktion defineret på en åben mængde $U \subset \mathbb{R}^2$ og $D \subset U$ er et elementært domæne, vil grafen⁸

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

være en glat orienteret flade parametriseret ved

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

⁶Se Definition 9.2 og Eksempel 7.2 i *Funktioner af en og flere variable*

⁷Se Eksempel 7.2 i *Funktioner af en og flere variable*

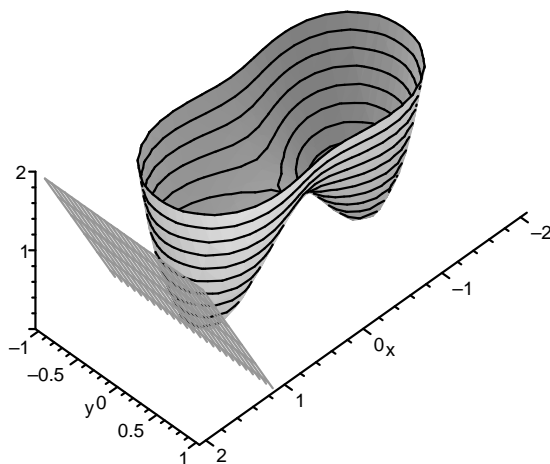
⁸Se Definition 9.2 i *Funktioner af en og flere variable*

Tangentplanen til grafen⁹ i et punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er planen gennem punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ udspændt af vektorerne

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Normalvektoren¹⁰ bliver

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Figur 1.6: Grafen for $f(x, y) = ((x + 1)^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)$ og tangentplanen i punktet $(6/5, 0, f(6/5, 0))$

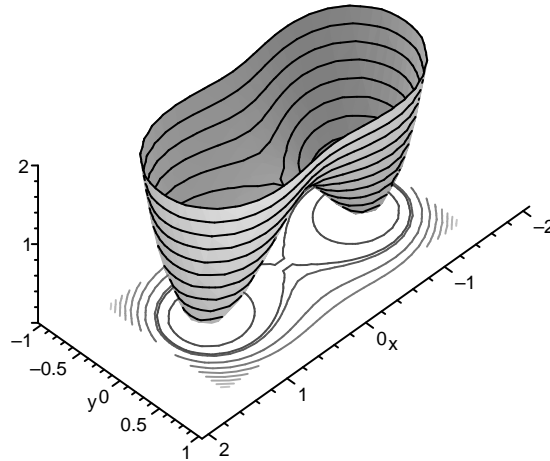
Grafen for en funktion er ikke den eneste geometriske repræsentation af funktionen. En anden mulighed er niveaumængderne.

1.2.13 Definition (Niveaumængder, -kurver og -flader)

Hvis $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ og $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definerer vi **niveaumængden** $L_c \subseteq \mathbb{R}^n$ for f hørende til værdien $c \in \mathbb{R}$ ved $L_c(f) = \{x \in A \mid f(x) = c\}$. I tilfældet $n = 2$, taler vi om en **niveaukurve** og i tilfældet $n = 3$ om en **niveauflade**.

⁹Tangentplanen er defineret i Definition 9.3 i *Funktioner af en og flere variable*

¹⁰I Definition 9.4 i *Funktioner af en og flere variable* har normalvektoren modsat fortegn af normalvektoren givet her.



Figur 1.7: Niveaukurver

Man kan spørge sig selv, om niveaukurver og niveauflader er kurver og flader i den forstand, vi har defineret dem ovenfor. Svaret er, at der, til ethvert punkt $x_0 \in L_c$, hvor gradienten $\nabla f(x_0) \neq 0$, findes en åben mængde indholdende x_0 , således at den del af niveaumængden, der ligger indenfor denne åbne mængde, er en kurve, hvis dimensionen er $n = 2$ eller en flade, hvis dimensionen er $n = 3$ og i begge tilfælde er der glathed i punktet x_0 . Dette resultat er en konsekvens af sætningen om implicit givne funktioner, som vi kommer til i næste kapitel, se Bemærkning 2.1.3.

Figur 1.7 viser samtidig grafen og nogle niveaukurver for funktionen

$$f(x, y) = ((x + 1)^2 + y^2) ((x - 1)^2 + y^2).$$

1.2.14 Sætning (Gradienten er vinkelret på niveaumængder)

Lad $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Hvis $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en kurveparametrisering, som er glat i et indre punkt t og hvis spor $\mathbf{r}(I)$ er helt indeholdt i en niveaumængde for f , da vil hastighedsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ være ortogonal på gradienten $\nabla f(\mathbf{r}(t))$, hvis f er differentiabel i $\mathbf{r}(t)$. Man udtrykker ofte dette ved at sige, at gradienten er vinkelret på niveaumængder.

Bevis. Beviset er ganske simpelt. Da $\mathbf{r}(I)$ er indeholdt i en niveaumængde for f , er funktionen $I \ni t \mapsto f(\mathbf{r}(t))$ konstant. Den har derfor afledet 0. Fra Kædereglens¹¹ konkluderer vi, at $\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$. \square

¹¹Sætning 9.14 i *Funktioner af en og flere variable*

1.3 Opgaver til Kapitel 1

1.1 Opgave

For følgende kurveparametriseringer skal man tegne sporet, vise, at parametreringen er glat i det givne punkt t_0 og finde en parametrisering for tangentlinien i det tilsvarende punkt på sporet.

- (a) Cycloide: $\mathbf{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 4\pi]$, $t_0 = \pi/4$.
- (b) Archimedes' spiral: $\mathbf{r}(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $t_0 = \pi$.
- (c) Logaritmisk spiral: $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $t_0 = \pi$.
- (d) Helix: $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $t_0 = \pi/4$.

1.2 Opgave

Bestem i hvilke indre punkter parametreringen for Cycloiden,

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \quad t \in [0, 4\pi],$$

ikke er glat.

1.3 Opgave

Lad $a, b > 0$. Find en parametrisering for ellipsen

$$\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Argumenter for at det er en glat simpel lukket kurve og giv en forskrift for de mulige enhedstangentfelter.

1.4 Opgave

Tegn niveaukurver for følgende funktioner

- (a) $f(x, y) = x + y$
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (c) $f(x, y) = xy$

1.5 Opgave

For følgende funktioner skal man bestemme samtlige kritiske punkter, klassificere dem og beskrive opførslen af niveaukurverne i nærheden af de kritiske punkter.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(b) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$

(c) $f(x, y) = ((x + 1)^2 + y^2) ((x - 1)^2 + y^2)$ (se Figur 1.6 og 1.7).

1.6 Opgave

Vis ved et eksempel, at der kan findes lukkede simple parametriseringer $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ af enhedscirklen, som ikke er reparametriseringer af hinanden. Vink: vælg dem så $\mathbf{r}_1(a_1) \neq \mathbf{r}_2(a_2)$.

1.7 Opgave

Vis at en kontinuert injektiv afbildning $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er strengt monoton.

Vink: Der må enten gælde $h(a) < h(b)$ eller $h(a) > h(b)$. Antag det første tilfælde. Lad $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Man skal vise, at $h(x_1) < h(x_2)$. Antag modsat at $h(x_1) > h(x_2)$ (man kan ikke have $h(x_1) = h(x_2)$, da h er injektiv). Benyt nu mellemværdisætningen til at vise, at dette er i modstrid med injektiviteten.

1.8 Opgave

Find en parametrisering af *cylinderen* $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ og find en ligning for tangentplanen i punktet $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1/2)$. Argumenter for, at man kan finde et enhedsnormalfelt, så fladen bliver en orienteret glat flade.

1.9 Opgave

Fladen parametriseret ved

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u)(2 + \cos(v)), \sin(u)(2 + \cos(v)), \sin(v)), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

er et eksempel på en *torus*.

- (a) Tegn fladen f.eks. ved brug af Maple.
- (b) Argumenter for, at man kan vælge et kontinuert enhedsnormalfelt, så fladen bliver en glat orienteret flade.
- (c) Vis at fladen er lukket.

1.10 Opgave

Lad $a, b, c > 0$. Find en parametrisering af *ellipsoiden*

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

og find en parametrisering og en ligning for tangentplanen i punktet $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$. Find et udtryk for det udadrettede normalfelt og argumenter for at fladen er en orienteret glat lukket flade.

1.11 Opgave

- (a) Lad A være en 3×2 -matrix og B en 2×2 -matrix. Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ være søjlevektorerne i A og $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ være søjlevektorerne i AB . Vis at

$$\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \det(B)\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

- (b) Benyt formelen i (a) til at vise, at reparametriseringer T med $\det DT(u, v) < 0$ i et indre punkt (u, v) har den effekt, at normalvektoren hørende til den nye parametrisering i dette punkt har modsat retning af den oprindelige normalvektor, mens reparametriseringer T med $\det DT(u, v) > 0$ ikke ændrer retningen af normalvektoren.

Kapitel 2

Implicit givne og inverse funktioner

2.1 Implicit givne funktioner

I lineær algebra har vi lært meget om at løse lineære ligningsystemer og om strukturen af løsningsmængden. Specielt ved vi, at hvis vi har flere ubekendte end ligninger vil visse af disse ubekendte variable kunne betragtes som frie og de øvrige, ofte kaldt de ledende variable, kan udtrykkes ved de frie variable.

Vi skal nu se, hvordan man i en vis meget begrænset udstrækning kan generalisere dette billede til et generelt ikke-lineært ligningsystem. Vi skal betragte m ligninger i $m + n$ variable.

Givet m funktioner $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ og en løsning

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

til ligningerne

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0. \end{aligned}$$

Under hvilke omstændigheder kan vi finde funktioner h_1, h_2, \dots, h_m af de n variable x_1, x_2, \dots, x_n således at

$$h_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = b_i$$

og

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, h_1(x_1, \dots, x_n), h_2(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

for alle $i = 1, 2, \dots, m$, og for alle (x_1, x_2, \dots, x_n) i en omegn af (a_1, a_2, \dots, a_n) ? Vi har jo m ligninger, og hvis vi betragter x_i 'erne som kendte, kan vi jo have begrundet håb om, ved hjælp af ligningerne at kunne fastlægge de sidste m variable som kontinuerte funktioner af x_1, x_2, \dots, x_n . En mere komprimeret måde at formulere dette spørgsmål på er flg. : Givet en funktion $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ (svarende til

$$F(x_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, y_m), f_2(x_1, \dots, y_m), \dots, f_m(x_1, \dots, y_m)) ,$$

og vektorer $a \in \mathbb{R}^n$ og $b \in \mathbb{R}^m$, som opfylder at

$$F(a, b) = 0$$

(svarende til $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$), hvornår kan man finde en kontinuert funktion h , defineret i en lille kugle omkring a , således at $h(a) = b$, og

$$F(x, h(x)) = 0$$

for alle x i denne lille kugle?

Det er præcist denne situation den generelle version af sætningen om implicit givne funktioner udtaler sig om.

2.1.1 Sætning (Implicit givne funktioner—generel version)

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ være en åben mængde og $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en kontinuert differentiabel funktion med koordinatfunktionerne

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_m(x, y)) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m .$$

Antag at $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ opfylder $(a, b) \in U$, $F(a, b) = 0$ og at determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_3}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a, b) & \frac{\partial F_2}{\partial y_3}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_3}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Så findes en åben kugle, $B_{\delta_1}(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ med radius $\delta_1 > 0$ og centrum i a og en åben kugle, $B_{\delta_2}(b) \subseteq \mathbb{R}^m$ med radius $\delta_2 > 0$ og centrum i b samt en kontinuert differentiabel funktion $H : B_{\delta_1}(a) \rightarrow B_{\delta_2}(b)$, så vi for alle $x \in B_{\delta_1}(a)$ har

$$y \in B_{\delta_2}(b), \quad F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = H(x).$$

Specielt er $H(a) = b$.

Vi skal ikke give beviset for denne sætning her. Fra lineær algebra vides at kravet i sætningen om, at determinanten af

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_3}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a, b) & \frac{\partial F_2}{\partial y_3}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_3}(a, b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix}$$

skal være forskellig fra 0, er ækvivalent med at forlange, at denne $m \times m$ -matrix er invertibel. Vi overlader det til læseren at overbevise sig om, at det i tilfældet, hvor F er en lineær funktion, præcis betyder, at x_1, \dots, x_n er frie variable og y_1, \dots, y_m er ledende variable i ligningssystemet $F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$.

2.1.2 Sætning (Tilfældet $m = 1$ og implicit differentiation)

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ være en åben mængde og lad $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert differentiabel funktion, som vi skriver $f(x_1, \dots, x_n, y)$. Antag at $(a_1, \dots, a_n, b) \in U$, $f(a_1, \dots, a_n, b) = 0$ og at den partielt afledte

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0.$$

Da findes en åben kugle, $B_{\delta_1}(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ med radius $\delta_1 > 0$ og centrum i a og et åbent interval, $]b - \delta_2, b + \delta_2[$ af længde $2\delta_2 > 0$ med centrum i b samt en kontinuert differentiabel funktion $h : B_{\delta_1}(a) \rightarrow]b - \delta_2, b + \delta_2[$, så vi for alle $(x_1, \dots, x_n) \in B_{\delta_1}(a)$ har

$$y \in]b - \delta_2, b + \delta_2[, \quad f(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x_1, \dots, x_n).$$

Specielt er $h(a_1, \dots, a_n) = b$. Desuden gælder for $(x_1, \dots, x_n) \in B_{\delta_1}(a)$, at

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n))}. \quad (2.1)$$

Bevis. Eksistensen af h følger fra Sætning 2.1.1. Vi mangler blot at vise (2.1). Hvis vi benytter at $f(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)) = 0$ for alle $(x_1, \dots, x_n) \in B_{\delta_1}(a)$ får vi fra Kædereglens,¹ at

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)) \right)$$

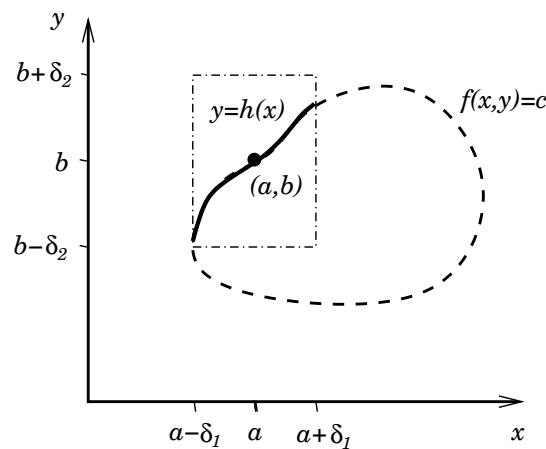
¹Se *Funktioner af en og flere variable* Sætning 9.14.

$$= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, h(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n).$$

Ligning (2.1) følger ved at løse for $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ ovenfor. Bemærk, at man kan antage, at kuglen $B_{\delta_1}(a)$ er valgt så nævneren i (2.1) ikke er 0. Det er fordi nævneren er kontinuert, da f er kontinuert differentiabel og h er kontinuert, og nævneren per antagelse ikke er 0, når $(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)$. \square

Bemærk at man kan benytte (2.1) til at bestemme $\frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n)$ da man ved, at $h(a_1, \dots, a_n) = b$. Man finder altså de partielt afledte af h , selvom man faktisk ikke kender funktionen fuldstændigt nær a . Man taler derfor om *implicit differentiation*. Man benytter ofte en notation, hvor man udelader h og skriver $y = y(x_1, \dots, x_n)$. Beviset for implicit differentiation følger da fra den mere kompakte udregning

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j}(f(x_1, \dots, x_n, y)) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_j}.$$



Figur 2.1: Illustration af sætningen om implicit givne funktioner. Niveaukurven for $f(x, y)$ er identisk med grafen for h indenfor mængden $]a - \delta_1, a + \delta_1[\times]b - \delta_2, b + \delta_2[$, hvis $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

2.1.3 Bemærkning (Niveaukurver/flader er kurver/flader)

Lad $a \in L_c(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ være et punkt på en niveaumængde for en kontinuert differentiabel funktion f af n variable, hvor $\nabla f(a) \neq 0$. Da vil mindst en af de partielt afledte $\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$, $j = 1, \dots, n$ være forskellig fra nul. Vi kan for nemheds

skyld antage, at $\frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \neq 0$. Det følger da fra Sætning 2.1.2 om implicit givne funktioner, brugt på funktionen $x \mapsto f(x) - c$, at der findes $\delta_1, \delta_2 > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion

$$h : B_{\delta_1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \rightarrow]a_n - \delta_2, a_n + \delta_2[,$$

så der for alle $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_{\delta_1}(a_1, \dots, a_{n-1})$ gælder, at

$$x_n \in]a_n - \delta_2, a_n + \delta_2[, \quad f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = c \Leftrightarrow x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

(Bemærk at vi før kaldte a_n for b .) Denne påstand siger simpelthen, at mængden

$$B_{\delta_1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \times]a_n - \delta_2, a_n + \delta_2[\cap L_c(f)$$

er grafen for funktionen h (se Figur 2.1). I tilfældet $n = 2$ ved vi, at denne graf er en kurve og i tilfældet $n = 3$, at den er en flade.

Eksempel 2.1.1 Lad

$$F(x, y) = \sin(xy) - y .$$

Da $x = \pi/2$ og $y = 1$ løser ligningen $\sin(xy) - y = 0$ har vi at $F(\pi/2, 1) = 0$. Desuden er

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) x - 1,$$

så $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi/2, 1) = -1 \neq 0$. Vi kan derfor bruge Sætning 2.1.2 til at konkludere, at der findes et $\epsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $h :]\pi/2 - \epsilon, \pi/2 + \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ som opfylder at $h(\pi/2) = 1$ og

$$\sin(xh(x)) = h(x) \quad , \quad x \in]\pi/2 - \epsilon, \pi/2 + \epsilon[.$$

Desuden vil

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, h(x))} = -\frac{\cos(xh(x)) h(x)}{\cos(xh(x)) x - 1} .$$

Da $h(\pi/2) = 1$ har vi at $h'(\pi/2) = 0$. Da h er kontinuert differentiabel ser vi fra udtrykket for $h'(x)$, at h' også er kontinuert differentiabel i nærheden af $\pi/2$ (så længe $\cos(xh(x)) x - 1 \neq 0$). D.v.s. at h er to gange kontinuert differentiabel. Vi kan beregne

$$h''(x) = -\frac{h'(x) (\sin(xh(x)) h(x) x + \cos^2(xh(x)) x - \cos(xh(x)))}{(\cos(xh(x)) x - 1)^2} - \frac{\sin(xh(x)) h(x)^2 - \cos^2(xh(x)) h(x)}{(\cos(xh(x)) x - 1)^2} .$$

Hvis vi benytter $h(\pi/2) = 1$ og $h'(\pi/2) = 0$ finder vi $h''(\pi/2) = -1$. På samme måde kan man se, at h er vilkårligt ofte kontinuert differentiabel i nærheden af $\pi/2$ og man kan beregne alle de højere afledte af h i $\pi/2$.

2.2 Inverse funktioner

Det er velkendt,² at hvis en funktion f af en variabel har en invers eller omvendt funktion $g = f^{-1}$ og f er differentiabel i a og g er differentiabel i $f(a)$, da vil

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}. \quad (2.2)$$

Vi skal nu benytte Sætning 2.1.1 om implicit givne funktioner til at vise et endda mere generelt resultat for funktioner af flere variable.

2.2.1 Sætning (Sætningen om inverse (omvendte) funktioner)

Lad $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en kontinuert differentiabel funktion defineret på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Antag at der i punktet $a \in U$ gælder, at

$$\det DF(a) \neq 0, \quad (2.3)$$

altså, at Jacobi-matricen^a i a er invertibel.

Der findes da $\delta_1, \delta_2 > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion

$$G : B_{\delta_1}(F(a)) \rightarrow B_{\delta_2}(a),$$

så der for alle $y \in B_{\delta_1}(F(a))$ gælder

$$x \in B_{\delta_2}(a), \quad y = F(x) \Leftrightarrow x = G(y). \quad (2.4)$$

Man udtrykker dette ved, at F i nærheden af a har en invers G defineret nær $F(a)$.

Desuden gælder, at Jacobi-matricen $DG(F(a))$ er givet ved

$$DG(F(a)) = DF(a)^{-1}. \quad (2.5)$$

Bemærk at i tilfældet af en variabel reducerer denne relation simpelthen til (2.2).

^aSe Definition 9.32 og Sætning 9.33 i *Funktioner af en og flere variable*

Bevis. Vi definerer funktionen $\mathbb{F} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ved $\mathbb{F}(x, y) = F(x) - y$. Mængden af punkter (x, y) , hvor $y = F(x)$ kan udtrykkes som $\mathbb{F}(x, y) = 0$. Vi vil benytte Sætning 2.1.1 på funktionen \mathbb{F} .

Da vi ønsker at udtrykke x som funktion af y , spiller x og y de omvendte roller her sammenlignet med Sætning 2.1.1. Vi bemærker, at antagelsen (2.3) svarer til antagelsen om, at determinanten er forskellig fra 0 i Sætning 2.1.1. Eksistensen af G er da en direkte konsekvens af denne sætning.

²Se Afsnit 7.2 i *Funktioner af en og flere variable*.

