Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992

Matematik 3 SS

Opgaverne vægtes ens.

Opgave 1

De stokastiske variable X_1, X_2 og X_3 opfylder ulighederne $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq X_3$. Den simultane tæthedsfunktion for (X_1, X_2, X_3) er

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_3} \quad , \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \; .$$

Definér stokastiske variable Y_1, Y_2 og Y_3 ved

$$Y_1 = X_1 \; , \quad Y_2 = X_2 - X_1 \; \text{ og } \; Y_3 = X_3 - X_2 \; .$$

1. Undersøg, om X_1, X_2 og X_3 er uafhængige.
2. Bestem den simultane fordeling for Y_1, Y_2 og Y_3.
3. Undersøg, om Y_1, Y_2 og Y_3 er uafhængige.
4. Bestem de marginale fordelinger af Y_1, Y_2 og Y_3.

Opgave 2

$X_1, X_2, \ldots$ betegner en følge af uafhængige positive stokastiske variable, der alle har en fordeling med tæthedsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 < x \leq 1 \\ ae^{-(x-1)} & 1 < x < \infty \; . \end{cases}$$

1. Bestem konstanten a.
2. Vis, at $E(X_1) = \frac{14}{9}$ og $E({X_1}^2) = \frac{7}{2}$.
3. Anvend den centrale grænseværdisætning til at bestemme x (omtrentlig værdi) således, at
$$P(|X_1 + X_2 + \cdots + X_{18} - 28| \leq x) = 95\% \; .$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad $t_1, t_2, \ldots, t_n$ være n uafhængige stokastiske variable, alle ligefordelte over $[0,1]$, og lad

$$t_\nu = 0, \varepsilon_{\nu 1}\varepsilon_{\nu 2} \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu j} 2^{-j} \quad ; \; \nu = 1, 2, \cdots, n$$

være deres binære repræsentationer.

(Ækvivalent model: $(\varepsilon_{\nu j})_{\nu=1,\cdots,n\,,\, j=1,2,\ldots}$ er uafhængige Bernoulli fordelte stokastiske variable, alle svarende til parameterværdien $\frac{1}{2}$).

Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver det største $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ således, at der findes et $\nu \in \{1, 2, \cdots, n\}$ med $\varepsilon_{\nu 1} = \varepsilon_{\nu 2} = \cdots = \varepsilon_{\nu k} = 0$. (Tilfældet $X = 0$ svarer til at $\varepsilon_{\nu 1} = 1$ for alle ν).

1. Gør rede for at X på naturlig måde kan opfattes som maksimum af n stokastiske variable.

2. Bestem, i tilfældet $n = 1$, fordelingen af X. Er fordelingen en af de kendte diskrete fordelinger?

3. Bestem dernæst fordelingen af X i det generelle tilfælde, hvor n er et vilkårligt naturligt tal. Vink: Bestem f.eks. $P(X \leq k)$.

4. Find, ligeledes i det generelle tilfælde, et udtryk for middelværdien $E(X)$.

5. Udregn $E(X)$ i tilfældene $n = 1$ og $n = 2$.

Opgave 4

I en serie på 1000 kast med samme terning opnåede man "succes", dvs. "seks øjne", i 151 af kastene.

1. Opstil den naturlige statistiske model, der hører til dette forsøg; sandsynligheden θ for at få en sekser i ét kast vælges som parameter.

2. Opskriv likelihoodfunktionen og bestem maksimaliseringsestimatoren $\hat{\theta}$.

I de følgende spørgsmål betegner H_0 nulhypotesen "$\theta = 1/6$".

3. Beregn kvotientteststørrelsen Q for test af H_0.

4. Vis, at den eksakte værdi af testsandsynligheden er en sum af punktsandsynligheder i en bestemt binomialfordeling.

5. Bestem en (approksimativ) værdi af testsandsynligheden (vedlagte bilagsmateriale - to sider - kan benyttes).

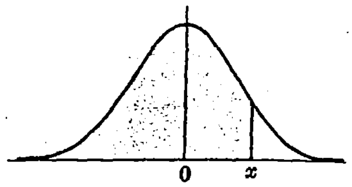
6. Finder du, at nulhypotesen kan accepteres?