Vi mangler blot at vise (2.5). Da F er kontinuert, findes der et $\delta > 0$ så $\delta < \delta_2$ og

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(a)\| < \delta_1.$$

For alle x så $\|x - a\| < \delta$ gælder derfor, at $y = F(x) \in B_{\delta_1}(F(a))$. Vi kan derfor benytte (2.4) til at konkludere, at

$$G(F(x)) = x.$$

Hvis vi benytter Kædereglens for vektorfunktioner³ finder vi, da Jacobi-matricen for identitetsafbildningen $x \mapsto x$ er identitetsmatricen I , at

$$DG(F(a))DF(a) = I,$$

hvilket giver (2.5). □

Eksempel 2.2.1 Betragt funktionen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved

$$F(x, y) = (\exp(x) + yx, \sin(y) + x^2).$$

Vi ønsker at vise, at F nær $(x, y) = (0, 0)$ har en invers G defineret nær $F(0, 0) = (1, 0)$ og at finde $DG(1, 0)$. Vi udregner

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(x) + y & x \\ 2x & \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Derfor er determinanten $|DF(x, y)| = (\exp(x) + y) \cos(y) - 2x^2$ og $|DF(0, 0)| = 1$. Eksistensen af G følger af Sætning 2.2.1 og ligeledes finder vi, at

$$DG(1, 0) = DF(0, 0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Opgaver til Kapitel 2

2.1 Opgave

Gør rede for, at der findes et $\epsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $f :] - \epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, således at $f(0) = 0$, og

$$e^{f(x)} \cos(x) = \cos^2(f(x)) \quad , \quad x \in] - \epsilon, \epsilon[.$$

Find desuden $f'(0)$.

³I *Funktioner af en og flere variable* er det Sætning 9.36 (3. udgave af kædereglens).

2.2 Opgave

Gør rede for, at der findes et $\epsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $\varphi :]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, således, at $\varphi(1) = 0$ og

$$e^{x^2\varphi(x)} = x, \quad x \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[.$$

Bestem desuden $\varphi'(1)$. Argumenter for at φ er to gange kontinuert differentiabel nær 1 og find $\varphi''(1)$.

2.3 Opgave

Gør rede for, at der findes et $\epsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ således at $\varphi(0) = 0$ og

$$\ln(x + \varphi(x) + 1) + 1 = \cos(\varphi(x)), \quad x \in]-\epsilon, \epsilon[.$$

Bestem desuden $\varphi'(0)$.

2.4 Opgave

Gør rede for at der findes en åben kugle B omkring punktet $(1, 0)$ i \mathbb{R}^2 og en kontinuert differentiabel funktion $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ så $h(1, 0) = 0$ og

$$x_2 \exp(x_1 h(x_1, x_2)^2) = x_1 h(x_1, x_2).$$

Bestem desuden $\frac{\partial h}{\partial x_1}(1, 0)$ og $\frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0)$.

2.5 Opgave

Gør rede for at der findes et $\epsilon > 0$ og to kontinuert differentiable funktioner $f, g :]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, således at $f(1) = 1$, $g(1) = \frac{\pi}{2}$, og

$$x^2 f(x) \sin(g(x)) = f(x)^3, \quad \cos(g(x)) = f(x)^3 - 1,$$

for alle $x \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$. Bestem desuden $f'(1)$ og $g'(1)$.

2.6 Opgave

Gør rede for at der findes et $\epsilon > 0$ og to kontinuert differentiable funktioner $f, g :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, således at $f(0) = g(0) = 0$ og

$$e^{f(x)} \cos(g(x)) = x + 1, \quad f(x) - g(x) = x^2,$$

for alle $x \in]-\epsilon, \epsilon[$. Bestem desuden $f'(0)$ og $g'(0)$.

2.7 Opgave

Bevis Sætning 2.2.1 direkte for funktioner af én variabel, altså i tilfældet $n = 1$.⁴

⁴Vink: Benyt Sætningerne 5.23, 7.8 og 7.14 i *Funktioner af en og flere variable*.

Kapitel 3

Ekstremum under bibetingelser

Vi skal i dette kapitel se en metode til bestemmelse af max og min for en funktion f defineret på niveaumængden for en anden funktion g . Man taler om at finde ekstremum for f under bibetingelsen $g = c$.

Lokale ekstremumpunkter¹ i det *indre* af definitionsmængden for en differentiabel funktion f , er som bekendt nødvendigvis kritiske punkter,² altså punkter x_0 , hvor $\nabla f(x_0) = 0$.

Punkter på en niveaumængde er dog generelt ikke indre punkter og det ovenstående resultat kan derfor ikke benyttes til bestemmelse af ekstremums-værdier under en bibetingelse.

Et eksempel på ekstremum under bibetingelse er at finde max og min for $f(x, y) = 2xy$ på mængden $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$. Her er funktionen

$$g(x, y) = x^2 + y^2.$$

En mulig metode er at parametrisere niveaukurven ved

$$(x, y) = (2 \cos(t), 2 \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Problemet er da reduceret til at finde max og min for funktionen

$$t \mapsto 8 \cos(t) \sin(t).$$

Det overlades til læseren at gennemføre beregningerne.³

Vi skal her beskrive en anden metode, der kan benyttes, også når det ikke er nemt at finde en parametrisering af niveaumængden.

¹Se Definition 7.15 i *Funktioner af en og flere variable*.

²Sætning 9.21 i *Funktioner af en og flere variable* giver dette resultat for funktioner af to variable, men det er helt det samme for funktioner af flere variable.

³Eller se Eksempel 9.18 i *funktioner af en og flere variable*.

3.1 Lagranges Metode

3.1.1 Sætning (Lagranges metode)

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde. Antag at $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert differentiable funktioner. Hvis $a = (a_1, \dots, a_n)$ er et lokalt ekstremumspunkt for funktionen f på niveaumængden $L_c(g) = \{x \in U \mid g(x) = c\}$ og hvis $\nabla g(a) \neq 0$ da findes et $\lambda \in \mathbb{R}$ så

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

Man kalder λ for den **Lagranske multiplikator**.

Bevis. Vi viser dette resultat ved at bruge sætningen om implicit givne funktioner Sætning 2.1.2.

Da $\nabla g(a) \neq 0$ vil mindst én af de partielt afledte $\frac{\partial g}{\partial x_j}(a), j = 1, \dots, n$ være forskellig fra nul. Der gør ingen forskel, hvilken der er forskellig fra nul, så vi antager for nemheds skyld, at

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0.$$

Det følger da fra Sætning 2.1.2, at vi kan finde en åben kugle $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ med centrum i (a_1, \dots, a_{n-1}) og en kontinuert differentiable funktion $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ så $h(a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n$ og

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) - c = 0.$$

Desuden ved vi ved implicit differentiation, at for $j = 1, \dots, n-1$ gælder

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))}. \quad (3.1)$$

Da funktionen f har et lokalt ekstremum i $a = (a_1, \dots, a_n)$ under bibetingelsen $g = c$, konkluderer vi, at der gælder, at funktionen

$$k(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

har et lokalt ekstremum i punktet (a_1, \dots, a_{n-1}) . Bemærk, at funktionen k er defineret på kuglen B og punktet (a_1, \dots, a_{n-1}) er et indre punkt i denne kugle. Derfor er der ikke længere nogen bibetingelse. Den er indbygget i funktionen h . Vi konkluderer derfor, at (a_1, \dots, a_{n-1}) er et kritisk punkt for k , d.v.s.

$$\nabla k(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0.$$

Ved brug af Kædereglen⁴ kan vi udtrykke de partielt afledte af k som

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

for $j = 1, \dots, n-1$. Da (a_1, \dots, a_{n-1}) er et kritisk punkt for k , finder vi derfor, at

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \frac{\partial h}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0, \quad (3.2)$$

hvor vi har udnyttet, at $a = (a_1, \dots, a_{n-1}, h(a_1, \dots, a_{n-1}))$.

Vi definerer nu

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)}. \quad (3.3)$$

Vi ser da ved indsættelse af (3.1) i (3.2), at

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j}(a),$$

for alle $j = 1, \dots, n-1$. Da denne ligning også gælder for $j = n$, hvor den jo er ækvivalent med definition (3.3) af λ , følger det ønskede resultat. \square

Ligningen $\nabla f = \lambda \nabla g$ udtrykker at de to gradienter ∇f og ∇g er parallelle. Da gradienterne er vinkelret på niveaumængder (se Sætning 1.2.14), kan det også udtrykkes ved, at niveaumængderne for f og g er tangentielle i ekstremalpunkter for f under en bibetingelse givet ved g .

Eksempel 3.1.1 Vi vender nu tilbage til problemet, om at finde max og min for $f(x, y) = 2xy$ på mængden $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$. Vi sætter $g(x, y) = x^2 + y^2$. Ifølge Lagranges metode er de mulige kandidater, de punkter (x, y) , som opfylder $g(x, y) = 4$ og hvor enten $\nabla g(x, y) = 0$ eller $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.

Da $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, er det klart, at $(0, 0)$ er det eneste punkt, hvor $\nabla g(x, y) = 0$. Da $(0, 0)$ ikke ligger i mængden $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$, er det nok at betragte løsninger til $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$. Da $\nabla f(x, y) = (2y, 2x)$ skal vi løse ligningerne

$$2y = \lambda 2x, \quad 2x = \lambda 2y, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Det er ikke altid nemt at løse de ligninger der fremkommer ved brug af Lagranges metode. Der er ikke en generel fremgangsmåde, man kan bruge i alle tilfælde. Man må prøve sig frem.

⁴Se *Funktioner af en og flere variable* Sætning 9.14.

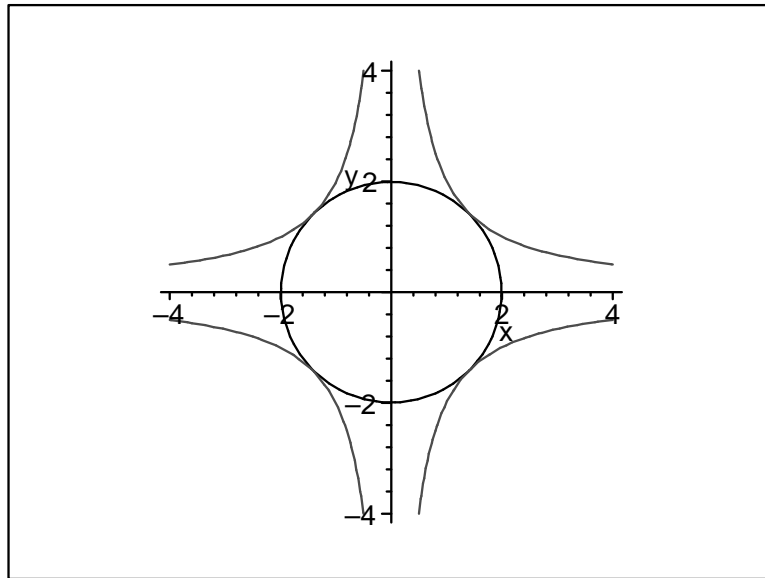
Her bemærker vi først, at hvis $x = 0$ så er $y = 0$ og omvendt, hvis $y = 0$ så er $x = 0$. Da $(x, y) = (0, 0)$ ikke er en mulig løsning, konkluderer vi, at hverken x eller y er 0 og derfor er $xy \neq 0$. Ved at multiplicere de to første ligninger, ser vi, at $4yx = \lambda^2 4yx$ og da $xy \neq 0$ må $\lambda = \pm 1$. De to første ligninger giver da $x = \pm y$. Fra den sidste ligning ser vi så, at $2x^2 = 4$ eller $x = \pm\sqrt{2}$. De mulige kandidatpunkter er derfor

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}). \quad (3.4)$$

De tilsvarende værdier er

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4, \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -4, \quad f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -4, \quad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4$$

I Figur 3.1 har vi vist kurven $x^2 + y^2 = 4$ samt niveaukurverne for f gennem punkterne i (3.4). Man ser at niveaukurverne for f (hyperblerne) er tangentielle til kurven svarende til bibetingelsen (cirklen).



Figur 3.1: Niveaukurver for $f(x, y) = 2xy$ og kurven $x^2 + y^2 = 4$

Man kan spørge sig selv om, hvad der sker, hvis der er flere bibetingelser? Altså hvis man skal finde ekstremumpunkter for en funktion f ikke kun under en, men flere bibetingelser $g_1 = c_1, \dots, g_m = c_m$. Svaret er, at man istedet for at få *en* ligning med blot *en* Lagransk multiplikator nu får følgende ligning med m Lagrangske multiplikatorer $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x).$$

Vi skal ikke komme mere ind på det her.

3.2 Opgaver til Kapitel 3

3.1 Opgave

For de følgende funktioner skal man finde lokale ekstremumpunkter under de givne bibetingelser og afgøre om der er tale om globale ekstremumpunkter (stadig givet bibetingelserne).

(a) $f(x, y, z) = x - 2y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2, \quad x + y + z = 1$

(c) $f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3.2 Opgave

(a) Vis at funktionen $f(x, y, z) = 2xy + z$ har en største- og en mindsteværdi på kuglen $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) Find største- og mindsteværdi for ekstremumsproblemet i (a).

3.3 Opgave

Find sidelængderne i den rektangulære kasse, hvor summen af sidelængderne er 10 og rumfanget er så stort som muligt.

3.4 Opgave

Find største- og mindsteværdi for funktionen $f(x, y) = x^2 + 2x - y^2$ på mængden $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.⁵

3.5 Opgave

Find største- og mindsteværdi for funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ på mængden $\{(x, y) \mid \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 1\}$.

3.6 Opgave

Find den korteste afstand fra mængden $\{(x, y, z) \mid x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\}$ til origo $(0, 0, 0)$.

⁵Sammenlign med opgave 374 (a) i *Funktioner af en og flere variable*.

Kapitel 4

Differentialligninger

4.1 Generelle betragtninger og sprogbrug

Differentialligninger dukker op i mange sammenhænge som beskrivelser af, hvordan et system udvikler sig i tidens løb. Specielt vigtige er anden ordens differentiaalligninger i fysik og teknik som følge af Newtons anden lov, der jo handler om acceleration, d.v.s. den anden afledte med hensyn til tiden.

En (sædvanlig) differentiaalligning er en ligning, hvor den ubekendte er en funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ af en variabel defineret på et åbent interval I . I den mest generelle type differentiaalligninger vi betragter, er den m 'te afledede $u^{(m)}$ af u udtrykt ved alle de lavere ordens afledede

$$u^{(m)}(t) = F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m-1)}(t)), \quad t \in I, \quad (4.1)$$

hvor I er et åbent interval og F er en generel funktion defineret på en mængde $I \times A$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Vi kalder en sådan ligning for en m 'te ordens (sædvanlig) differentiaalligning (på Engelsk kaldes den en Ordinary Differential Equation forkortet ODE). Man vil ofte betragte en sådan differentiaalligning sammen med såkaldte *begyndelsesbetingelser* i et punkt $t_0 \in I$. Begyndelsesbetingelserne er funktionsværdierne af $u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(m-1)}(t_0)$.

4.1.1 Definition (Et m 'te ordens begyndelsesværdiproblem)

Differentiaalligningen (4.1) sammen med angivelse af begyndelsesbetingelser $u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(m-1)}(t_0)$ kaldes et m 'te ordens begyndelsesværdiproblem.

I hele resten af dette kapitel er I et åbent interval på den reelle akse \mathbb{R} og t_0 er et fastholdt punkt i intervallet I .

Det relevante spørgsmål er, findes der løsninger og i givet fald hvor mange? Hvis der findes mindst en løsning, taler man om *eksistens* af løsninger. Hvis der findes højst en løsning (altså også slet ingen), taler man om *entydighed* af løsninger. Men der er forskellige typer af løsninger.

4.1.2 Definition (Lokale løsninger)

En funktion u defineret og m gange differentiabel på et åbent interval $I' \subseteq I$ kaldes en **lokal løsning** til differentiaalligningen (4.1), hvis den opfylder (4.1) for alle $t \in I'$. En lokal løsning behøver altså ikke opfylde ligningen på hele intervallet I .

4.1.3 Definition (Maksimale løsninger)

En funktion u defineret og m gange differentiabel på et åbent interval $I' \subseteq I$ kaldes en **maksimal løsning** til differentiaalligningen (4.1), hvis den opfylder (4.1) for alle $t \in I'$ og den ikke kan udvides til at være en løsning på et åbent interval I'' , som er strengt større end I' .

4.1.4 Definition (Globale løsninger)

En funktion u defineret og m gange differentiabel på hele intervallet I kaldes en **global løsning** til differentiaalligningen (4.1), hvis den opfylder (4.1) på hele I .

Vi nævner her uden bevis et generelt resultat om eksistens og entydighed af løsninger. Der findes endda endnu mere generelle versioner af denne sætning.

4.1.5 Sætning (Generel eksistens og éntydighedssætning)

Hvis funktionen F er kontinuert differentiabel^a i en åben kugle omkring punktet $(t_0, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in I \times A$, da findes et åbent interval omkring t_0 , så der i dette interval er en og kun en løsning u til (4.1), som opfylder

$$u(t_0) = v_0, \quad u'(t_0) = v_1, \dots, u^{(m-1)}(t_0) = v_{m-1}.$$

^aFunktionen F behøver kun at være kontinuert og kontinuert differentiabel i de sidste m variable.

4.1.6 Definition (Lineære differentiaalligninger)

Vi kalder ligningen (4.1) **lineær**, hvis funktionen F er på formen

$$F(t, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) = -a_{m-1}(t)v_{m-1} - \dots - a_1(t)v_1 - a_0(t)v_0 + f(t),$$

hvor a_0, a_1, \dots, a_{m-1} og f er funktioner på intervallet I . Med andre ord er differentiaalligningen på formen

$$u^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)u^{(m-1)}(t) + \dots + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = f(t). \quad (4.2)$$

Hvis funktionerne a_0, a_1, \dots, a_{m-1} er konstante, siger vi, at ligningen har **konstante koefficienter**. Hvis $f = 0$, siger vi, at ligningen er **homogen**. Hvis $f \neq 0$, siger vi, at ligningen er **inhomogen**.

For lineære ligninger er det nyttigt at bruge terminologien fra lineær algebra. Det komplekse vektorrum af alle komplekse funktioner defineret på intervallet I betegner vi med $\mathcal{F}(I)$; såvel de kontinuerte funktioner $\mathcal{C}(I)$ som de differentiable funktioner på I er underrum af $\mathcal{F}(I)$. Nulvektoren i vektorrummet $\mathcal{F}(I)$ er nulfunktionen, dvs den funktion, der er 0 i ethvert punkt af intervallet I ; nulfunktionen betegnes selvfølgelig 0. Hvis en funktion f i $\mathcal{F}(I)$ skrives som $f(t) = f_r(t) + if_i(t)$, hvor realdelen f_r og imaginærdelen f_i er reelle funktioner, da siges f , at være differentiable, hvis f_r og f_i er differentiable og vi skriver $f'(t) = f'_r(t) + if'_i(t)$.

Det overlades til læseren, at bevise følgende resultat om strukturen af løsninger til homogene ligninger.

4.1.7 Sætning (De homogene løsninger udgør et underrum)

Mængden af funktioner, der løser en homogen lineær ligning på hele intervallet I , er et underrum af $\mathcal{F}(I)$.

4.1.8 Sætning (Partikulær og generel løsning)

Hvis $u_1, u_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ er to løsninger til den inhomogene ligning (4.2), da vil $w = u_1 - u_2$ være en løsning til den tilsvarende homogene ligning. Omvendt hvis u er en løsning til (4.2) og w er en løsning til den tilsvarende homogene ligning da vil $u + w$ også være en løsning til (4.2). Vi får altså samtlige løsninger til (4.2) ved til en given løsning at lægge alle homogene løsninger. Vi siger, at den **generelle løsning** fremkommer ved til en **partikulær løsning** at addere alle **homogene løsninger**.

Bevis. Ses umiddelbart ved indsættelse. □

For første ordens ligninger, altså $m = 1$, vil vi betragte både lineære og ikke-lineære ligninger. De ikke-lineære vil være af den type, der kaldes *separable*. For første ordens ligninger vil vi også betragte lineære ligninger både med konstante og variable koefficienter.

For højere ordens ligninger, altså for $m > 1$, vil vi kun betragte lineære ligninger med *konstante* koefficienter.

Eksempel 4.1.1 (1. ordens lineær ligning med konstant koefficient) Vi betragter nu det simpleste eksempel på en lineær homogen første ordens differentiaalligning med konstant koefficient. Nemlig den velkendte ligning

$$u'(t) = au(t), \quad a \in \mathbb{R},$$

som har den generelle løsning $u(t) = C \exp(at)$, hvor C er en vilkårlig konstant.

Vi vil få brug for at løse denne ligning, også når a er kompleks, altså når $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bemærk at

$$w(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

er en løsning for

$$\begin{aligned} w'(t) &= \alpha e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + e^{\alpha t}(-\beta \sin(\beta t) + i\beta \cos(\beta t)) \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) = aw(t). \end{aligned}$$

Da $|w(t)| = e^{\alpha t}$, ser vi at $w(t) \neq 0$. Lad nu $u(t)$ være en anden løsning. Da vil

$$\frac{d}{dt}(u(t)/w(t)) = \frac{u'(t)w(t) - u(t)w'(t)}{w(t)^2} = \frac{au(t)w(t) - u(t)aw(t)}{w(t)^2} = 0.$$

Med andre ord er $u(t)/w(t)$ en konstant funktion og derfor er den generelle løsning på formen $u(t) = Cw(t)$, hvor C er en vilkårlig konstant.

Motiveret i dette eksempel definerer vi den komplekse eksponentialfunktion¹

4.1.9 Definition (Den komplekse eksponentialfunktion)

Hvis $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definerer vi

$$\exp(\alpha + i\beta) = e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i \sin(\beta)).$$

Den generelle løsning til ligningen $u'(t) = au(t)$, hvor $a \in \mathbb{C}$, kan da skrives $u(t) = C \exp(at)$, hvor C er en vilkårlig (kompleks) konstant.

Ved brug af den geometriske beskrivelse² af multiplikationen i \mathbb{C} , nemlig reglen

$$(\cos(\beta_1) + i \sin(\beta_1))(\cos(\beta_2) + i \sin(\beta_2)) = (\cos(\beta_1 + \beta_2) + i \sin(\beta_1 + \beta_2)),$$

ser man, at den sædvanlige regneregul

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2),$$

også holder for komplekse tal. Desuden ser man, at hvis r er modulus for det komplekse tal z og v er dets argument,³ vil $z = r \exp(iv) = re^{iv}$. Det overlades til læseren at vise, at hvis f, g er differentiable reelle funktioner, da vil

$$\frac{d}{dt} \exp(f(t) + ig(t)) = (f'(t) + ig'(t)) \exp(f(t) + ig(t)),$$

hvilket kan skrives $\frac{d}{dt} \exp(z(t)) = z'(t) \exp(z(t))$, hvor z er en differentiabel kompleks funktion.

¹Se også Afsnit 2.4 i *Funktioner af en og flere variable*

²Sætning 2.18 i *Funktioner af en og flere variable*.

³Se *Funktioner af en og flere variable* Definition 2.13.

4.2 Første ordens separable ligninger

4.2.1 Definition (Separable ligninger)

En **separabel** differentiaalligning er en første ordens ligning på formen

$$u'(t) = f(t)g(u(t)), \quad (4.3)$$

hvor f er en kontinuert funktion på et åbent interval I og g er en kontinuert funktion på et interval J .

4.2.2 Sætning (Eksistens og éntydighed for separable ligninger)

(i) Lad $t_0 \in I$ og $v_0 \in J$. Hvis $g(v_0) \neq 0$ findes der et $\varepsilon > 0$ således, at ligningen (4.3) har en og kun en løsning $u(t)$ defineret på intervallet $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, som opfylder $u(t_0) = v_0$. Funktionsværdien $u(t)$ er entydigt givet som løsningen til

$$\int_{v_0}^{u(t)} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{t_0}^t f(s) ds. \quad (4.4)$$

(ii) Hvis $g(v_0) = 0$ vil u givet ved $u(t) = v_0$ for alle $t \in I$, (altså den konstante funktion) være en løsning til (4.3), men der kan også være andre med $u(t_0) = v_0$. Hvis man antager, at g er kontinuert differentiabel i punktet v_0 , er der ikke andre.

Bevis. Tilfælde (i):

Da g er kontinuert, er $g(y) \neq 0$ for y nær v_0 og $1/g(y)$ er kontinuert nær v_0 . Betragt funktionen

$$G(t, y) = \int_{v_0}^y \frac{1}{g(y')} dy' - \int_{t_0}^t f(s) ds.$$

De partielt afledte for denne funktion er

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, y) = -f(t), \quad \frac{\partial G}{\partial y}(t, y) = \frac{1}{g(y)}.$$

Da disse funktioner er kontinuerte i en åben kugle omkring (t_0, v_0) er G kontinuert differentiabel i en sådan kugle.

Vi viser først at enhver løsning u til (4.3) med $u(t_0) = v_0$ er en løsning til (4.4), altså at $G(t, u(t)) = 0$.

Bemærk at en løsning u nødvendigvis er kontinuert differentiabel. Den er differentiabel per definition og differentialkvotienten er kontinuert, da den opfylder (4.3). Ved brug af Kædereglen får vi

$$\frac{d}{dt}G(t, u(t)) = \frac{\partial G}{\partial y}(t, u(t))u'(t) + \frac{\partial G}{\partial t}(t, u(t)) = \frac{1}{g(u(t))}u'(t) - f(t) = 0.$$

Altså er $G(t, u(t))$ konstant og derfor lig med $G(t_0, u(t_0)) = G(t_0, v_0) = 0$.

At (4.4) faktisk entydigt bestemmer en løsning $u(t)$ ses næsten nemmest ved, at benytte Sætning 2.1.2 om implicit givne funktioner (selvom det måske er at skyde spurve med kanoner). Funktionen $G(t, y)$ er kontinuert differentiabel i et åbent interval omkring (t_0, v_0) og

$$\partial_y G(t_0, v_0) = \frac{1}{g(v_0)} \neq 0.$$

Derfor vil ligningen $G(t, y) = 0$ entydigt bestemme y som en funktion $u(t)$ i nærheden af (t_0, v_0) . Ved implicit differentiation (se ligning (2.1)) får vi

$$u'(t) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial t}(t, u(t))}{\frac{\partial G}{\partial y}(t, u(t))} = f(t)g(u(t))$$

og $u(t)$ opfylder altså ligningen (4.3).

Tilfælde (ii):

At den konstante funktion er en løsning er klart da $u'(t) = 0$ og $g(u(t))f(t) = g(v_0)f(t) = 0$. At der kan være andre, kan ses af eksemplet:

$$g(y) = 2\sqrt{|y|}, \quad f(t) = 1.$$

Her vil både $u(t) = 0$ og $u(t) = t|t|$ være løsninger som opfylder $u(0) = 0$. Bemærk at hvis $u(t) = t|t|$ så er $u'(t) = 2|t|$.

Den sidste bemærkning følger fra den generelle eksistens og éntydhedssætning, Sætning 4.1.5 □

Denne sætning angiver en løsningsmetode for separable ligninger. Man kalder denne metode for *separation af de variable*.

Eksempel 4.2.1 (Den logistiske ligning)

En af de kendteste separable differentiaalligninger er den *logistiske ligning*

$$u'(t) = (a - u(t))(u(t) - b).$$

Den bruges, som model for populationsvækst i tilfælde, hvor vækstraten afhænger af populationsstørrelsen.

For at løse denne ligning ved separation af de variable skal man løse integralet

$$\int \frac{1}{(a-y)(y-b)} dy.$$

Hvis $a \neq b$ kan dette integral løses ved omskrivningen

$$\frac{1}{(a-y)(y-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{(a-y)} + \frac{1}{(y-b)} \right).$$

Man får da

$$\int \frac{1}{(a-y)(y-b)} dy = \frac{1}{a-b} (-\ln|a-y| + \ln|y-b|) = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{y-b}{y-a} \right|.$$

Vi finder derfor, at $u(t)$ er løsningen til

$$\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{u(t)-b}{u(t)-a} \right| = t + C,$$

for et vilkårligt C .

Med andre ord er

$$(u(t) - b) = -K \exp((a-b)t)(u(t) - a),$$

hvor $K = \pm \exp((a-b)C)$, igen blot er en vilkårlig konstant forskellig fra 0. Vi har altså fjernet numerisktegn ved at tillade, at K kan være både negativ og positiv. Vi løser denne ligning og får

$$u(t) = \frac{b + aK \exp((a-b)t)}{1 + K \exp((a-b)t)}.$$

Løsningen er vist i Figur 4.1, med $a = 2$, $b = 1$ og $K = 1/2$.

Den konstante løsning $u(t) = a$ kan opfattes som grænsetilfældende $K \rightarrow \pm\infty$. Den konstante løsning $u(t) = b$ svarer til $K = 0$.

Hvis $a = b$ skal man i stedet løse ligningen

$$\frac{1}{(u(t) - a)} = t + C,$$

altså

$$u(t) = a + (t + C)^{-1}.$$

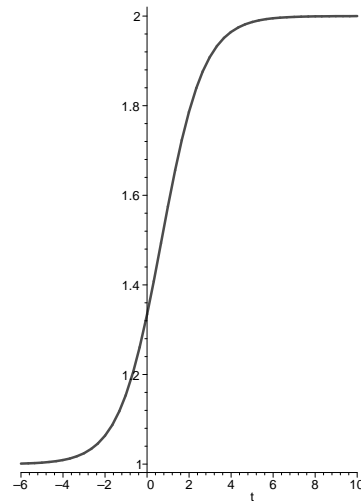
Eksempel 4.2.2 Vi betragter den separable differentiaalligning

$$u'(t) = u(t)^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

med begyndelsesbetingelsen $u(0) = 0$. Vi skal altså løse

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{1+y^2} dy = \int_0^t ds,$$

som giver $\arctan(u(t)) = t$, Vi har derfor løsningen $u(t) = \tan(t)$, defineret for $t \in]-\pi/2, \pi/2[$. Bemærk at denne løsning er *maksimal* men ikke *global*.



Figur 4.1: Løsning til den logistiske ligning med $a = 2$ og $b = 1$

4.3 Første ordens lineære ligninger

I en første ordens lineær differential ligning

$$u'(t) - a(t)u(t) = f(t) \quad (4.5)$$

er $a, f \in \mathcal{F}(I)$ kendte funktioner og $u = u(t)$ en ukendt funktion, som vi skal finde.

4.3.1 Sætning (Løsning til 1. ordens lineære homogene ligninger)

Lad $a \in \mathcal{C}(I)$ og definer

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds, \quad t \in I.$$

For enhver konstant $C \in \mathbb{C}$ er funktionen

$$I \ni t \rightarrow C \exp A(t)$$

en løsning til den homogene differentialligning

$$u'(t) - a(t)u(t) = 0, \quad (4.6)$$

og når C gennemløber \mathbb{C} , fås samtlige løsninger til (4.6).

Bemærk at $a(t)$ kan skrives entydig som $a(t) = a_R(t) + ia_I(t)$ hvor a_R og a_I er reelle kontinuerte funktioner defineret på I . Integralet $\int_{t_0}^t a(s)ds$ er naturligvis defineret ved $\int_{t_0}^t a(s)ds = \int_{t_0}^t a_R(s)ds + i \int_{t_0}^t a_I(s)ds$.

Eksempel 4.3.1 Lad os løse ligningen

$$u'(t) - tu(t) = 0, \quad t \in I. \quad (4.7)$$

Da

$$A(t) = \int_{t_0}^t s ds = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2$$

kan den generelle løsning til (4.7) skrives

$$u(t) = \tilde{C} e^{(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2)} = C e^{(\frac{1}{2}t^2)}$$

hvor C gennemløber \mathbb{C} .

4.3.2 Sætning (Løsning til 1. ordens lineære inhomogene ligninger)

Lad $a \in \mathcal{C}(I)$ og definer

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad t \in I.$$

Lad $f \in \mathcal{C}(I)$.

For enhver konstant $C \in \mathbb{C}$ er funktionen

$$u(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} f(s) ds + Ce^{A(t)}, \quad t \in I \quad (4.8)$$

en løsning til den inhomogene ligning (4.5), og når C gennemløber \mathbb{C} , fås samtlige løsninger til (4.5).

Vi ser den generelle løsningsstruktur: Hvis u_0 er en partikulær løsning til den inhomogene ligning (4.5), findes samtlige løsninger til (4.5) ved til u_0 at addere samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentilligning (4.6). Kan man løse den homogene ligning, behøver man altså blot at gætte en løsning til den inhomogene ligning (4.5) for at få den totale løsningsmængde til den. I Sætning 4.3.2 er

$$u_0(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} f(s) ds, \quad t \in I \quad (4.9)$$

et eksempel på en partikulær løsning til (4.5), medens $t \rightarrow Ce^{A(t)}$, $C \in \mathbb{C}$ udgør løsningerne til den tilsvarende homogene ligning (4.6).

Bevis for Sætningerne 4.3.1 og 4.3.2. Da Sætning 4.3.1 er et specialtilfælde af Sætning 4.3.2, nemlig det, hvor $f = 0$, kan vi nøjes med at vise Sætning 4.3.2.

Vi overlader det til læseren at checke, at (4.8) for enhver konstant $C \in \mathbb{C}$ definerer en løsning til (4.5). Dermed står det blot tilbage at vise, at enhver løsning kan skrives på formen (4.8). Lad u være en løsning til (4.5). Da $A'(t) = a(t)$ får vi, at

$$\frac{d}{dt} (e^{-A(t)} u)(t) = e^{-A(t)} u'(t) - e^{-A(t)} a(t) u(t) = e^{-A(t)} f(t) \quad (4.10)$$

Ved integration fås, at

$$e^{-A(t)} u(t) - e^{-A(t_0)} u(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)} f(s) ds \quad (4.11)$$

og derfra, at

$$u(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} f(s) ds + e^{-A(t_0)} u(t_0) e^{A(t)}, \quad (4.12)$$

hvoraf det fremgår, at u har den ønskede form med $C = e^{-A(t_0)} u(t_0) = u(t_0)$. \square

I løsningsformlen (4.8) indgår der en fri parameter, nemlig C . Som følgende Sætning 4.3.3 viser, betyder det, at man kan foreskrive værdien af løsningen u i t_0 lige som man vil.

4.3.3 Sætning (Eksistens- og éntydhedssætningen)

Lad $a, f \in \mathcal{C}(I)$. Givet $v_0 \in \mathbb{C}$ findes der netop én løsning u til (4.5) defineret på I , så $u(t_0) = v_0$.

Bevis. Man ser, at løsningen (4.8) opfylder $u(t_0) = Ce^{A(t_0)} = C$, hvilket vi også netop har konkluderet i beviset for Sætning 4.3.2. Den eneste løsning der opfylder betingelsen $u(t_0) = v_0$ er derfor den, hvor $C = v_0$. \square

Bemærk specielt at løsningen til den 1. ordens lineære ligning er en *global* løsning. Den er defineret på hele I .

Eksempel 4.3.2 Lad os finde den løsning til ligningen

$$u'(t) - tu(t) = f(t) \quad (4.13)$$

der opfylder at $u(t_0) = 0$. Fra Eksempel 4.3.1 ved vi at

$$A(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2.$$

Den generelle løsning til (4.13) er

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2)} \int_{t_0}^t e^{(-\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}t_0^2)} f(s) ds + Ce^{\frac{1}{2}t^2} \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{2}s^2} f(s) ds + Ce^{\frac{1}{2}t^2}. \end{aligned}$$

Det ses nu let at

$$u(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{2}s^2} f(s) ds \quad (4.14)$$

er løsningen til (4.13) med begyndelsesbetingelsen $u(t_0) = 0$.

Hvis $f(t)$ er givet kan man angive løsningen mere præcist ved at løse integralet i (4.14). Sværhedsgraden af denne opgave afhænger af hvordan $f(t)$ ser ud.

Et interessant og vigtigt specialtilfælde indtræffer i (4.5), hvis funktionen a er konstant, altså når vi har en konstant koefficient. Vi får i det tilfælde følgende korollar af Sætning 4.3.2 ovenfor.

4.3.4 Korollar (1. ordens lineær ligning med konstant koefficient)

Lad $f \in \mathcal{C}(I)$. For enhver konstant $C \in \mathbb{C}$ er funktionen

$$u(t) = e^{\lambda t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda s} f(s) ds + Ce^{\lambda t}, \quad t \in I \quad (4.15)$$

en løsning til differentiallygningen

$$u' - \lambda u = f$$

og når C gennemløber \mathbb{C} , fås samtlige løsninger til differentiallygningen.

4.4 Anden og højere ordens lineære ligninger med konstante koefficienter

For anden og højere ordens ligninger kan vi kun finde generelle løsningsformler for lineære ligninger med konstante koefficienter. Det er derfor de eneste tilfælde, vi betragter her:

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = f(t), \quad (4.16)$$

hvor $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ og f er en kontinuert funktion på I .

4.4.1 Sætning (Løsning til 2. ordens homogen ligning)

Mængden af løsninger til den homogene differentiaalligning

$$u'' + a_1u' + a_0u = 0, \text{ hvor } a_0, a_1 \in \mathbb{C}, \quad (4.17)$$

kan, idet $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ betegner rødderne i differentiaalligningens **karakteristiske polynomium**

$$z^2 + a_1z + a_0, \quad (4.18)$$

beskrives som følger:

1. tilfælde. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. For ethvert par C_1, C_2 af komplekse tal er funktionen

$$u(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \quad t \in I \quad (4.19)$$

en løsning til (4.17), og enhver løsning til (4.17) har denne form for passende $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

2. tilfælde. $\lambda_1 = \lambda_2$. For ethvert par C_1, C_2 af komplekse tal er funktionen

$$u(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2te^{\lambda_1 t}, \quad t \in I \quad (4.20)$$

en løsning til (4.17), og enhver løsning til (4.17) har denne form for passende $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Bevis. Vi bemærker, at $\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1$ og $\lambda_1\lambda_2 = a_0$, idet λ_1 og λ_2 jo er rødderne i anden grads polynomiet $z^2 + a_1z + a_0$.

1. tilfælde ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). At udtrykket (4.19) definerer en løsning til (4.17), overlader vi det til læseren at vise. Vi mangler dermed blot at demonstrere, at enhver løsning til (4.17) kan skrives på formen (4.19). Lad u være en løsning til (4.17) og definer funktionen $U = \frac{du}{dt} - \lambda_2 u$. Da er

$$\frac{dU}{dt} - \lambda_1 U = \frac{d^2u}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{du}{dt} + \lambda_1\lambda_2 u = u'' + a_1u' + a_0u = 0. \quad (4.21)$$

Fra Korollar 4.3.4 (med $\lambda = \lambda_1$ og $f = 0$ som højre side) ved vi, at der findes en konstant $\alpha \in \mathbb{C}$, så

$$U(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}, \quad t \in I. \quad (4.22)$$

Da $U = \frac{du}{dt} - \lambda_2 u$, kan vi se, at u er en løsning til den inhomogene differentiaalligning fra Korollar 4.3.4 (med $\lambda = \lambda_2$ og med $f(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}$ som højre side). Ifølge Korollaret findes der en konstant $\beta \in \mathbb{C}$, så

$$u(t) = e^{\lambda_2 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_2 s} (\alpha e^{\lambda_1 s}) ds + \beta e^{\lambda_2 t} = \alpha e^{\lambda_2 t} \int_{t_0}^t e^{(\lambda_1 - \lambda_2)s} ds + \beta e^{\lambda_2 t}. \quad (4.23)$$

I det tilfælde, som vi arbejder med for øjeblikket, er $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (pr antagelse), så vi kan udregne integralet på følgende måde:

$$u(t) = \alpha e^{\lambda_2 t} \left[\frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)s}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]_{t_0}^t + \beta e^{\lambda_2 t} = \frac{\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \left(\beta - \alpha \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) e^{\lambda_2 t}, \quad (4.24)$$

hvoraf ses, at løsningen u har den ønskede form (4.19) med konstanterne

$$C_1 = \frac{\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ og } C_2 = \beta - \alpha \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_0}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (4.25)$$

2. tilfælde ($\lambda_1 = \lambda_2$). Når man indsætter udtrykket (4.20) i ligning (4.17) får man, at

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = C_2 \exp(\lambda_1 t) (a_1 + 2\lambda_1) = 0.$$

Den sidste lighed følger af, at vi har en dobbeltrod og derfor $a_1 = -2\lambda_1$. Resten af dette tilfælde behandles præcis som det foregående frem til og med udtrykket (4.23) for løsningen u . Fra dette punkt adskiller regningerne sig. I tilfældet her fås

$$u(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^t e^0 ds + \beta e^{\lambda_1 t} = \alpha e^{\lambda_1 t} (t - t_0) + \beta e^{\lambda_1 t} = (\beta - \alpha t_0) e^{\lambda_1 t} + \alpha t e^{\lambda_1 t}, \quad (4.26)$$

hvoraf vi ser, at løsningen u har den ønskede form (4.20) med konstanterne

$$C_1 = \beta - \alpha t_0 \text{ og } C_2 = \alpha. \quad (4.27)$$

□

Eksempel 4.4.1 Lad os løse den homogene differentiaalligning

$$u'' + 4u' + 5u = 0. \quad (4.28)$$

Rødderne i det karakteristiske polynomium $z^2 + 4z + 5$ er $z = -2 \pm i$ og den generelle løsning til (4.28) er da givet ved

$$\begin{aligned} u(t) &= \tilde{C}_1 e^{(-2+i)t} + \tilde{C}_2 e^{(-2-i)t} \\ &= \tilde{C}_1 e^{-2t} (\cos t + i \sin t) + \tilde{C}_2 e^{-2t} (\cos t - i \sin t) \\ &= C_1 e^{-2t} \cos t + C_2 e^{-2t} \sin t \end{aligned}$$

hvor C_1 og C_2 gennemløber \mathbb{C} .

Ved induktion efter differentiaalligningens orden kan man vise følgende generalisation af Sætning 4.4.1:

4.4.2 Sætning (Lineære n . ordens homogene ligninger)

Betragt den homogene differentiaalligning

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = 0, \quad (4.29)$$

hvor $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ er konstanter. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ være rødderne i differentiaalligningens **karakteristiske polynomium**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

og lad $n_1, n_2, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ betegne røddernes multiplicitet.

En basis for vektorrummet af de n gange differentiable funktioner $u \in \mathcal{F}(I)$, der opfylder den homogene differentiaalligning (4.29) udgøres af følgende funktioner:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ t &\rightarrow e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ &\quad \vdots \\ t &\rightarrow e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \dots, t^{n_s-1}e^{\lambda_s t}. \end{aligned}$$

Hvis polynomiet $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ har n forskellige rødder $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$, så udgør de n funktioner

$$t \rightarrow e^{\lambda_1 t}, t \rightarrow e^{\lambda_2 t}, \dots, t \rightarrow e^{\lambda_s t}$$

en basis for løsningsrummet.

Lad os i resten af dette afsnit holde os til anden ordens ligninger.

Løsningsrecepten for anden ordens lineære differentiaalligninger er som tidligere beskrevet: Find en løsning u_0 til den inhomogene ligning. Samtlige løsninger fås ved til den partikulære løsning u_0 at addere samtlige løsninger til den tilsvarende homogene differentiaalligning. Ved hjælp af Sætning 4.4.1 er den homogene ligning nem at løse (husk at vi antager, at a_0 og a_1 er konstanter). Vi behøver altså "blot" at gætte en løsning til den inhomogene ligning for at få den totale løsningsmængde.

Ved at følge fremgangsmåden i beviset for Sætning 4.4.1, kan man løse den inhomogene ligning (4.16). Vi giver resultatet i den næste sætning.