BILAG
335/592
opg. 4 - 1/2

TABLE 47

AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE from $-\infty$ to x

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$



NOTE: $\mathrm{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

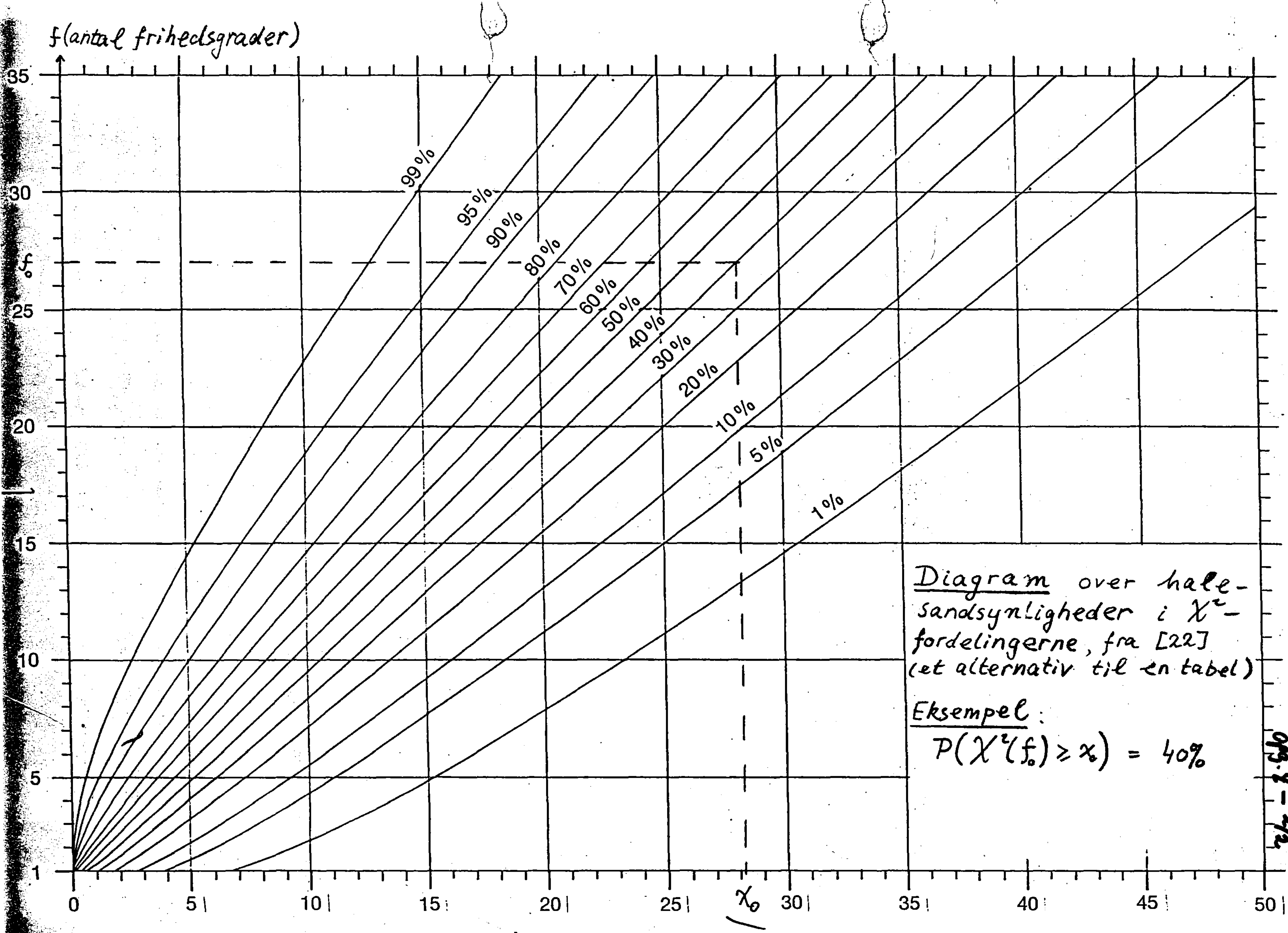


Diagram over hale-sandsynligheder i χ^2-fordelingerne, fra [22] (et alternativ til en tabel)

Eksempel:

$$P(\chi^2(f_0) \geq x_0) = 40\%$$

BILAG 355/592