4.4.3 Sætning (Løsnings til 2. ordens lineær inhomogen ligning)

Lad $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ være rødderne i det karakteristiske polynomium (4.18) for den homogene ligning svarende til differentialligningen (4.16). En partikulær løsning u_0 til (4.16) kan angives som følger:

1. tilfælde. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Da er

$$u_0(t) = \int_{t_0}^t \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s) ds, \quad t \in I \quad (4.30)$$

en løsning til (4.16).

2. tilfælde. $\lambda_1 = \lambda_2$. Da er

$$u_0(t) = \int_{t_0}^t e^{\lambda_1(t-s)} (t-s) f(s) ds \quad (4.31)$$

en løsning til (4.16).

Bevis. 1. tilfælde. Vi checker, at u_0 virkelig er en løsning. Hvis vi omskriver

$$u_0(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_1 s} f(s) ds - e^{\lambda_2 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_2 s} f(s) ds}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

ser man ved brug af produktreglen for differentiation og Analysens Fundamentalsætning,⁴ at

$$\begin{aligned} u_0'(t) &= \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_1 s} f(s) ds + f(t) - \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_2 s} f(s) ds - f(t)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_1 s} f(s) ds - \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_2 s} f(s) ds}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ u_0''(t) &= \frac{\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_1 s} f(s) ds - \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_2 s} f(s) ds}{\lambda_1 - \lambda_2} + f(t). \end{aligned}$$

Da λ_1 og λ_2 er rødder i det karakteristiske polynomium, følger det umiddelbart, at u_0 er en løsning til (4.16).

2. tilfælde. Vi udregner igen

$$\begin{aligned} u_0'(t) &= \int_{t_0}^t e^{\lambda_1(t-s)} f(s) ds + \int_{t_0}^t \lambda_1 e^{\lambda_1(t-s)} (t-s) f(s) ds \\ u_0''(t) &= 2 \int_{t_0}^t \lambda_1 e^{\lambda_1(t-s)} f(s) ds + \int_{t_0}^t \lambda_1^2 e^{\lambda_1(t-s)} (t-s) f(s) ds + f(t). \end{aligned}$$

⁴Funktioner af en og flere variable, Sætning 8.15

Da λ_1 er dobbeltrod i det karakteristiske polynomium, gælder der, at $a_1 = -2\lambda_1$. Man ser derfor ved indsættelse i (4.16), at u_0 er en løsning. \square

I formelen for den generelle løsning af (4.16) indgår der to frie parametre, nemlig C_1 og C_2 . Som følgende sætning viser, betyder det, at man kan foreskrive værdien af løsningen u og dens afledede u' i t_0 lige som man vil.

4.4.4 Sætning (Eksistens- og éntydhedsætningen)

Lad $f \in \mathcal{C}(I)$. Givet $v_0, v_1 \in \mathbb{C}$ findes der netop én løsning u til den inhomogene differentiaalligning (4.16), så $u(t_0) = v_0$ og $u'(t_0) = v_1$.

Bevis. Vi ved fra Sætning 4.4.3, at der findes en løsning u_0 til det inhomogene problem. Vi skal derfor blot vise, at der findes en éntydig homogen løsning u_h med $u_h(t_0) = v_0 - u_0(t_0)$ og $u'_h(t_0) = v_1 - u'_0(t_0)$.

Vi betragter først tilfældet hvor rødderne λ_1 og λ_2 er forskellige. Fra ligning (4.19) ser vi, at vi skal konkludere, at der er et og kun et sæt løsninger C_1, C_2 til ligningerne

$$\begin{aligned} C_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 e^{\lambda_2 t_0} &= v_0 - u_0(t_0) \\ C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} &= v_1 - u'_0(t_0). \end{aligned}$$

Det følger af at determinanten til koefficientmatricen ikke er nul:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & e^{\lambda_2 t_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_0} \neq 0.$$

I tilfældet, hvor $\lambda_1 = \lambda_2$ skal vi tilsvarende checke, at

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & t_0 e^{\lambda_1 t_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} & (\lambda_1 t_0 + 1) e^{\lambda_1 t_0} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 t_0} \neq 0.$$

\square

Bemærk igen at løsningen er *global*.

4.4.5 Gættemetoden (ukendte koefficienters metode)

Sætning 4.4.3 given en opskrift på, hvordan man finder en partikulær løsning, som i princippet virker hver gang. Men integralet der indgår i formelen, kan faktisk volde en del besvær. Hvis højresiden af (4.16) er tilpas pæn (hvad der menes med det specificeres nedenfor) kan man bruge en anden opskrift, som vi kalder **gættemetoden**. Betragt en inhomogen differentiaalligning

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = f, \tag{4.32}$$

hvor f er en funktion af typen

$$\begin{aligned}
 f(t) &= C_{11}e^{\gamma_1 t} + C_{12}te^{\gamma_1 t} + \dots + C_{1n_1}t^{n_1-1}e^{\gamma_1 t} \\
 &+ C_{21}e^{\gamma_2 t} + C_{22}te^{\gamma_2 t} + \dots + C_{2n_2}t^{n_2-1}e^{\gamma_2 t} \\
 &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 &\cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 &+ C_{s1}e^{\gamma_s t} + C_{s2}te^{\gamma_s t} + \dots + C_{sn_s}t^{n_s-1}e^{\gamma_s t}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

F.eks kan f være 1) et polynomium i t , 2) en eksponentialfunktion $ce^{\alpha t}$, 3) et trigonometrisk udtryk $c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t$ eller 4) et udtryk dannet ved addition eller multiplikation af sådanne funktioner. Differentialkvotienten af f er af samme type som f selv, og det er derfor i dette tilfælde ofte muligt at bestemme en partikulær løsning u_0 direkte ved i (4.32) at indsætte en funktion af samme type som f selv, men hvor de enkelte led er forsynet med ubekendte koefficienter. Hvis der er led i f som løser den til (4.32) svarende homogene ligning

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0 \tag{4.34}$$

skal disse led “en eller to grader op” i udtrykket for u_0 . Rent praktisk er fremgangsmåden som følger:

Skriv $f(t)$ op på formen (4.33). Derved fremkommer en række komplekse tal, $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, med “multipliciteter” n_s . For hver $j = 1, \dots, s$ definerer vi nu funktionen f_j på følgende måde;

- Hvis γ_j ikke er en rod i det karakteristiske polynomium for (4.34), da er

$$f_j(t) = K_{j1}e^{\gamma_j t} + K_{j2}te^{\gamma_j t} + \dots + K_{jn_j}t^{n_j-1}e^{\gamma_j t},$$

hvor koefficienterne K_{ji} betragtes som ubekendte.

- Hvis γ_j er en simpel rod i det karakteristiske polynomium for (4.34), da er

$$f_j(t) = K_{j2}te^{\gamma_j t} + \dots + K_{j(n_j+1)}t^{n_j}e^{\gamma_j t}.$$

- Hvis γ_j er en dobbelt rod i det karakteristiske polynomium for (4.34), da er

$$f_j(t) = K_{j3}t^2e^{\gamma_j t} + \dots + K_{j(n_j+2)}t^{n_j+1}e^{\gamma_j t}.$$

Nu gætter vi at $u_0 = f_1 + f_2 + \dots + f_s$ og koefficienterne K_{ji} bestemmes ved at indsætte u_0 i (4.32). Den generelle løsning til (4.32) er givet ved $u = u_h + u_0$, hvor u_h er den generelle løsning til (4.34).

Bemærk at man skal ændre sit gæt, når γ_j er rod i det karakteristiske polynomium, altså når der er led i funktionen f , der løser den homogene ligning. At løsningen til ligningen er anderledes i disse tilfælde kaldes ofte et *resonansfænomen*.

Ovenstående opskrift kan måske virke lidt mystisk, så lad os afslutte dette kapitel med at regne nogle eksempler, der illustrerer metoden.

Eksempel 4.4.2 Lad os løse begyndelsesværdiproblemet

$$u'' + 4u' + 5u = e^{-t}, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -3/2. \quad (4.35)$$

Den til (4.35) svarende homogene ligning blev allerede løst i Eksempel 4.4.1, så vi skal blot finde en partikulær løsning til (4.35). Da højresiden er af typen (4.33) med $\gamma_1 = -1$, $n_s = 1$ og $s = 1$, kan vi bruge gættemetoden. Da γ_1 ikke er rod i det karakteristiske polynomium for (4.28), gætter vi at

$$u_0(t) = Ke^{-t}. \quad (4.36)$$

Vi sætter nu u_0 ind i (4.35) og får

$$Ke^{-t} - 4Ke^{-t} + 5Ke^{-t} = e^{-t}.$$

Løser vi for K får vi at $K = \frac{1}{2}$ og den generelle løsning til (4.35) er altså

$$u(t) = C_1 e^{-2t} \cos t + C_2 e^{-2t} \sin t + \frac{1}{2} e^{-t}.$$

Vi bestemmer nu C_1, C_2 så $u(0) = 1$ og $u'(0) = -3/2$. Ved indsættelse ovenfor finder vi, at

$$\begin{aligned} 1 &= u(0) = C_1 + \frac{1}{2} \\ -3/2 &= u'(0) = -2C_1 + C_2 - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

hvilket giver løsningerne $C_1 = 1/2$ og $C_2 = 0$. Altså $u(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-t}$.

Eksempel 4.4.3 Lad os finde den generelle løsning til

$$u'' - 2u' + 2u = 2. \quad (4.37)$$

Rødderne i det karakteristiske polynomium $z^2 - 2z + 2$ for den til (4.37) svarende homogene ligning

$$u'' - 2u' + 2u = 0 \quad (4.38)$$

er $1 \pm i$. Den generelle løsning til (4.38) er derfor givet ved

$$\begin{aligned} u_h &= \tilde{C}_1 e^{(1+i)t} + \tilde{C}_2 e^{(1-i)t} \\ &= \tilde{C}_1 e^t (\cos t + i \sin t) + \tilde{C}_2 e^t (\cos t - i \sin t) \\ &= C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t. \end{aligned}$$

Højresiden af (4.37) er af typen (4.33); $f(t) = 2 = 2e^{0t}$, med $\gamma_1 = 0$, $n_1 = 1$ og $s = 1$. Da γ_1 ikke er rod i det karakteristiske polynomium for (4.38), gætter vi at

$$u_0(t) = K. \quad (4.39)$$

Vi sætter nu u_0 ind i (4.37) og får

$$0 - 0 + 2K = 2.$$

Det vil sige at $K = 1$ og den generelle løsning er altså

$$u(t) = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t + 1.$$

Eksempel 4.4.4 Lad os løse ligningen

$$u'' + u = \cos t. \quad (4.40)$$

Rødderne i det karakteristiske polynomium $z^2 + 1$ for den til (4.40) svarende homogene ligning

$$u'' + u = 0 \quad (4.41)$$

er $\pm i$. Den generelle løsning til (4.41) er derfor givet ved

$$\begin{aligned} u_h &= \tilde{C}_1 e^{it} + \tilde{C}_2 e^{-it} \\ &= \tilde{C}_1 (\cos t + i \sin t) + \tilde{C}_2 (\cos t - i \sin t) \\ &= C_1 \cos t + C_2 \sin t. \end{aligned}$$

Højresiden af (4.40) er af typen (4.33); $f(t) = \cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$, med $\gamma_1 = i$, $n_1 = 1$, $\gamma_2 = -i$, $n_2 = 1$ og $s = 2$. Da γ_1 og γ_2 begge er simple rødder i det karakteristiske polynomium for (4.41), gætter vi at

$$u_0(t) = K_{12} t e^{it} + K_{22} t e^{-it}. \quad (4.42)$$

Sætter vi nu u_0 ind i (4.40), får vi at

$$2i(K_{12} e^{it} - K_{22} e^{-it}) = \cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it},$$

hvoraf følger at

$$2iK_{12} = \frac{1}{2} \text{ og } -2iK_{22} = \frac{1}{2}$$

det vil sige at

$$K_{12} = -\frac{i}{4} \text{ og } K_{22} = \frac{i}{4}.$$

Den generelle løsning til (4.40) er

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{i}{4} t e^{it} + \frac{i}{4} t e^{-it} \\ &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t. \end{aligned}$$

Vi ser resonansfænomenet, at udsvingene i $u(t)$ vokser med t .

Eksempel 4.4.5 Lad os løse ligningerne

$$u'' - 2u' + u = e^t \quad (4.43)$$

og

$$u'' - 2u' + u = te^t. \quad (4.44)$$

Det karakteristiske polynomium $z^2 - 2z + 1$ for den til (4.43) og (4.44) svarende homogene ligning

$$u'' - 2u' + u = 0 \quad (4.45)$$

har dobbeltroden 1. Den generelle løsning til (4.45) er derfor givet ved

$$u_h = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

Højresiden af (4.43) er af typen (4.33); $f(t) = e^t$, med $\gamma_1 = 1$, $n_1 = 1$ og $s = 1$. Da γ_1 er en dobbelt rod i det karakteristiske polynomium for (4.45), gætter vi at

$$u_0(t) = K_{13} t^2 e^t \quad (4.46)$$

er en løsning til (4.43). Sætter vi nu u_0 ind i (4.43), får vi at

$$2K_{13} e^t = e^t,$$

hvoraf følger at $K_{13} = \frac{1}{2}$. Den generelle løsning til (4.43) er altså

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t.$$

Højresiden af (4.44) er af typen (4.33); $f(t) = te^t$, med $\gamma_1 = 1$, $n_1 = 2$ og $s = 1$. Da γ_1 er en dobbelt rod i det karakteristiske polynomium for (4.45), gætter vi at

$$u_0(t) = K_{13} t^2 e^t + K_{14} t^3 e^t \quad (4.47)$$

er en løsning til (4.44). Sætter vi nu u_0 ind i (4.44), får vi at

$$2K_{13} e^t + 6K_{14} t e^t = te^t,$$

hvoraf følger at $K_{13} = 0$ og $K_{14} = \frac{1}{6}$. Den generelle løsning til (4.44) er altså

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t.$$

4.5 Opgaver til Kapitel 4

4.1 Opgave

Find samtlige maksimale løsninger til følgende differentialligninger og bestem i hvert tilfælde om de er globale løsninger. Tegn graferne for løsningerne.

(a) $u'(t) = t + tu(t)^2, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $u'(t) = \sqrt{u(t)}, \quad t > 0, \quad u(t) \geq 0$

(c) $u'(t) = t \exp(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}$

4.2 Opgave

Find samtlige løsninger til differentialligningerne

(a) $u'(t) + 3tu(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $u'(t) + \frac{1}{t}u(t) = 1, \quad t > 0$

(c) $u'(t) + \frac{1}{t}u(t) = \sin(t), \quad t > 0$

4.3 Opgave

Lad $\lambda \in \mathbb{C}$. Find samtlige løsninger til den homogene differentialligning $u'' - \lambda^2 u = 0$. Hvad får du i specialtilfældene $\lambda = 1$ og $\lambda = i$?

4.4 Opgave

Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = 0.$$

Bestem den løsning, som opfylder $u(0) = 1, u'(0) = -1$.

4.5 Opgave

Find den generelle løsning til hver af de inhomogene differentialligninger

$$u'' - u = \cos t$$

og

$$u'' - u = \sin t.$$

4.6 Opgave

Find den generelle løsning til hver af de inhomogene differentiaalligninger

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + 2u = 2t^2 + 3$$

og

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + 2u = e^t.$$

4.7 Opgave

Find den generelle løsning til den inhomogene differentiaalligning

$$u'' - 6u' + 9u = e^{3t}(t - 2).$$

4.8 Opgave

Find den løsning til

$$u'' - 2u' + 5u = \sin t$$

som opfylder begyndelsesbetingelserne $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$.

4.9 Opgave

Find den løsning til

$$u'' - 2u' - 8u = 6 - 8t$$

som opfylder begyndelsesbetingelserne $u(1) = 0$, $u'(1) = 1$.

4.10 Opgave

a) Vis at når $\nu \neq 1$, så er løsningen til **begyndelsesværdiproblemet**

$$u'' + u = \sin \nu t, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0 \tag{4.48}$$

givet ved

$$u_\nu(t) = -\frac{\nu}{1-\nu^2} \sin t + \cos t + \frac{1}{1-\nu^2} \sin \nu t.$$

b) Vis at når $\nu = 1$, så er løsningen af (4.48) givet ved

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \sin t + \cos t - \frac{t}{2} \cos t.$$

c) Vis at $\lim_{\nu \rightarrow 1} u_\nu(t) = u_1(t)$ for alle t .

Kapitel 5

Taylors formel, Taylorrækker og potensrækker

5.1 Taylorpolynomier

Lad f være en reel funktion af én reel variabel. I det følgende antager vi, at alle de afledede af f , som vi støder på, findes og er kontinuerte. Vi ved at tangenten til grafen $y = f(x)$ i punktet a er den rette linie (eller grafen af et førstegradspolynomium om man vil), som er den bedste tilnærmelse til grafen for f i nærheden af a . Er vi tilstrækkelig tæt på a , er grafen for f og tangenten meget tæt på hinanden. Dette er selvfølgelig fordi, grafen for f og tangenten har samme funktionsværdi og første afledede i punktet a . Hvis vi i nærheden af a skal forsøge at tilnærme grafen for f med grafen for et andengradspolynomium, vil det være oplagt at lede efter det andengradspolynomium, som har samme funktionsværdi, første og anden afledede i punktet a som f selv. Et andengradspolynomium kan skrives på formen

$$g(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2,$$

hvor c_0 og c_1 er konstanter. Det er nok ikke den form I typisk har set andengradspolynomier på, men det skal i det følgende vise sig at være den mest praktiske. Vi ser umiddelbart at

$$g(a) = c_0, \quad g'(a) = c_1, \quad g''(a) = 2c_2,$$

hvoraf følger at

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Grafen for andengrads polynomiet

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

er altså dén “andengradskurve”, som tilnærmer sig grafen for f bedst i nærheden af a .

Idéen er let at generalisere. Det polynomium af grad n , som passer bedst til grafen for f i nærheden af a , må være det, som har samme funktionsværdi og samme første n afledede i punktet a . Da et polynomium af grad n kan skrives på formen

$$h(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

skal vi blot bestemme koefficienterne $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$. Bemærk at vi bruger notationen $f^{(k)}$ for den k -te afledede af f . Med $f^{(0)}$ menes f selv. Man ser let at

$$h(a) = f(a), \quad h'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad h^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

præcis når

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad \dots, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

5.1.1 Definition (Taylorpolynomium)

Antag at f er en reel funktion af én reel variabel, der er n gange differentiabel i punktet a . Polynomiet

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

kaldes for **Taylorpolynomiet** for f af grad n i punktet a .

Vores udregning ovenfor viser så følgende resultat.

5.1.2 Sætning (Karakterisering af Taylorpolynomium)

Antag at f er n gange differentiabel i punktet a . Da er Taylorpolynomiet $T_n f$ det eneste polynomium af grad mindre end eller lig med n , som har samme funktionsværdi og de samme n første afledede som f i punktet a .

Eksempel 5.1.1 (Taylorpolynomium for \exp)

Lad os finde Taylorpolynomiet af grad n for funktionen $\exp(x) = e^x$ i punktet 0. Differentierer vi $f(x) = e^x$, får vi, at $f^{(k)}(x) = e^x$ for alle k . Derfor er $f^{(k)}(0) = 1$ for alle n , og Taylorpolynomiet ser ud som følger.

$$T_n \exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x - 0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

eller mere konkret

$$T_n \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Eksempel 5.1.2 (Taylorpolynomium for sin og cos) Lad os finde Taylorpolynomierne for sin og cos i punktet 0. Differentierer vi $f(x) = \sin x$, får vi

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Vi er nu tilbage ved udgangspunktet og de afledede begynder at gentage sig selv. Sætter vi $x = 0$ ind, får vi

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1$$

og dette mønster vil gentage sig selv; hveranden afledede er nul og de andre veksler mellem 1 og -1 . Mere formelt skriver vi

$$f^{(2k)}(0) = 0 \text{ for } k = 0, 1, \dots$$

og

$$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k+1} \text{ for } k = 1, 2, \dots$$

Da $T_{2n} \sin(x) = T_{2n-1} \sin(x)$ kan vi nøjes med at skrive de lige Taylorpolynomier op;

$$T_{2n} \sin(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

eller mere konkret

$$T_{2n} \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

En helt tilsvarende udregning for cos giver

$$T_{2n} \cos(x) = T_{2n+1} \cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Eksempel 5.1.3 (Taylorpolynomium for ln) Lad os finde Taylorpolynomiet til $f(x) = \ln x$ i punktet $x = 1$. For $n \geq 1$ ses ved induktion, at den n 'te afledede af f er givet ved

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}.$$

Sætter vi $x = 1$ ind, får vi, at $f(1) = 0$ og

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

for $n \geq 1$. Dette giver

$$\begin{aligned} T_n \ln(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = 0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Når vi bruger Taylorpolynomiet som en tilnærmelse til en funktion, er det vigtigt at vide, hvor stor en fejl vi gør, når vi erstatter f med $T_n f$. Vi vil altså gerne vide noget om *restleddet* $R_n f = f - T_n f$.

5.1.3 Sætning (Taylors formel med restled)

Antag at f og dens $n + 1$ første afledede er kontinuerte på et åbent interval I . Hvis $a, b \in I$ gælder, at

$$f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt, \quad (5.1)$$

hvor T_n er Taylorpolynomiet til f i punktet a .

Bevis. Vi bruger induktion. For det første ved vi fra analysens fundamental sætning, at

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt. \quad (5.2)$$

Delvis (partiel) integration og udnyttelse af at $\frac{d}{dt}(t-b) = 1$ giver at

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t) dt &= \int_a^b f'(t) \frac{d}{dt}(t-b) dt = [f'(t)(t-b)]_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b) dt \\ &= f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt. \end{aligned}$$

Indsætter vi dette i (5.2), får vi at

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt.$$

Formel (5.1) holder altså for $n = 1$. Lad os nu antage at (5.1) holder for $n = k$;

$$f(b) = T_k f(b) + \frac{1}{k!} \int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k dt.$$

Delvis integration og udnyttelse af at $\frac{d}{dt} \frac{(-1)}{k+1} (b-t)^{k+1} = (b-t)^k$ giver at

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k dt &= \int_a^b f^{(k+1)}(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{(-1)}{k+1} (b-t)^{k+1} \right) dt \\ &= \left[f^{(k+1)}(t) \cdot \frac{(-1)}{k+1} (b-t)^{k+1} \right]_a^b - \int_a^b f^{(k+2)}(t) \frac{(-1)}{k+1} (b-t)^{k+1} dt \\ &= \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(a)(b-a)^{k+1} + \frac{1}{k+1} \int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1} dt, \end{aligned}$$

hvilket giver at

$$f(b) = T_{k+1}f(b) + \frac{1}{(k+1)!} \int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1} dt.$$

Formel (5.1) holder altså også for $n = k + 1$. Beviset er hermed færdigt. \square

Resultatet ovenfor fortæller os, at restleddet $R_n f = f - T_n f$ er givet ved

$$R_n f(b) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt.$$

5.1.4 Korollar (Vurdering på restleddet)

Antag at f og dens første $n + 1$ afledede er kontinuerte på et åbent interval I . Lad $a, b \in I$ og M være et tal sådan at $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ for alle t mellem a og b . Da er

$$|R_n f(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |b-a|^{n+1}.$$

Bevis. Vi antager for enkelthedens skyld at $b > a$. Det modsatte tilfælde bevises analogt. Vi har nu

$$\begin{aligned} |R_n f(b)| &= \frac{1}{n!} \left| \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt \right| \leq \frac{M}{n!} \int_a^b (b-t)^n dt \\ &= \frac{M}{(n+1)!} |b-a|^{n+1} \end{aligned}$$

og korollaret er bevist. \square

Eksempel 5.1.4 (Approksimativ værdi for tallet e)

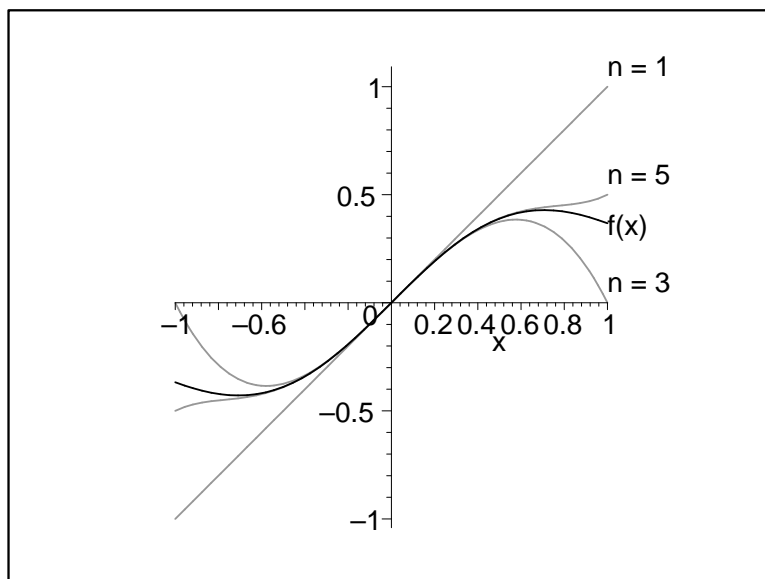
Fra Eksempel 5.1.1 ved vi, at Taylorpolynomiet til \exp i punktet 0 er givet ved

$$T_n \exp(b) = 1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6} + \cdots + \frac{b^n}{n!}.$$

Lad os estimere restleddet. Antag først at $b > 0$. Da $f^{(n+1)}(x) = e^x$ er en voksende funktion, er $M = f^{(n+1)}(b) = e^b$ maksimalværdien for $f^{(n+1)}(x)$ over intervallet $[0, b]$. Altså er

$$|R_n \exp(b)| \leq \frac{e^b}{(n+1)!} b^{n+1},$$

når $b > 0$. Det vil sige, hvis vi udregner $T_n \exp(b)$ i stedet for e^b , er fejlen mindre end $((n+1)!)^{-1} e^b b^{n+1}$.



Figur 5.1: Funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$ og dens Taylorpolynomier af grad $n = 1, 3$ og 5 i punktet 0 .

Hvis $b < 0$, får vi i stedet at $M = f^{(n+1)}(0) = e^0 = 1$ er en maksimalværdi for $f^{(n+1)}(x)$ over intervallet $[b, 0]$. Dermed har vi at

$$|R_n \exp(b)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |b|^{n+1}$$

når $b < 0$.

Lad os sige, at vi ønsker at beregne tallet e med en nøjagtighed bedre end 10^{-3} . Idéen er at bruge at

$$e = \exp(1) \approx T_n \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

men spørgsmålet er, hvor mange led vi skal tage med, for at fejlen bliver mindre end 10^{-3} . Hvis vi tager n led med, fortæller det ovenstående, at fejlen er mindre end

$$\frac{e}{(n+1)!} 1^{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}.$$

Vi ved at $e < 3$, så vi er på den sikre side, hvis vi vælger n sådan at

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3},$$

det vil sige

$$3000 < (n+1)!$$

Regner vi efter, ser vi, at denne ulighed er opfyldt for $n \geq 6$. Derfor vil

$$T_6 \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} (\approx 2.718)$$

give e med en tilnærmelse bedre end 10^{-3} .

Eksempel 5.1.5 (Summen af en uendelig række) Vi vil her finde summen af den alternerende harmoniske række.¹ Vi skal vise, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln(2).$$

Bemærk at dette problem ikke umiddelbart har noget med differentialregning og Taylorpolynomier at gøre. Vi kunne have spurgt om summen af denne række helt uden at have diskuteret begrebet funktioner. Men det er klart, at det svar, vi her giver udfra logaritmefunktionen, ikke kunne fremkomme uden at indføre funktionsbegrebet og differential- og integralregning.

Vi har allerede i Eksempel 5.1.3 set at Taylorpolynomiet for \ln i $x = 1$ er $T_n \ln(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (x-1)^k / k$. Vi har derfor at

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = R_n \ln(2).$$

Vi skal altså blot vise, at restleddet $R_n \ln(2) \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$. Vi ved fra Sætning 5.1.4 at

$$|R_n \ln(2)| \leq \frac{\sup\{|\ln^{(n+1)}(t)| \mid 1 \leq t \leq 2\}}{(n+1)!}.$$

Som i Eksempel 5.1.3 har vi $\ln^{(n+1)}(t) = (-1)^n n! t^{-(n+1)}$. Vi finder derfor, at $|R_n \ln(2)| \leq n! / (n+1)! = (n+1)^{-1} \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$.

Eksempel 5.1.6 (Approksimativ udregning af integral) Vi vil nu give et numerisk overslag for integralet

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

med en nøjagtighed bedre end 10^{-4} . Idéen er at erstatte $\sin x$ med Taylorpolynomiet

$$T_{2n} \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

¹Se Opgave 142 side 436 i *Funktioner af en og flere variable*

Vi får da integralet

$$\int_0^1 \frac{T_{2n} \sin(x)}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right) dx,$$

som vi let kan regne ud. Spørgsmålet er nu bare, hvor mange led vi skal tage med for at få den ønskede nøjagtighed.

Da $\sin x = T_{2n} \sin(x) + R_{2n} \sin(x)$, har vi, at

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{T_{2n} \sin(x)}{x} dx + \int_0^1 \frac{R_{2n} \sin(x)}{x} dx.$$

Fejlen vi laver ved at erstatte $\sin x$ med $T_{2n} \sin(x)$ i integralet er altså

$$\int_0^1 \frac{R_{2n} \sin(x)}{x} dx.$$

Da alle afledede af $f(x) = \sin(x)$ er mindre end 1 i absolutværdi, har vi ved Korollar 5.1.4 at

$$|R_{2n} \sin(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Dette giver at

$$\left| \int_0^1 \frac{R_{2n} \sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Skal vi være sikre på, at fejlen er mindre end 10^{-4} , må vi altså finde n sådan at $\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} < 10^{-4}$. Regner vi efter, ser vi, at dette sker, hvis $n \geq 3$. Det er altså godt nok at bruge Taylorpolynomiet af orden $2n = 2 \cdot 3 = 6$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &\approx \int_0^1 \frac{T_6 \sin(x)}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} \right]_0^1 = \frac{1703}{1800} \approx 0.96461 \end{aligned}$$

med en nøjagtighed bedre end 10^{-4} .

Eksempel 5.1.7 (Tallet e er irrationelt) Som en mere teoretisk anvendelse af Taylorpolynomier viser vi her at tallet e er et irrationelt tal.² Vi begynder med en triviell observation. Hvis $\frac{N}{h}$ og $\frac{M}{h}$ er to *forskellige* brøker med samme nævner og heltallige tællere, så er

$$\left| \frac{N}{h} - \frac{M}{h} \right| \geq \frac{1}{h}.$$

²Se også Eksempel 4.19 i *Funktioner af en og flere variable*

Antag nu at tallet e er rationelt. Der findes da naturlige tal p og k , så $e = \frac{p}{k}$. Lad m være et naturligt tal større end k (specielt er $m \geq 2$). Da ved vi fra Taylors formel Sætning 5.1.3 (se også Eksempel 5.1.4), at

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m!} + R_m \exp(1)$$

hvor $R_m \exp(1) = \frac{1}{m!} \int_0^1 e^t (1-t)^m dt$. Derfor er specielt $R_m \exp(1) > 0$ og som i Eksempel 5.1.4 ser vi, at $0 < R_m \exp(1) \leq \frac{e}{(m+1)!}$. Altså er

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m!}\right) \leq \frac{e}{(m+1)!}.$$

Samler vi nu udtrykket $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m!}$ på én brøkstreg, får vi et udtryk af typen $\frac{N}{m!}$, hvor N er et helt tal. Da m er større end k , kan også $e = \frac{p}{k}$ skrives som en brøk $\frac{M}{m!}$, hvor M er et helt tal (multipliser med $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot (k+1) \cdots m$ i tæller og nævner). Bemærk at den ovenstående ulighed giver, at $M > N$ og derfor

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m!}\right) \right| = \left| \frac{M}{m!} - \frac{N}{m!} \right| \geq \frac{1}{m!} = \frac{m+1}{(m+1)!}.$$

Da $m+1 \geq 3 > e$, strider dette mod vores forrige ulighed. Vi har en modstrid og sætningen er bevist.

5.2 Definition og konvergens af potensrækker

5.2.1 Definition (Potensrække)

En potensrække er en uendelig række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad (5.3)$$

hvor afsnittene er polynomier i den komplekse variable z , altså hvor a og $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ er givne komplekse tal, og $z \in \mathbb{C}$ er en kompleks variabel.

En potensrække kan opfattes som et polynomium af uendelig orden; den N 'te afsnitssum

$$\sum_{n=0}^N a_n (z-a)^n$$

af (5.3) er jo et polynomium af orden N . Den mest fundamentale potensrække er den geometriske række

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (5.4)$$

som bekendt³ er den geometriske række konvergent for $|z| < 1$ og divergent for $|z| \geq 1$ (se Opgave 5.15). Så den geometriske række er altså konvergent på den åbne cirkelskive med centrum i 0 og radius 1 og divergent i ethvert punkt udenfor denne åbne cirkelskive. Ved at bruge dette kan vi også bestemme konvergensforholdene for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n, \quad (5.5)$$

som fremkommer fra den geometriske række ved at erstatte z med $z - a$. Det er nemlig klart, at (5.5) konvergerer i punktet $z = z_0$ hvis og kun hvis (5.4) konvergerer i punktet $z = z_0 - a$. Altså er (5.5) konvergent for alle z i den åbne cirkelskive med centrum i a og radius 1 og divergent for alle z udenfor denne åbne cirkelskive.

Vi skal nu vise, at konvergensforholdene for en generel potensrække (5.3) i det store hele er som for rækken (5.5). Blot bliver radius i den cirkelskive, hvor rækken konvergerer, ikke nødvendigvis 1, men kan være hvad som helst mellem 0 og $+\infty$ (begge inklusive). Bemærk at forskellen mellem rækkerne (5.3) og (5.5) består i, at der i (5.3) optræder koefficienterne a_0, a_1, a_2 osv. I (5.5) er alle disse koefficienter lig 1. Hvis for eksempel $|a_n| = n!$ eller $|a_n| = n^n$, således at absolutværdien af a_n 'erne vokser usympatisk hurtigt, vil det generelle led i rækken (5.3) (altså $a_n(z - a)^n$) ikke gå mod nul, når n går mod uendelig, med mindre $z = a$. I sådanne tilfælde konvergerer rækken (5.3) kun for en enkelt værdi af z nemlig $z = a$.

Eksempel 5.2.1 Lad os se på flg. eksempel :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (in)^n (z - 2)^n.$$

Denne potensrække konvergerer åbenlyst for $z = 2$, men hvad med andre z -værdier? Bemærk at

$$\begin{aligned} |(in)^n (z - 2)^n| &= |i^n n^n (z - 2)^n| = |i^n| |n^n| |(z - 2)^n| \\ &= |i|^n n^n |z - 2|^n = n^n |z - 2|^n = (n|z - 2|)^n \end{aligned}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $z \neq 2$ er $|z - 2| > 0$, og når $n > 1/|z - 2|$, er $n|z - 2| > 1$. Så

$$|(in)^n (z - 2)^n| = (n|z - 2|)^n > 1$$

for alle $n > 1/|z - 2|$. Derfor er $\sum_{n=0}^{\infty} (in)^n (z - 2)^n$ divergent for $z \neq 2$, thi rækkens led går ikke mod 0.⁴

³Sætning 4.32 i *Funktioner af en og flere variable*

⁴Sætning 4.34 i *Funktioner af en og flere variable*

Eksempel 5.2.2 Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \quad (5.6)$$

der fremkommer fra (5.3) ved at sætte $a = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/4$, $a_3 = 1/8$, og så videre. Denne potensrække konvergerer, når $|z| < 2$, og divergerer når $|z| \geq 2$. For at overbevise læseren om dette, er det nok at omskrive (5.6) en lille smule :

$$2^{-n} z^n = (z/2)^n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ så

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n .$$

Men det er jo den geometriske række svarende til variabel-værdien $z/2$. Så vi ser, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n$ og dermed også rækken (5.6) konvergerer, når $|z/2| < 1$ og divergerer, når $|z/2| \geq 1$. Ved at gange igennem med 2 ser vi altså, at (5.6) er konvergent for $|z| < 2$ og divergent for $|z| \geq 2$ som påstået. \square

Som disse eksempler antyder, afhænger konvergensforholdene for en potensrække (5.3) af, hvor hurtigt absolut-værdierne $|a_n|$ af vokser, når n går mod uendelig. Vi skal nu se, at mængden af z , for hvilke en give potensrække konvergerer ikke kan være helt tilfældig.

5.2.2 Sætning (Konvergensradius)

Givet en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Der findes $0 \leq R \leq \infty$ så rækken konvergerer absolut for $|z-a| < R$ og rækken divergerer for $|z-a| > R$. Man kalder R for **konvergensradius** for potensrækken.

Bevis. Vi betragter mængden af $t \geq 0$, for hvilke talfølgen $\{|a_n|t^n\}_n^\infty$ er begrænset. Altså mængden

$$\mathcal{A} = \left\{ t \geq 0 \mid \text{Talfølgen } \{|a_n|t^n\}_n^\infty \text{ er begrænset} \right\}$$

eller udtrykt ved kvantorer

$$\mathcal{A} = \left\{ t \geq 0 \mid \exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n|t^n \leq M \right\} .$$

Denne mængde er ikke tom da den indeholder $t = 0$. Hvis mængden \mathcal{A} ikke er opad begrænset altså, hvis talfølgen $\{|a_n|t^n\}_n^\infty$ er begrænset for vilkårligt store t , definerer vi $R = \infty$. I modsat fald sætter vi $R = \sup \mathcal{A}$.

Betragt nu z så $|z-a| < R$. Da kan $|z-a|$ ikke være et overtal (en øvre grænse) for mængden \mathcal{A} . For enten er \mathcal{A} slet ikke opad begrænset ellers er R det mindste overtal (mindste øvre grænse).

Derfor findes der et $t \in \mathcal{A}$ så $t > |z - a|$. Da $t \in \mathcal{A}$, findes $0 \leq M < \infty$, så $|a_n|t^n \leq M$ for alle n .

Hvis vi skriver, $|a_n||z - a|^n = |a_n|t^n(|z - a|/t)^n$, ser vi, at

$$|a_n||z - a|^n \leq M(|z - a|/t)^n.$$

Konvergens af potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ følger nu af sammenligningskriteriet, for da $|z - a|/t < 1$, er den geometriske række $\sum_n M(|z - a|/t)^n$ konvergent.

Hvis $|z - a| > R$ er $\{|a_n||z - a|^n\}_n^\infty$ en ubegrænset følge. Vi kan derfor ikke have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n||z - a|^n = 0.$$

Da leddene i potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ altså ikke går mod 0, kan den ikke være konvergent.⁵ \square

Bemærk at Sætning 5.2.2 intet siger om konvergens af potensrækken for $z \in \mathbb{C}$ med $|z - a| = R$. Det er ofte en kompliceret affære, at afgøre hvorvidt en given potensrække konvergerer i et punkt på konvergenscirklen. Det kan sagtens forekomme, at rækken konvergerer i et punkt på denne cirkel, men ikke i et andet.

Sætning 5.2.2 siger, at der til en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ findes en cirkelskive med centrum i a evt. med radius 0 eller ∞ , således at potensrækken er konvergent i det indre af cirkelskiven og divergent udenfor. Konvergensradius er netop radius for denne cirkelskive.

Når man skal finde konvergensradius af en potensrække, kan man benytte et af konvergenskriterierne for uendelige rækker. Det mest almindelige er at benytte enten kvotientkriteriet eller rod-kriteriet. Vi formulerer deres konsekvenser for potensrækker som en separat sætning.

5.2.3 Sætning (Kvotient- og rod-kriterie for konvergensradius)

Lad a_0, a_1, a_2, \dots være en følge af komplekse tal således, at der findes et $N \in \mathbb{N}$ så $a_n \neq 0$ for $n \geq N$. Hvis grænseværdien

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

eksisterer (evt. som ∞), da er R konvergensradius for enhver potensrække af formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$.

Ligeledes, hvis grænseværdien

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{-1/n}$$

eksisterer (evt. som ∞), da er R konvergensradius for enhver potensrække af formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$.

⁵Se Sætning 4.34 i *Funktioner af en og flere variable*

Bevis. Når $z \neq a$ giver antagelserne, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|a_n(z-a)^n|} = \frac{|z-a|}{R}.$$

Det følger fra kvotientkriteriet, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-a)^n|$$

konvergerer, når

$$\frac{|z-a|}{R} < 1,$$

dvs. når $|z-a| < R$, og divergerer når

$$\frac{|z-a|}{R} > 1,$$

dvs. når $|z-a| > R$. Altså må R være konvergensradius for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

jvf. Sætning 5.2.2. Rodkriteriet er helt analogt. □

Eksempel 5.2.3 Vi søger konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+7)(z-3)^n. \quad (5.7)$$

Vi benytter kvotientkriteriet fra Sætning 5.2.3

$$\frac{2n+7}{2(n+1)+7} = \frac{2n+7}{2n+9}$$

konvergerer mod 1 når n går mod uendelig. Men så er konvergensradius for (5.7) 1, ifølge Sætning 5.2.3.

Eksempel 5.2.4 Vi søger konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3(z-3)^n. \quad (5.8)$$

Atter sætter vi først vores lid til Sætning 5.2.3, og søger at finde grænseværdien for kvotienterne

$$\frac{n^3}{(n+1)^3}.$$

Efter omskrivningen

$$\frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}$$

ser man umiddelbart, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1.$$

Så 1 er altså konvergensradius for (5.8).

Hvis en potensrække har positiv konvergensradius, muligvis uendelig, så vil dens sum definere en funktion på den åbne cirkelskive.

5.2.4 Definition (Sumfunktion for potensrække)

Hvis potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ har konvergensradius $R > 0$ kalder vi funktionen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

for potensrækkens sumfunktion. Med mindre andet bliver angivet, lader vi definitionsmængden være den åbne cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$.

Bemærk at sumfunktionen afhænger af en kompleks variabel. Vi skal ikke her diskutere funktioner af komplekse variable yderligere. Vi skal hovedsageligt interessere os for sumfunktionen restringeret til intervallet $]a-R, a+R[$. Sumfunktionen har de bedst tænkelige kontinuitets og differentiabilitets egenskaber. Selvom det faktisk ikke er så vanskeligt at vise, ligger det alligevel ud over, hvad der skal gennemgås her. Vi nøjes med at anføre resultatet uden bevis.

5.2.5 Sætning (Kontinuitet og differentiabilitet af sumfunktion)

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ være en potensrække med reelle koefficienter og positiv konvergensradius R . Da er den reelle funktion $f :]a-R, a+R[\rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ kontinuert og uendelig mange gange differentiabel.

Vi har her begrænset os til reelle potensrækker. Det er der egentlig ingen speciel grund til. Sætningen er også rigtig for funktioner med *komplekse* værdier. Grunden til ikke at medtage dette her er simpelthen, at vi ikke har diskuteret de ellers ret oplagte betydninger af kontinuitet og differentiabilitet for sådanne funktioner.

Der gælder, at man for en sumfunktion til en potensrække kan udtrykke både den afledte og stamfunktionen igen som sumfunktioner til potensrækker. Resultatet, som vi nu formulerer, virker intuitivt oplagt, men beviset er faktisk ikke helt nemt, så vi udelader det.

5.2.6 Sætning (Ledvis differentiation og integration)

Hvis potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ har konvergensradius $R > 0$, da vil potensrækkerne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1},$$

der fremkommer ved henholdsvis ledvis integration og ledvis differentiation af den oprindelige række, begge have konvergensradius R .

Desuden vil sumfunktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ have stamfunktionen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

og afledte

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Disse funktioner er alle defineret for $x \in]a-R, a+R[$.

5.2.7 Sætning (Regning med potensrækker)

Lad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ og $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ være sumfunktioner for de givne potensrækker defineret for $x \in]a-R, a+R[$. Da vil vi for $x \in]a-R, a+R[$ have

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) (x-a)^n$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right) (x-a)^n.$$

Bevis. Begge disse regneregler gælder for generelle absolut konvergente uendelige rækker. De er altså ikke specielle for potensrækker. ⁶ \square

Bemærk at produktreglen for potensrækker kan forstås ved at man i produktet

$$\left(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots \right) \left(b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots \right)$$

har samlet led med samme potens af $(x-a)$.

⁶Den første regneregul om sum og differens af potensrækker, følger fra Sætning 4.33 i *Funktioner af en og flere variable*. Reglen for produkter af potensrækker er en smule mere kompliceret og bevises ikke her.

5.3 Taylorrækker og deres konvergens

Vi har set i Definition 5.2.4, at der til en potensrække kan høre en sumfunktion. Omvendt kan man til en funktion der er uendelig mange gange differentiabel knytte den potensrække, hvis afsnit er Taylorpolynomierne for funktionen.

5.3.1 Definition (Taylorrækken for funktion af en variabel)

Antag at f er en reel funktion af én reel variabel, der er uendelig ofte differentiabel i punktet $a \in \mathbb{R}$. Potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

kaldes for **Taylorrækken** for f i punktet a .

Man kunne igen sagtens have inkluderet funktioner af én reel variabel med *komplekse* værdier. Man kan nu spørge om, hvorvidt en vilkårlig potensrække altid er Taylorrække for sin sumfunktion og omvendt om Taylorrækken for f altid har sumfunktion f . Vi besvarer dette i den næste sætning og efterfølgende bemærkning.

5.3.2 Sætning (Potensrække er Taylorrække for sin sumfunktion)

Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ er en reel potensrække med positiv konvergensradius R , da er denne potensrække Taylorrækken for sin sumfunktion (betragtet som funktion på $]a - R, a + R[$) i punktet a . Med andre ord, hvis funktionen $f :]a - R, a + R[\rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$, da er f uendelig ofte differentiabel i a og for alle $n \geq 0$ er

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (5.9)$$

Bevis. Vi har fra Sætning 5.2.5 at f er uendelig mange gange differentiabel i a .

Sætning 5.2.6 giver, at

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x-a)^{n-k}.$$

Det første led, hvor $n = k$, giver $k!a_k$. Altså $f^{(k)}(a) = k!a_k$. □

Eksempel 5.3.1 (Funktion der ikke er sum for sin Taylorrække)

Betragt funktionen⁷ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}.$$

⁷Se opgave 309 i *Funktioner af en og flere variable*

Denne funktion er klart uendelig ofte differentiabel i alle $x \neq 0$. Man ser nemt ved induktion, at for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \neq 0$ er $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)f(x)$, hvor P_n er et polynomium af grad $2n$. Vi behøver ikke kende polynomiet P_n eksplicit. Da eksponentialfunktionen aftager hurtigere end enhver potens,⁸ har vi, at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0, \quad (5.10)$$

for alle $n \geq 0$.

Ved induktion konkluderer vi nu, at f faktisk også er uendelig ofte differentiabel i $x = 0$ med $f^{(n)}(0) = 0$. Tilfældet $n = 0$ er kontinuiteten af f i 0, som faktisk er et svagere udsagn end (5.10).

Hvis vi antager $f^{(n)}(0) = 0$, har vi fra (5.10)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0.$$

Derfor er $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Med andre ord er Taylorrækken for funktionen f i punktet 0 simpelthen 0-rækken. Denne række har selvfølgelig uendelig konvergensradius og sumfunktion lig med 0-funktionen, altså er sumfunktionen ikke lig med f .

Mange af de mest almindelige funktioner er dog sumfunktioner for deres Taylorrækker. Her er nogle af de vigtigste eksempler.

5.3.3 Sætning (Taylorrækker for kendte funktioner)

I de følgende identiteter er kendte funktioner skrevet som sum for deres Taylorrække i punktet 0. Rækkerne er konvergente i det angivne interval.

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, & x \in]-1, 1[\\ (b) \quad \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, & x \in \mathbb{R} \\ (c) \quad \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, & x \in \mathbb{R} \\ (d) \quad \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & x \in \mathbb{R} \\ (e) \quad \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, & x \in]-1, 1] \\ (f) \quad (1+x)^s &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdots (s-n+1)}{n!} x^n, & x \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

I det sidste tilfælde er $s \in \mathbb{R}$.

⁸Se specielt Sætning 7.24 i *Funktioner af en og flere variable*

Bevis. (a) Den første række er simpelthen en geometrisk række.

Fra Eksemplerne 5.1.1, 5.1.2 og 5.1.3 ser vi umiddelbart at de næste fire rækker virkelig er Taylorrækker for de givne funktioner. Da afsnitsummerne for Taylorrækken for en funktion f netop er Taylorpolynomierne for f , skal man for at vise, at Taylorrækken konvergerer mod $f(x)$, simpelthen vise, at restleddet $R_n f(x)$ går mod 0.

(b) Vi har allerede set i den approksimative udregning af tallet e i Eksempel 5.1.4, at

$$|R_n \exp(x)| \leq \frac{\max\{e^x, 1\}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Bemærk at for $n > 2|x|$ har vi, at

$$\frac{|x|^{n+m}}{(n+m)!} = \frac{|x|^n}{n!} \frac{|x|}{n+1} \frac{|x|}{n+2} \cdots \frac{|x|}{n+m} \leq \frac{|x|^n}{n!} 2^{-m}.$$

Derfor vil $\frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$ og det er derfor klart, at for alle $x \in \mathbb{R}$ vil $R_n \exp(x) \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$.

(c-d) Da $|\cos(x)| \leq 1$ og $|\sin(x)| \leq 1$ ser vi umiddelbart, at alle afledede af \sin og \cos i absolutværdi er begrænset af 1. Derfor følger det af vurderingen på restleddet i Korollar 5.1.4 at

$$|R_n \cos(x)| \leq |x|^{n+1}/(n+1)!, \quad |R_n \sin(x)| \leq |x|^{n+1}/(n+1)!.$$

Konvergenserne for disse Taylorrækker følger derfor, som for \exp .

(e) Fra Eksempel 5.1.5 følger det at Taylorrækken for $\ln(1+x)$ virkelig har den rigtige konvergens for $x = 1$. Da $\ln(1+x)$ er den stamfunktion til $(1+x)^{-1}$, som er 0 for $x = 1$, kan vi benytte Sætning 5.2.6 om ledvis differentiation og integration af potensrækker til at vise konvergens af rækken for $x \in]-1, 1[$. Bemærk nemlig, at ledvis differentiation af rækken giver $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ som jo netop konvergerer mod $(1+x)^{-1}$ for $x \in]-1, 1[$.

(f) Vi bemærker først ved brug af kvotientkriteriet for potensrækker Sætning 5.2.3, at rækken er konvergent for $x \in]-1, 1[$.

Vi bemærker dernæst, at funktionen $f(x) = (1+x)^s$ kan karakteriseres, som den entydige funktion, der opfylder, at

$$f'(x) = sf(x)/(1+x) \quad \text{og} \quad f(0) = 1. \quad (5.11)$$

Det faktum, at der er en og kun en funktion, der opfylder (5.11), følger f.eks. af eksistens og entydighedssætningen for første ordens lineære differentiaalligninger Sætning 4.3.3.

Vi er altså færdige, hvis vi kan vise, at sumfunktionen for rækken har egenskaben (5.11). At summen er 1 for $x = 0$ er klart. Ved ledvis differentiation af

rækken finder vi

$$\begin{aligned}
 & (1+x) \frac{d}{dx} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n+1)}{n!} x^n \right) \\
 &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n)}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n+1)}{(n-1)!} x^n \\
 &= s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n+1)}{n!} ((s-n)x^n + nx^n) \\
 &= s \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n+1)}{n!} x^n \right).
 \end{aligned}$$

Altså opfylder sumfunktionen også betingelsen (5.11). \square

Eksempel 5.3.2 (Den komplekse eksponentialfunktion) Bemærk at hvis vi benytter Taylorrækkerne for \sin og \cos , finder vi, at

$$\cos(y) + i \sin(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!},$$

hvilket er i overensstemmelse med Definition 4.1.9 af den komplekse eksponentialfunktion og Taylorrækken for eksponentialfunktionen. Ved brug af Sætning 5.2.7 om udregning af produkter af potensrækker kan man mere generelt vise, at for $z = x + iy$ har vi

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

5.3.4 Bemærkning (Om at bestemme Taylorrækken for en funktion)

Man kan selvfølgelig altid direkte benytte Definition 5.3.1 til at bestemme Taylorrækken for en given funktion. Dette kan dog ofte være ret besværligt og man kan med fordel ofte i stedet tage udgangspunkt i en kendt Taylorrække og benytte regnereglerne for potensrækker. Vi giver et enkelt eksempel på dette.

Eksempel 5.3.3 (Taylorrækken for \arctan)

Lad os beregne Taylorrækken for funktionen $f(x) = \arctan(x)$ i punktet $x = 0$. Hvis vi skal bruge definitionen skal vi differentiere flere gange:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2}, \quad \dots$$

Det vil hurtigt blive et uoverskueligt regnestykke. Det er nemmere at udnytte, at $\arctan(x)$ er den stamfunktion til $(1+x^2)^{-1}$, der er 0 i $x=0$. Taylorrækken for $(1+x^2)^{-1}$ finder vi ved at indsætte $-x^2$ i stedet for x i Taylorrækken for $(1-x)^{-1}$. Altså $(1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, konvergent for $x \in]-1, 1[$. Derfor får vi ved ledvis integration at

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

og potensrækken er konvergent for $x \in]-1, 1[$.

Man kan vise, at Taylorrækken også konvergerer mod $\arctan(x)$ for $x=1$, hvilket giver den berømte formel⁹

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4},$$

da $\arctan(1) = \pi/4$.

5.3.5 Bemærkning (Om at finde sumfunktionen for en potensrække)

Generelt kan man ikke nødvendigvis bestemme sumfunktionen for en given potensrække ud fra kendte funktioner. I mange tilfælde kan man dog gøre det ved at bruge regnereglerne for potensrækker til at omskrive den givne potensrække til en af de allerede kendte Taylorrækker. Vi giver et par eksempler.

Eksempel 5.3.4 Find sumfunktionen for

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{(n-1)!}.$$

Vi vil forsøge at omskrive denne potensrække til Taylorrækken for \exp . Først substituerer vi $y=x^2$ og dernæst benytter vi regnereglerne for potensrækker

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny^n}{(n-1)!} &= y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny^{n-1}}{(n-1)!} = y \frac{d}{dy} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n-1)!} \\ &= y \frac{d}{dy} \left(y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \right) = y \frac{d}{dy} \left(y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \\ &= y \frac{d}{dy} (ye^y) = y(e^y + ye^y). \end{aligned}$$

Potensrækken er konvergent for alle y . Bemærk at vi slap af med faktoren n i tælleren ved at differentiere. Alternativt kunne man have benyttet omskrivningen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)y^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n-1)!}$$

⁹Et bevis for denne formel gives i opgave 328 på side 479 i *Funktioner af en og flere variable*

$$= y^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} = (y + y^2)e^y.$$

Vi konkluderer derfor, at for alle x er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{(n-1)!} = x^2(1+x^2)e^{x^2}.$$

Eksempel 5.3.5 Vi ønsker at finde summen af potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Her vil vi slippe af med faktoren $(n+2)(n+1)$ i tælleren ved at differentiere to gange

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n &= \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{d^2}{dx^2} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \frac{x^2}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Potensrækken konvergerer for $x \in]-1, 1[$.

Eksempel 5.3.6 Vi ønsker at finde summen af potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+1)}.$$

Her slipper vi af med faktoren $(n+2)(n+1)$ i nævneren ved at integrere to gange ledvist. Først er vi nødt til at få den rigtige potens af x . For $x \neq 0$ får vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+1)} &= x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} = x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} dt \\ &= x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \left[\int_0^t u^n du \right] dt = x^{-2} \int_0^x \left[\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} u^n du \right] dt \\ &= x^{-2} \int_0^x \left[\int_0^t (1-u)^{-1} du \right] dt = x^{-2} \int_0^x -\ln(1-t) dt \\ &= x^{-2} ((1-x) \ln(1-x) - (1-x) + 1) \\ &= x^{-2} ((1-x) \ln(1-x) + x). \end{aligned}$$

Bemærk at potensrækken på venstre side giver mening for $x = 0$ og der har værdien $1/2$. Udtrykket på højre side giver ikke mening for $x = 0$. Ifølge regnearbejdet for potensrækker konvergerer rækken for $x \in]-1, 1[$ og er for $x \neq 0$ lig

med højresiden. Udtrykket på højre side må derfor naturligvis have grænsen $1/2$ når $x \rightarrow 0$. Det kan man også se ved at benytte l'Hôpitals regel to gange. Man bemærker i øvrigt, f.eks. ved at sammenligne med rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ at rækken faktisk er konvergent også for $x = \pm 1$.

Maple kan bruges til at finde sumfunktionen til en potensrække, som følgende eksempel viser:

```
> Sum(x^n/((n+2)*(n+1)), n=0..infinity); simplify(value(%));
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+1)} = \frac{\ln(1-x)x - \ln(1-x) - x}{x^2}$$

5.3.6 Bemærkning (Om at finde summen af uendelige rækker)

Vi så allerede i Eksempel 5.1.5, at man kan benytte Taylorpolynomier og Taylorrækker til at bestemme summen af uendelige rækker. Givet en uendelig række er ideen, at kunstigt indsætte en variabel x for derved at gøre rækken til en potensrække, så man kan benytte resultaterne om Taylorrækker og potensrækker til at finde summen. Vi illustrerer det igen ved et par eksempler.

Eksempel 5.3.7 Vi vil finde summen af de uendelige rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{(n+2)(n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)2^{-n}.$$

Bemærk at disse rækker fremkommer ved at indsætte henholdsvis $x = 3$, $x = 1/2$ og $x = 1/2$ i potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Vi kan derfor aflæse summen af rækkerne fra resultatet i de tre foregående eksempler.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{(n-1)!} = 90e^9, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{(n+2)(n+1)} = 2 - 2\ln(2), \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)2^{-n} = 16.$$

5.4 Opgaver til Kapitel 5

5.1 Opgave

Find Taylorpolynomiet af grad 4 til $f(x) = e^{x^2}$ i punktet 0.

5.2 Opgave

Find Taylorpolynomiet af grad 3 til $f(x) = \tan x$ i punktet 0.

5.3 Opgave

Find Taylorpolynomiet af grad 3 til $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ i punktet 0.

5.4 Opgave

Find Taylorpolynomiet af grad 3 til $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$ i punktet 1.

5.5 Opgave

Brug Taylorpolynomiet for $f(x) = \sqrt{x}$ af grad 2 i punktet $x = 100$ til at finde en tilnærmet værdi for $\sqrt{99}$. Giv et overslag på nøjagtigheden.

5.6 Opgave

Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

ved hjælp af et passende Taylorpolynomium.

5.7 Opgave

Brug et Taylorpolynomium til at beregne

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx$$

med en fejl på mindre end 0.00002.

5.8 Opgave

Find konvergensradius for flg. potensrækker:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (z - 2)^n$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z - i)^n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z + 2)^n}{n(n + 1)}$$

$$(e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) z^n$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-4)^n}{n!}$$

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)!} z^{2n}$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + 3)^n (z-2i)^n$$

5.9 Opgave

Lad $a \in \mathbb{C}$ være et vilkårligt komplekst tal og r et vilkårligt element i $[0, \infty]$. Vis ved eksempel, at der findes en potensrække, der er konvergent på $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ og divergent på $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$.

5.10 Opgave

Bevis flg. identiteter :

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}, \quad z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}.$$

$$(b) \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad x \in]-1, 1[.$$

$$(c) \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}.$$

$$(d) \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in]-1, 1[.$$

$$(e) \frac{z^2}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+2}, \quad z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}.$$

$$(f) \log(1-x^3) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}, \quad x \in]-1, 1[.$$

5.11 Opgave

Lad potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ have konvergensradius R_a og R_b , hhv.

Gør rede for at konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n$ mindst er $\min\{R_a, R_b\}$.

Gør rede for at konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z-a)^n$ mindst er $\min\{R_a, R_b\}$.

Lad z_0, z_1, z_2, \dots være en følge af komplekse tal af modulus 1. Vis at konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z_n a_n (z-a)^n$ er R_a , og at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + z_n b_n)(z-a)^n$ har en konvergensradius, der er mindst $\min\{R_a, R_b\}$.

5.12 Opgave

For ethvert naturligt tal n lader vi q_n betegne antallet af naturlige tal, der går op i n . Altså

$$q_n = \#\{k \in \mathbb{N} : k|n\}.$$

Find konvergensradius for flg. potensrækker :

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{q_n} z^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{3} z^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (q_n)^n z^n$$

5.13 Opgave

Bestem sumfunktionen for følgende potensrækker

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n-1)!}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{3n}$$

5.14 Opgave

Bestem summen af følgende rækker

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{(n+3)}}{n!} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1} \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{-n}}{n+1} \end{array}$$

5.15 Opgave

(a) Gør rede for, at mængden af z , hvor den geometriske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

konvergerer, er $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

(b) Gør rede for, at mængden af z , hvor potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

konvergerer, er $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

5.16 Opgave

Gør rede for at funktionen x^{-x} er kontinuert på $[0, 1]$, når vi benytter konventionen $0^0 = 1$. Bevis desuden formelen

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

(Vink : Integrer $x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\log x)^n / n!$, og evaluer $\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$ ved delvis integration.)

5.17 Opgave

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ være potensrækker der begge har konvergenradius større end 0. Antag at der findes et $\delta > 0$ så

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

når $|z| < \delta$. Vis at $a_n = b_n$ for alle $n = 0, 1, 2, \dots$.

5.18 Opgave

a) Vis at der findes en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $R \geq 1$ således at funktionen $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ opfylder differentiaalligningen

$$f''(t) = t^2 f(t)$$

på intervallet $] -1, 1[$.

b) Lad $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Vis at der kun findes en potensrække som under a) således at $f(0) = \alpha$ og $f'(0) = \beta$.

Kapitel 6

Integration i flere variable

6.1 Plan og rumintegraler

Vi vil ikke her diskutere, hvordan man definerer plan og rumintegraler ud fra over- og undersummer.¹ Vi vil for planintegraler over en mængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ enten benytte notationen $\int_D f(x, y) dA$, $\iint_D f(x, y) dA$, eller mere kortfattet blot $\int_D f$, hvor vi helt udelader integrationsvariablen. For rumintegraler over en mængde $R \subseteq \mathbb{R}^3$, skriver vi ligeledes enten $\int_R f(x, y, z) dV$, $\iiint_R f(x, y, z) dV$, eller igen blot $\int_R f$. Den kortfattede notation kan med fordel bruges, når vi samtidig vil udtale os om plan og rumintegraler.

Vi minder om, at hvis $f(x, y) \geq 0$, er

$$\int_D f(x, y) dA$$

rumfanget af den mængde, der ligger over D i XY -planen og under grafen for f . Specielt gælder der,² at

$$\text{Areal}(D) = \int_D 1 dA.$$

På samme måde vil vi for $R \subseteq \mathbb{R}^3$ have

$$\text{Rumfang}(R) = \int_R 1 dV.$$

Planintegraler er specielt nemme at udregne, hvis der integreres over elementære domæner $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se Definition 1.2.6.

På samme måde er rumintegraler specielt nemme at udregne, hvis der integreres over mængder, der kan skrives som

$$R = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq o(x), b(x, y) \leq z \leq t(x, y)\}, \quad (6.1)$$

¹For planintegraler finder man det i *Funktioner af en og flere variable*, Kap. 10. Teorien for rumintegraler er helt tilsvarende, blot integreres der over delmængder af \mathbb{R}^3 .

²Se Eksempel 10.5 i *Funktioner af en og flere variable*.

hvor u og o er som i Definition 1.2.6 og

$$t, b : \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq o(x)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

er kontinuerte og opfylder $b(x, y) < t(x, y)$ for (x, y) i det indre af definitions-mængden. (Notationen t og b refererer til *top* og *bund*. Ligesom i to dimensioner kan man selvfølgelig ombytte rollerne af x, y og z i (6.1).

6.1.1 Definition (Elementære domæner)

Vi skal med en samlet betegnelse kalde mængder på formen (1.7-1.8) eller (6.1) (og de tilsvarende med rollerne af x, y og z ombyttet) for **elementære domæner**. Randen af et elementært domæne R i rummet er defineret analogt til randen af et elementært domæne i planen (se Definition 1.2.6).

Integration over elementære domæner er beskrevet i følgende sætning, som vi ikke beviser her.³

6.1.2 Sætning (Itereret integral)

Lad $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion defineret på et elementært domæne D . Da er f integrabel over D (hvis $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vil vi også sige planintegral og hvis $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vil vi også sige rumintegral). Hvis D er af formen (1.7) og f derfor er en funktion af to variable, har vi

$$\int_D f(x, y) dA = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=u(x)}^{y=o(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Hvis D er af formen (1.8) og f derfor er en funktion af to variable, har vi

$$\int_D f(x, y) dA = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=v(y)}^{x=h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Hvis R er af formen (6.1) og f derfor er en funktion af tre variable, har vi

$$\int_R f(x, y, z) dV = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=u(x)}^{y=o(x)} \left(\int_{z=b(x,y)}^{z=t(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Som for planintegraler gælder der tilsvarende formler med rollerne af x, y og z ombyttet.

Denne sætning vil gøre det muligt at udregne, stort set alle de plan- eller rumintegraler vi møder ved at reducere dem til en-dimensionale integraler.

³For planintegraler kan sætningen findes i *Funktioner af en og flere variable* Sætning 10.13 og Korollar 10.14.

Vi ser med det samme, fra denne sætning, at plan og rumintegraler over elementære domæner (og dermed også over disjunkte foreningsmængder af elementære domæner) opfylder den sædvanlige linearitetsrelation

$$\int_D (af + bg) = a \int_D f + b \int_D g,$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og f, g er kontinuerte funktioner på D .

Man kan ofte vælge nye variable, således at en given mængde kan udtrykkes som et elementært domæne i de nye variable. Derved bliver integraler over denne mængde meget lettere at udregne. Vi skal nu beskrive denne metode. Først giver vi uden bevis den sætning, der tillader en af skifte variable. Et skift af variable vil være udtrykt ved en afbildning T . Sætningen fortæller os, hvordan vi kan udregne integralet af en funktion f over billedmængden $T(D)$ af en mængde D ved i stedet at udregne integralet af den sammensatte funktion $f \circ T$ over mængden D . Bemærk at $T(D)$ ikke behøver være et elementært domæne. Vi tænker på $f \circ T$ som funktionen f udtrykt i nye variable. Der bliver en ekstra faktor i det nye integral, der udtrykker areal- eller volumenforholdet ved afbildningen T .

6.1.3 Sætning (Transformationssætningen)

Lad $n = 1, 2$ eller $n = 3$ og lad $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en kontinuert differentiabel funktion på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Hvis $D \subseteq U$ er et elementært domæne (et interval for $n = 1$), T er injektiv på det indre af D og $f : T(D) \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion gælder der,

$$\int_{T(D)} f = \int_D (f \circ T) |\det DT|.$$

Vi skal som sagt ikke bevise denne sætning her, men blot bemærke, at det er naturligt at determinanten af Jacobi-matricen, den såkaldte Jacobi-determinant, for T optræder. Hvis T var lineær, ville absolutværdien af determinanten for T jo netop være areal- eller volumenforholdet ved afbildningen. Generelle differentiable afbildninger kan i ethvert punkt tilnærmes af en lineær afbildning, hvis determinant netop er Jacobi-determinanten.

For $n = 1$ er Transformationssætningen faktisk velkendt. Den drejer sig simpelthen blot om integration ved substitution

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(y) dy = \int_a^b f(T(x)) T'(x) dx.$$

Bemærk at hvis T er injektiv er T strengt monotont (se opgave 1.7). Hvis $T' \leq 0$, vil $T(a) \geq T(b)$ og derfor vil $T([a, b]) = [T(b), T(a)]$. På den anden side, hvis

$T' \geq 0$ vil $T([a, b]) = [T(a), T(b)]$, man kan derfor i begge tilfælde skrive formlen ovenfor på samme måde som i Transformationsætningen

$$\int_{T([a,b])} f(y)dy = \int_{[a,b]} f(T(x))|T'(x)|dx.$$

6.1.4 Definition (Polære koordinater i planen)

Den kontinuert differentiable afbildning givet ved

$$\mathbb{R}^2 \ni (r, \theta) \mapsto (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$$

kaldes polære koordinater i planen. Den er injektiv på mængden af (r, θ) der opfylder

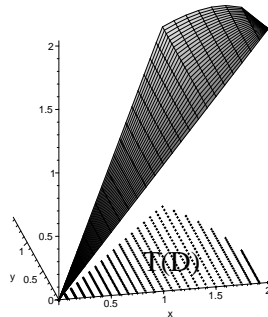
$$0 < r, \quad 0 < \theta \leq 2\pi.$$

Absolutværdien for Jacobi-determinanten for afbildningen er på denne mængde givet ved

$$\left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = r.$$

Eksempel 6.1.1 (Benyttelse af polære koordinater)

Vi vil udregne planintegralet af funktionen $f(x, y) = x$ over mængden i første kvadrant omgrænset af x -aksen, linien $x = y$ og cirklen $x^2 + y^2 = 4$. I polære



Figur 6.1: Domænet $T(D)$ og grafen for f

koordinater kan denne mængde udtrykkes som

$$D = \{(r, \theta) \mid r \in [0, 2], 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

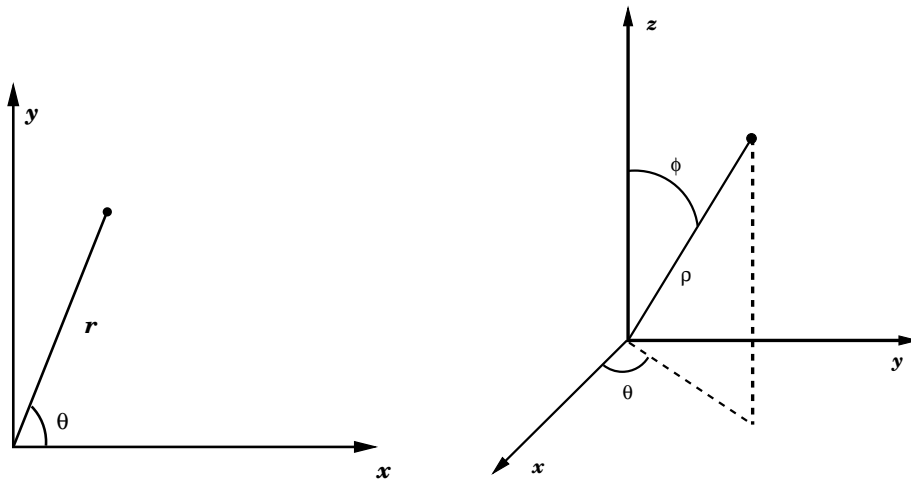
Mere præcist betyder det, at hvis T er afbildningen for polære koordinater, vil vores oprindelige domæne være billedet $T(D)$. Bemærk at T er injektiv på det indre af D . Funktionen $f(T(r, \theta)) = r \cos \theta$. Det følger da fra Transformationsætningen 6.1.3, at vi har

$$\int_{T(D)} f(x, y)dA = \int_D r \cos \theta r dA.$$

Ved at omskrive integralet til et itereret integral får vi

$$\int_{r=0}^{r=2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} r^2 \cos \theta d\theta dr = \int_{r=0}^{r=2} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \cos \theta d\theta = 4\sqrt{2}/3.$$

I de oprindelige koordinater kan integralet skrives $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{x=y}^{x=\sqrt{4-y^2}} x dx dy$. Det overlades til læseren, at checke dette og at integralet giver samme resultat som ovenfor.



Figur 6.2: (a) Polære koordinater (b) Sfæriske koordinater

6.1.5 Definition (Sfæriske koordinater i rummet)

Den kontinuert differentiable afbildning givet ved

$$\mathbb{R}^3 \ni (\rho, \theta, \phi) \mapsto (x(\rho, \theta, \phi), y(\rho, \theta, \phi), z(\rho, \theta, \phi)) \in \mathbb{R}^3$$

$$x(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \phi,$$

kaldes sfæriske koordinater i rummet. Den er injektiv på mængden af (ρ, θ, ϕ) der opfylder

$$0 < \rho, \quad 0 < \theta \leq 2\pi \quad 0 < \phi < \pi.$$

På denne mængde er absolutværdien for Jacobi-determinanten for afbildningen givet ved

$$\left| \det \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{pmatrix} \right| = \rho^2 \sin \phi.$$

Eksempel 6.1.2 (Benyttelse af sfæriske koordinater) Vi vil benytte sfæriske koordinater til at udregne rumfanget af en kugle med radius R i rummet. Kuglen kan i sfæriske koordinater udtrykkes som mængden af (ρ, θ, ϕ) , som opfylder

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Vi finder derfor, at rumfanget af kuglen er

$$\int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} 1 \rho^2 \sin \phi d\phi d\theta d\rho = 4\pi R^3/3.$$

6.2 Kurveintegral

6.2.1 Definition (Kurveintegral og kurvelængde)

Lad C være en parametriseret kurve i \mathbb{R}^n repræsenteret ved en kurveparametrisering $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, som er glat på hele det indre af I . Hvis f er en kontinuert funktion på sporet $\mathbf{r}(I)$, definerer vi **kurveintegralet**^a af f langs C ved

$$\int_C f ds = \int_I f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Venstresiden er blot en skrivemåde. Specielt definerer vi længden af kurven ved

$$l(C) = \int_I \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

^aStrengt taget er integralet over I et uegentligt integral, for vi har kun defineret $\mathbf{r}'(t)$ i det indre af I , så kurveintegralet er kun defineret, hvis det konvergerer.

Det bør være intuitivt klart, at definitionen af kurvelængde som integralet af længden af farten svarer til den gængse opfattelse af kurvelængde. Bemærk at antagelsen om glathed sikrer, at parametriseringen ikke løber flere gange frem og tilbage over kurven. I et punkt, hvor parametriseringen ændrer retning, må hastigheden jo være nul.

Notationen $\int_C f ds$ for kurveintegralet skal minde en om, det resultat vi nu viser, nemlig at reparametriseringer ikke ændrer kurveintegralet.

6.2.2 Sætning (Reparametriseringer og kurveintegraler)

Lad $\mathbf{r} \circ h : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en reparametrisering af en kurveparametrisering $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, som er glat på det indre af I . Hvis reparametriseringsfunktionen h er glat og f er en kontinuert funktion på $\mathbf{r}(I)$, da vil

$$\int_I f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{I'} f(\mathbf{r} \circ h(t)) \|(\mathbf{r} \circ h)'(t)\| dt.$$

Bevis. Beviset følger umiddelbart ved integration ved substitution

$$\int_{I'} f(\mathbf{r} \circ h(t)) \|(\mathbf{r} \circ h)'(t)\| dt = \int_{I'} f(\mathbf{r} \circ h(t)) \|\mathbf{r}' \circ h(t)\| |h'(t)| dt = \int_I f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

□

Eksempel 6.2.1 (Længden af cirkelbuen) Lad os benytte formlen for kurvelængde til at beregne længden af cirkelbuen, som parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Vi får, at længden af hastighedsvektoren er $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t)} = r$. Så længden er $\int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$. Hvis vi i stedet for havde betragtet parametrisering defineret på $[0, 4\pi]$ ville kurven gennemløbe cirklen 2 gange og længden ville være $4\pi r$. Det er her vigtigt at huske, at disse to parametriseringer ikke repræsenterer samme kurve, selvom punktmængden, nemlig cirklen, er den samme.

Vi kommer nu til en anden meget vigtig type af integraler langs en kurve nemlig det såkaldte *arbejdsintegral* eller *strømintegral*. Her er det ikke en reel funktion, der bliver integreret, men en vektorfunktion $\mathbf{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$. Bemærk at \mathbf{F} afbilder fra en delmængde af \mathbb{R}^n ind i \mathbb{R}^n . En sådan vektorfunktion kaldes også et *vektorfelt*. Desuden er det ikke blot en kurve, der indgår i et arbejdsintegral, men en *orienteret* kurve. Ordet arbejdsintegral referer til, at hvis \mathbf{F} repræsenterer et kraftfelt, vil arbejdsintegralet netop give, det arbejde kraften udfører langs kurven.

6.2.3 Definition (Arbejdsintegral)

Lad C være en orienteret kurve i \mathbb{R}^n repræsenteret ved en parametrisering $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ glat på det indre af I . Hvis $\mathbf{F} : \mathbf{r}(I) \rightarrow \mathbb{R}^n$ er et kontinuert vektorfelt, definerer vi arbejdsintegralet (også kaldet strømintegralet) af \mathbf{F} langs C ved

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_I \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Venstresiden er blot en skrivemåde.

6.2.4 Sætning (Reparametriseringer og arbejdsintegraler)

Lad $\mathbf{r} \circ h : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en reparametrisering af kurveparametriseringen $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, som er glat på det indre af I . Hvis reparametriseringsfunktionen h er glat og orienteringsbevarende og \mathbf{F} er et kontinuert vektorfelt på $\mathbf{r}(I)$, da vil

$$\int_I \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{I'} \mathbf{F}(\mathbf{r} \circ h(t)) \cdot (\mathbf{r} \circ h)'(t) dt.$$

Hvis h er orienteringsvendende skifter arbejdsintegralet fortegn.

Bevis. Beviset følger igen umiddelbart ved integration ved substitution. Vi skal blot bemærke, at hvis $h'(t) < 0$ skifter integralet fortegn ved substitutionen. □

6.2.5 Sætning (Arbejdsintegraler for simple kurver)

Lad $C \subseteq \mathbb{R}^n$ være en glat simpel kurve med en orientering karakteriseret ved enhedstangentfeltet $\mathbf{T} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$. Da vil arbejdsintegralet af et kontinuert vektorfelt \mathbf{F} langs C være givet ved

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Bevis. Hvis kurven repræsenteres af parametriseringen $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, har vi ifølge Definition 1.1.11, at $\mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\|$, for alle indre punkter t i I . Vi får derfor, at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_I \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_I \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

□

Arbejdsintegraler kan benyttes til at give en flervariabel version af analysens fundamentalsætning.

6.2.6 Sætning (Analysens fundamentalsætning flervariabel version)

Lad $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert differentiabel funktion defineret på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Lad C være en orienteret kurve fra et punkt $p \in U$ til et punkt $q \in U$, som kan repræsenteres ved en parametrisering, som er glat på det indre af dens definitionsinterval og hvis spor er indeholdt i U . Da vil

$$f(q) - f(p) = \int_C \nabla f \cdot ds.$$

Bevis. Lad $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en parametrisering som repræsenterer den givne kurve. Da vil $\mathbf{r}(a) = p$ og $\mathbf{r}(b) = q$. Derfor vil

$$\int_C \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)),$$

hvor vi har benyttet Kædereglen og Analysens fundamentalsætning. □

Vi afslutter diskussionen af kurveintegraler med en flervariabel version af delvis integration, nemlig den berømte Greens formel. Husk at vi allerede har set en flervariabel version af integration ved substitution nemlig Transformationsætningen 6.1.3. Greens formel er en variant af delvis integration i planen.

Greens formel gælder for en lang række af domæner i planen, men man er nødt til at have visse antagelser på dem. Vi vil nu beskrive en stor klasse af domæner, for hvilke vi kan bevise Greens formel. Definitionen er lidt teknisk, man bør sammenholde den med Figur 6.3. Moralen er, at stort set alle domæner er tilladte.

6.2.7 Definition (Regulære domæner)

Vi vil sige at en mængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er et **regulært**^a domæne, hvis det kan skrives på følgende to måder

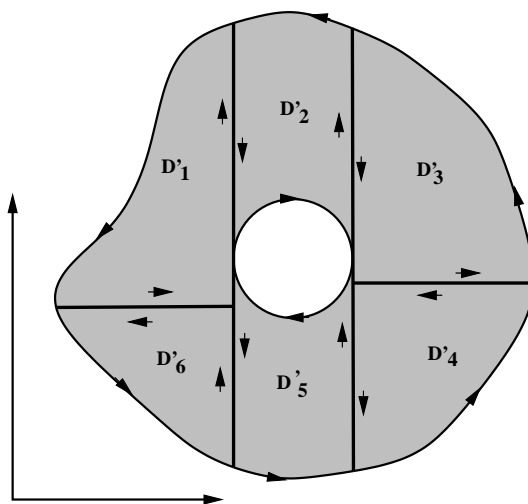
$$D = \bigcup_{i=1}^m D'_i \quad \text{og} \quad D = \bigcup_{i=1}^k D''_i,$$

hvor D'_i , $i = 1, \dots, m$, er elementære domæner på formen (1.7), hvor de indgående funktioner o og u skal være kontinuert differentiable på det indre af deres definitionsintervaller og D''_i , $i = 1, \dots, k$, er elementære domæner på formen (1.8) igen med den samme antagelse om kontinuert differentibilitet. Desuden må mængderne D'_i , $i = 1, \dots, m$, ikke have indre punkter fælles, d.v.s. $D'_i \cap D'_j \subseteq \partial D'_i \cap \partial D'_j$ for alle $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$ og ligeså for mængderne D''_i , $i = 1, \dots, k$.

Integralet over et regulært domæne kan skrives på to måder

$$\int_D f \, dA = \sum_{i=1}^m \int_{D'_i} f \, dA = \sum_{i=1}^k \int_{D''_i} f \, dA.$$

^aBetegnelsen *regulært* er ikke standard i litteraturen.



Figur 6.3: Et regulært domæne.

Figur 6.3 viser et regulært domæne. Det er tegnet som forening af elementære domæner på formen (1.7). Læseren bør selv forsøge at finde mængden som forening af elementære domæner på formen (1.8).

6.2.8 Bemærkning (Randen af et regulært domæne)

Randen ∂D af et regulært domæne D er en delmængde af randene for de enkelte deldomæner

$$\partial D \subseteq \bigcup_{i=1}^m \partial D'_i.$$

Men ofte vil ∂D være en ægte delmængde af $\cup_{i=1}^m \partial D'_i$. Et punkt $x \in \partial D'_i$ kan nemlig være et indre punkt i D , men så er det fordi $x \in \partial D'_i \cap \partial D'_j$ for $i \neq j$. Se Figur 6.3. Randen ∂D består netop af de punkter i $\cup_{i=1}^m \partial D'_i$, som ikke er indre i D .

Vi vil vise Greens formel for regulære domæner.

6.2.9 Sætning (Greens formel)

Lad $D \subseteq \mathbb{R}^2$ være et regulært domæne hvis rand ∂D består af en eller flere glatte simple lukkede kurver. Vi vælger en orientering af disse kurver givet ved enhedstangentfelter \mathbf{T} karakteriseret ved, at domænet D ligger til venstre for ∂D set i retningen \mathbf{T} . Hvis $\mathbf{F} = (P, Q)$ er et vektorfelt, som er kontinuert differentiabel på en åben mængde, der indeholder D , har vi

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Bevis. Vi vil først bevise formelen i tilfældet hvor $\mathbf{F} = (P, 0)$. Her behøver vi kun at antage, at D kan udtrykkes ved mængder på formen (1.7). Hvis $\mathbf{F} = (0, Q)$ og D kan udtrykkes ved mængder på formen (1.8), følger resultatet ved et lignende bevis eller ved at ombytte rollerne af x og y . Bemærk at man, når man ombytter x og y , også ændrer orienteringsreglen. Derfor er der forskelligt fortegn foran P -leddet og Q -leddet. For at vise formelen for et generelt vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$, bruger vi, at et regulært domæne både kan skrives ud fra mængder på formen (1.7) og ud fra mængder på formen (1.8). Greens formel følger da ved simpelthen at addere de to specialtilfælde. (I Opgave 6.13 skal man vise Greens formel direkte for $\mathbf{F} = (0, Q)$ for domæner på formen (1.7).)

Vi betragter først tilfældet, hvor D blot er et *elementært domæne* på formen (1.7).⁴ Vi benytter notationen i (1.9). Lad os finde integralet langs undersiden af randen \mathcal{U} . Dette stykke er ifølge vores regel orienteret fra venstre til højre. En parametrisering svarende til denne orientering, altså så $\mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\|$ er givet ved

$$\mathbf{r} : x \mapsto (x, u(x)), \quad x \in [a, b].$$

⁴Elementære domæner er strengt taget ikke et specialtilfælde af sætningen for randen har normalt hjørner og er derfor ikke glat. Kurveintegralet langs randen af et elementært domæne giver alligevel mening, når vi opfatter det som en sum over de 4 randstykker.

Vi finder $\mathbf{F}(\mathbf{r}(x)) = (P(x, u(x)), 0)$ og $\mathbf{r}'(x) = (1, u'(x))$. Vi får derfor for denne del af arbejdsintegralet

$$\int_{\mathcal{U}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b P(x, u(x)) dx.$$

For oversiden af randen får vi et helt tilsvarende udtryk bortset fra, at orienteringen er modsat, så vi får

$$\int_{\mathcal{O}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = - \int_a^b P(x, o(x)) dx.$$

På lignende måde konkluderer vi, da \mathbf{F} ikke har nogen y -komponent, at

$$\int_{\mathcal{H}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 0, \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 0.$$

Vi vender os nu mod planintegralet over domænet D . Vi udregner det som et itereret integral altså

$$\int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=u(x)}^{y=o(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b P(x, u(x)) - P(x, o(x)) dx.$$

Vi ser altså, at planintegralet netop er lig med summen af rand integralerne.

Vi vil nu skitsere, hvordan man beviser formelen for et regulært domæne $D = \cup_{i=1}^m D'_i$, hvor hver af deldomænerne er på formen (1.7) og opfylder betingelserne i Definition 6.2.7 af et regulært domæne. Integralet over D er summen af integralerne over D'_i . Vi ved fra det netop viste, at Greens formel holder for hvert af deldomænerne. Altså

$$\int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dA = \sum_{i=1}^m \int_{D'_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dA = \sum_{i=1}^m \int_{\partial D'_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Vi har i bemærkningen ovenfor set, at ∂D kan være en ægte delmængde af $\cup_{i=1}^m \partial D'_i$. På den anden side ser man fra Figur 6.3, at hvis en del af kurven ∂D_i også er i ∂D_j med $j \neq i$, vil orienteringerne være modsat og derfor vil denne del slet ikke bidrage til summen af integralerne. Med andre ord

$$\sum_{i=1}^m \int_{\partial D'_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

og vi har vist Greens formel for $\mathbf{F} = (P, 0)$. □

Man bør bemærke, at Greens formel også gælder, hvis randen ikke er glat i et endeligt antal punkter. Beviset er helt det samme.

Eksempel 6.2.2 (Arealer fra arbejdsintegraler) Vi betragter vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (-y/2, x/2)$. Vi ser fra Greens formel, at hvis D er et regulært domæne, vil

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_D 1 dA = \text{Areal}(D)$$

Lad os benytte dette til at udregne arealet af *ellipsen* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Vi kan parametrisere randen ved $t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Bemærk at denne parametrisering svarer til orienteringen foreskrevet i Greens formel. Vi indsætter parametriseringen $\mathbf{F}(a \cos(t), b \sin(t)) = (-b \sin(t)/2, a \cos(t)/2)$ og vi finder derfor

$$\text{Areal}(D) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -b \sin(t)/2 \\ a \cos(t)/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} ab/2 dt = \pi ab.$$

6.2.10 Bemærkning (Konservative vektorfelter)

Vi ved fra flervariabel versionen af analysens fundamentalsætning, at hvis C er en orienteret lukket kurve og hvis f er kontinuert differentiabel, vil

$$\int_C \nabla f \cdot ds = 0.$$

Da randen af et regulært område D er en eller flere lukkede kurver, finder vi derfor, at $\int_{\partial D} \nabla f \cdot ds = 0$, hvis f er en funktion af to variable. Vi ser, at dette er i overensstemmelse med Greens formel, hvis f er to gange kontinuert differentiabel. For hvis vi skriver $\nabla f = (P, Q)$ vil

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0,$$

hvor vi har benyttet reglen om ombytning af de blandede partielt afledte.⁵ Man kan generelt vise, at kontinuert differentiable vektorfelter defineret på hele \mathbb{R}^2 , som har arbejdsintegral lig med nul rundt langs enhver lukket kurve, netop er gradientfelter ∇f , hvor f er to gange kontinuert differentiabel. Disse felter kan også karakteriseres, som de der opfylder

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

når de skrives på formen $\mathbf{F} = (P, Q)$. Man kalder disse felter for *konservative* vektorfelter.

⁵Se Korollar 9.19 i *Funktioner af en og flere variable*.

6.3 Fladeintegraler

6.3.1 Definition (Fladeintegral og fladeareal)

Lad S være en parametriseret flade repræsenteret ved en fladeparametrisering $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, som er glat på det indre af D . Hvis f er en kontinuert funktion på $\mathbf{r}(D)$, definerer vi fladeintegralet af f over S ved

$$\int_S f dS = \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA = \int_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| dA$$

Venstresiden er blot en skrivemåde. Et fladeintegral er altså defineret, som et planintegral over definitionsmængden. I det sidste udtryk ovenfor har vi benyttet normalvektoren defineret i Definition 1.2.3.

Specielt definerer vi arealet af fladen ved

$$\text{Areal}(S) = \int_S 1 dS = \int_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA = \int_D \|\mathbf{N}(u, v)\| dA.$$

For at motivere disse definitioner bemærker vi, at der generelt gælder, at arealet af det parallellogram, der udspændes af to vektorer, $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$, er $\|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\|$. Bemærk at vi kun ved, hvordan man beregner fladeintegraler, hvis definitionsmængden er sammensat af elementære domæner. Vi vil altså kun betragte denne type flader.

Vi burde selvfølgelig vise, at fladeintegraler er uafhængige af parametriseringen, men vi springer det over her. Se opgave 6.12.

Eksempel 6.3.1 (Arealet af kuglefladen)

Som anvendelse af formlen for areal af en flade, udregner vi arealet af kuglefladen med radius R . Den kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi]. \quad (6.2)$$

Sammelnign med sfæriske koordinater Definition 6.1.5 og Eksempel 1.2.1. Vi finder, at

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = R^2 \sin(\phi)$$

(sammenlign igen med sfæriske koordinater). Vi får derfor den velkendte formel, at arealet for kuglefladen er

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta = 4\pi R^2.$$

Ligesom der for kurver er flere typer integraler, er det samme tilfældet for flader. Hvis man på en parametriseret flade har et vektorfelt, kan man definere

fluksintegralet gennem fladen. Hvis vektorfeltet er et hastighedsfelt for en væske, vil fluksintegralet være det rumfang af væske der strømmer gennem fladen per tid. Men ligesom et arbejdsintegral afhænger af orienteringen af kurven, altså af retningen af enhedstangenten, vil fluksintegralet afhænge af retningen af normalvektoren.

6.3.2 Definition (Fluksintegral)

Lad S være en parametriseret flade repræsenteret ved parametriseringen $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, som er glat på det indre af D . Hvis \mathbf{F} er et kontinuert vektorfelt på sporet $\mathbf{r}(D)$, definerer vi fluksintegralet af \mathbf{F} over S ved

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) dA.$$

Venstresiden er blot en skrivemåde.

6.3.3 Sætning (Fluksintegraler for glat orienteret flade)

Lad S være en glat orienteret flade med orientering defineret af enhedsnormalfeltet \mathbf{n} . Da vil fluksintegralet af \mathbf{F} over S være givet ved

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Bevis. Hvis $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en parametrisering af fladen, som stemmer overens med orienteringen i alle indre punkter af D (se Definition 1.2.8), d.v.s. så

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{N}(u, v) / \|\mathbf{N}(u, v)\|,$$

får vi

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|} \|\mathbf{N}(u, v)\| dA = \int_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) dA.$$

□

Eksempel 6.3.2 Lad os udregne fluksintegralet af vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

over enhedskuglefladen, orienteret ved den udadrettede normal. Vi benytter parametriseringen i (6.2) med $R = 1$. Vi finder, at normalvektoren er

$$\mathbf{N}(\theta, \phi) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin^2 \phi \\ \sin \theta \sin^2 \phi \\ \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix} = -\sin \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Bemærk at \mathbf{N} er indadrettet, da den er den udadrettede normalvektor gange $-\sin \phi$. For at få det ønskede fluksintegral, skal vi altså skifte fortegn. Bemærk at $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -\sin \phi$. Vi finder derfor, at fluksintegralet er

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi.$$

Vi skal til slut uden bevis give generalisationerne af Greens formel til fladeintegraler. Det drejer sig om Gauss' og Stokes' formler. For Gauss' formel, også kaldet Divergenssætningen, bør man igen diskutere, hvilke flader og domæner der er tilladte, men vi skal udelade denne diskussion og simpelthen kalde dem regulære. De kan defineres på samme måde som i planintegraltilfældet.

I formlerne indgår to typer af afledte af vektorfelter $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, nemlig *divergensen* og *rotationen*.

6.3.4 Definition (Divergens og rotation)

Lad $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ være et differentiabelt vektorfelt. Divergensen af vektorfeltet \mathbf{F} er skalarfunktionen

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

De to venstresider er skrivemåder. Rotationen af vektorfeltet \mathbf{F} er vektorfeltet

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

De tre venstresider er skrivemåder.

6.3.5 Sætning (Gauss' formel, Divergenssætningen)

Lad $R \subseteq \mathbb{R}^3$ være et "regulært" domæne og randen ∂R bestå af en eller flere glatte lukkede flader orienteret ved den udadrettede normal \mathbf{n} . Hvis \mathbf{F} er et kontinuert differentiabelt vektorfelt på R , vil

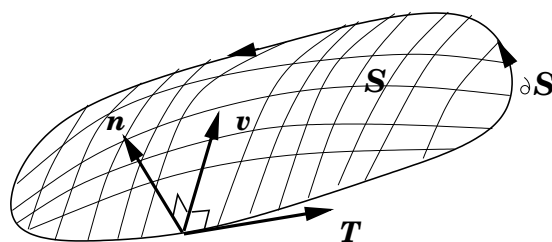
$$\int_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

6.3.6 Sætning (Stokes' formel)

Lad S være en orienteret glat flade, som kan parametriseres ved en afbildning \mathbf{r} , som er defineret og injektiv på et regulært domæne D i \mathbb{R}^2 . Som i Bemærkning 1.2.11 kalder vi $\partial S = \mathbf{r}(\partial D)$ randen af S og antager, at den består af en eller flere glatte simple lukkede kurver. Vi orienterer disse kurver som følger. I et punkt på ∂S har vi vektoren \mathbf{n} , som giver orienteringen af S . Vi har også en vektor \mathbf{v} , som er ortogonal på \mathbf{n} og vinkelret på ∂S og som peger mod S . Orienteringen \mathbf{T} af ∂S skal være sådan, at $\mathbf{T}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$ er et højre system. Da gælder, at

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

Det kan være ret svært at forstå orienteringen af S , men i tilfældet, hvor ∂S kun består af en kurve, er det lidt lettere at udtrykke. Hvis vi ser fladen S fra oven defineret ved \mathbf{n} , vil den definerede orientering svare til et omløb af ∂S imod urets retning. Se Figur 6.4



Figur 6.4: Illustration af orienteringerne i Stokes formel

6.4 Opgaver til Kapitel 6

6.1 Opgave

Udregn både ved brug af standard Kartesiske koordinater og ved brug af polære koordinater planintegralet $\iint_D y \, dA$, når domænet D er halvcirklen $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

6.2 Opgave

Udregn rumintegralet $\iiint_R x^2 + yz \, dV$, når domænet R er

- kassen $[0, 1] \times [0, 2] \times [0, 1]$
- området begrænset af koordinatplanerne og planen $x+y+z=1$

(c) mængden $\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$

(d) mængden $\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

6.3 Opgave

Udregn integralet af $x^2 + y^2x$ over mængden $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$ både ved først at integrere efter x og så y og ved først at integrere efter y og så x .

6.4 Opgave

Udregn integralet af xy over mængden afgrænset af linierne $y = 0$, $y = x$ og cirklerne $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 + y^2 = 4$.

6.5 Opgave

Udregn integralet af funktionen $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ over mængden $\{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

6.6 Opgave

Udregn integralet af funktionen x^2 over mængden $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

6.7 Opgave

Find kurveintegralet $\int_C f ds$ af $f(x, y, z) = x$ langs kurven C parametriseret ved $(t, t \sin(t), t \cos(t))$, $0 \leq t \leq \pi/4$.

6.8 Opgave

Udregn arbejdsintegralet af vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, xy^2)$ modsat urets retning langs randen af domænet $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 - y^2\}$.

6.9 Opgave

Find arealet af følgende flader.

(a) Fladen bestemt ved $x + 2y + z = 2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Den del af enhedskuglefladen der ligger over området $x^2 + y^2 \leq 1/4$.

6.10 Opgave

Lad $D \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuert differentiabel på det indre af D . Udtryk arealet af grafen for f som et planintegral over D .

6.11 Opgave

Betragt kurveparametriseringen

$$t \mapsto (\cos(t), \sin(t) + \sin^2(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

- Vis at den definerer en simpel lukket kurve.
- Tegn kurven (gerne ved brug af Maple).
- Udregn længden af kurven. (Svaret skal blot angives som et integral.)
- Udregn ved Greens formel arealet af det område kurven omslutter.

6.12 Opgave

I denne opgave skal vi undersøge, hvordan fladeintegraler ændrer sig under reparametriseringer. Lad D være et lukket elementært domæne. Lad $T : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ være kontinuert differentiabel på en åben mængde U , som indeholder D . Hvis T er injektiv på D og $\mathbf{r} : T(D) \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en fladeparametrisering, som er glat på det indre af $T(D)$, definerer $\mathbf{r} \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ en reparametrisering.

Lad $f : \mathbf{r}(T(D)) \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en kontinuert funktion. Bevis ved brug af Transformationssætningen 6.1.3, at

$$\begin{aligned} & \int_D f(\mathbf{r} \circ T(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r} \circ T}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r} \circ T}{\partial v}(u, v) \right\| dA \\ &= \int_{T(D)} f(\mathbf{r}(u', v')) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'}(u', v') \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v'}(u', v') \right\| dA \end{aligned}$$

Vink: Benyt formlen i Opgave 1.11.

6.13 Opgave

I beviset for Greens formel viste vi kun sætningen for vektorfelter på formen $\mathbf{F} = (P, 0)$, hvis det elementære domæne var på formen (1.7). I denne opgave skal vi se, at man også på disse domæner kan vise sætningen for vektorfelter på formen $\mathbf{F} = (0, Q)$.

- Vis ved brug af kædereolen, at

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{u(x)}^{o(x)} Q(x, y) dy \right) = Q(x, o(x))o'(x) - Q(x, u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{o(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy.$$

Vink: Skriv funktionen i parenteser som sammensat af $x \mapsto (x, u(x), o(x))$ og $(x, u, o) \mapsto \int_u^o Q(x, y)dy$ og brug derefter kædereglene.

(b) Vis ved integration af formlen i (a) fra $x = a$ til $x = b$, at

$$\begin{aligned} \int_{u(b)}^{o(b)} Q(b, y)dy - \int_{u(a)}^{o(a)} Q(a, y)dy &= \int_a^b Q(x, o(x))o'(x)dx \\ &\quad - \int_a^b Q(x, u(x))u'(x) \\ &\quad + \int_{x=a}^{x=b} \int_{u(x)}^{o(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dy. \end{aligned}$$

(c) Argumenter for, at formlen i (b) netop er Greens formel for $\mathbf{F} = (0, Q)$.

Indeks

- alternerende harmonisk række, 65
- analysens fundamentalsætning, 94
- arbejdsintegral, 93
 - arealberegning ved, 98
 - for simpel kurve, 94
- Archimedes' spiral, 20
- arctan
 - Taylorrække for, 77
- areal, 87, 98
 - af flade, 99
 - af kugleflade, 99
 - beregnet ved arbejdsintegral, 98
- begyndelsesbetingelse, 37, 43
- begyndelsesværdiproblem, 37
- bibetingelse, 31
- cirkel, 1, 2, 93
- cosinus
 - Taylorpolynomium for, 61
 - Taylorrække for, 75
- cycloide, 20
- cylinder, 21
- differentialligning, 37
 - m 'te ordens, 37
 - begyndelsesbetingelse for, 37
 - første ordens lineær, 44
 - generel løsning til, 39
 - global løsning til, 38, 43, 46
 - homogen, 38, 44, 48, 50
 - højere ordens, 39
 - inhomogen, 38, 45, 51, 52
 - karakteristisk polynomium for, 48–51, 53, 54
 - lineær, 38
 - logistisk, 42
 - lokal løsning til, 38
 - maksimal løsning til, 38, 43
 - med konstante koefficienter, 38, 47
 - partikulær løsning til, 39
 - separabel, 39, 41
 - sædvanlig, 37
- divergens, 101
- Divergenssætningen, 101
- domæner
 - elementære, 12, 88, 95
 - regulære, 95
- e
 - approksimativ værdi for, 63
 - irrationalitet af, 66
- eksistens og entydighedssætning
 - for 2. og højere ordens lineære ligninger med konstante koefficienter, 52
 - for lineære 1. ordens ligninger, 46
 - for separable ligninger, 41
 - generel version, 38
- eksponentialfunktion
 - kompleks, 40, 77
 - Taylorpolynomium for, 60
 - Taylorrække for, 75
- ekstremum, 31
 - under bibetingelse, 31
- elementære domæner, 12, 88, 95
 - integration over, 88
- ellipse, 20, 98
- ellipsoide, 22
- enhedsnormalfelt, 13
 - udadrettet, 15

- enhedstangentfelt, 8, 94
- fart, 3
- flade, 1, 12
 - areal af, 99
 - enhedsnormalfelt for, 13
 - glat orienteret, 12, 13
 - integral over, 99
 - lukket, 14
 - niveau-, 26
 - orientering af, 13
 - rand, 14
 - tangentplan for, 11
- fladeintegral, 99
- fladeparametrisering, 9
 - glat, 10
 - normalvektor for, 10
 - reparametrisering af, 104
- fluksintegral, 100
- Gauss' formel, 101
- geometrisk række, 67, 76
- glat, 3
 - fladeparametrisering, 10
 - kurveparametrisering, 3
 - orienteret flade, 12, 13, 100
 - reparametrisering, 2
 - simpel kurve, 8
- global løsning til differentiallyigning, 52
- gradient og niveaumængde, 19, 33
- graf, 17, 18
 - parametrisering for, 17
 - tangentlinie til, 17
 - tangentplan til, 18
- Greens formel, 96
- gættemetode, 52
- hastighedsvektor, 3
- helix, 20
- homogen
 - differentiallyigning, 38, 44, 48, 50
- højere ordens differentiallyigninger, 39
- implicit differentiation, 25, 26
- implicit givne funktioner, 23–25
 - differentiation af, 25
 - spurveskydning med, 42
- inhomogen
 - differentiallyigning, 38, 45, 51, 52
- integration ved substitution, 89
- invers funktion, 2, 5, 9, 14, 28
 - Jacobi-matricen for, 28
 - sætning om, 28
- itereret integral, 88
- Jacobi-determinant, 89
- Jacobi-matricen, 3, 10, 29, 89
 - for invers funktion, 28
- karakteristisk polynomium, 48, 51, 53, 54
 - for 2. ordens differentiallyigning, 49
 - for højere ordens differentiallyigning, 50
- kompleks eksponentialfunktion, 40, 77
 - Taylorrække for, 77
- konservative vektorfelter, 98
- konstante koefficienter
 - lineær differentiallyigning med, 38, 47
- konvergensradius, 69, 71
 - kvotient- og rodkriterie for, 70
- kugleflade, 15
 - areal af, 99
- kurve, 1, 5
 - enhedstangentfelt for, 8
 - glat simpel, 8
 - integral langs, 92
 - længde af, 92
 - niveau-, 26
 - orienteret, 2
 - parametriseret, 2
 - simpel, 5
 - simpel lukket, 5
- kurveintegral, 92
- kurvelængde, 92

- kurveparametrisering, 1
 - endepunkter for, 1
 - fart, 3
 - glat, 3
 - hastighedsvektor, 3
 - lukket, 1
 - lukket simpel, 5
 - simpel, 5
 - spor af, 1
 - spor af simpel, 5
 - tangentlinie for, 4
- Lagranges metode, 32
- Lagrangske multiplikator, 32
- ledvis differentiation og integration, 73
- lineær differentiaalligning, 38
 - homogen, 38
 - inhomogen, 38
 - med konstante koefficienter, 38
- ln
 - Taylorpolynomium for, 61
 - Taylorrække for, 75
- logistisk ligning, 42
- lukket, 1
 - flade, 14
 - kurveparametrisering, 1
 - simpel kurve, 5
- længde
 - af cirkel, 93
 - af kurve, 92
- Maple, 21, 80
- Möbius bånd, 16
- niveauflade, 18, 26
- niveaukurve, 18, 26
 - og Lagranges metode, 34
 - parametrisering af, 31
- niveaumængde, 18, 26, 31
 - parametrisering af, 31
- normalvektor, 10
 - for tangentplan, 11
- omvendt funktion, **Se** invers funktion
- orienteret flade, 12, 100
- orienteret kurve, 2, 93, 102
- parametrisering
 - for graf, 17
 - for tangentlinie, 4, 5, 17
 - for tangentplan, 11
- planintegral, 87
- polære koordinater, 90, 91
- potensrække, 67, 78
 - konvergensradius for, 69
 - ledvis differentiation og integration af, 73
 - regning med, 73
 - sumfunktion for, 72
- rand, 95
 - af flade, 14
- regulære domæner, 95
 - randen af, 95
- reparametrisering, 1, 9
 - af fladeparametrisering, 9, 22, 104
 - af kurveparametrisering, 1, 2
 - for arbejdsintegraler, 93
 - for kurveintegraler, 92
 - glat, 2
 - orienteringsbevarende, 2
 - orienteringsvendende, 2
- resonansfænomen, 53, 55
- restled, 62, 63
 - Taylors formel med, 62
- rotation, 101
- rumfang, 87
- rumintegral, 87
- rækker, 80
- sædvanlig differentiaalligning
 - m 'te ordens, 37
- separabel differentiaalligning, 39, 41
- separation af de variable, 42
- sfæriske koordinater, 91, 92, 99
- simpel, 5
 - glat lukket kurve, 96

- kurve, 5, 94
- kurveparametrisering, 5
- lukket kurve, 5
- lukket kurveparametrisering, 5
- sinus
 - Taylorpolynomium for, 61
 - Taylorrække for, 75
- spor
 - af fladeparametrisering, 9
 - af kurveparametrisering, 1, 5
- Stokes' formel, 102
- strømintegral, **Se** arbejdsintegral
- sumfunktion, 72, 75, 78
 - afledt af, 73
 - kontinuitet og differentiabilitet af, 72
 - stamfunktion til, 73
 - Taylorrække for, 74
- sædvanlig differential ligning, 37

- tangentlinie, 4, 5
 - parametrisering af, 4, 17
- tangentplan, 11
 - normalvektor for, 11
 - parametrisering af, 11
- Taylorpolynomium, 60
 - for eksponentialfunktion, 60
 - for \ln , 61
 - for sinus og cosinus, 61
- Taylorrække, 74, 77
 - for arctan, 77
 - for sinus, cosinus, exp, \ln , 75
- Taylors formel, 62
- torus, 21
- Transformationsætningen, 89

- udadrettet normal, 15, 100, 101
- ukendte koefficienters metode, **Se** gættemetode

- vektorfelt, 93
 - divergens af, 101
 - rotation af, 101

