Inventiones math. 23, 173–178 (1974)

Sur la norme des opérateurs de convolution

Christian Berg (Copenhagen)
et Jens Peter Reus Christensen (Copenhagen)

0. Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar à gauche et soit Δ le module. La représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$ est notée λ. Pour toute mesure positive bornée μ sur G on note $\|\mu\|_{2,G}$, ou simplement $\|\mu\|_2$, la norme de l'opérateur $\lambda(\mu)$ de $L^2(G)$.

Le but de cette note est de démontrer la formule suivante:

Pour toute mesure positive bornée symétrique μ sur G et pour tout voisinage compact V de l'unité de G on a

$$\|\mu\|_2 = \limsup_{n\to\infty} (\mu^{*n}(V))^{1/n}. \tag{1}$$

Si l'on suppose de plus que μ est de type positif, alors la suite $(\mu^{*n}(V))^{1/n}$ est convergente.

La formule (1) permet d'exprimer la moyennabilité de G à l'aide des marches aléatoires sur G.

Finalement, pour un groupe non moyennable G nous caractérisons les mesures positives bornées μ sur G telles que

$$\|\mu\|_2 < \int d\mu,$$

et les mesures positives bornées μ telles que

$$r(\mu) < \int d\mu,$$

où $r_G(\mu) = r(\mu)$ désigne le rayon spectral de l'opérateur $\lambda(\mu)$.

Nous complétons ainsi des résultats de [1] et [2].

Dans ce qui suit nous allons utiliser la notation de l'ouvrage de Dixmier [3].

1. On dit qu'une mesure bornée μ sur G est de type positif si $\lambda(\mu)$ est un opérateur positif de $L^2(G)$.

Soit T un opérateur positif dans un espace de Hilbert E et soit ξ un vecteur de E. Alors la suite $(T^n \xi | \xi)^{1/n}$ est croissante.

Pour toute mesure bornée μ de type positif et pour toute $f \in L^2(G)$ la suite

$$(\mu^{*n}(f * \tilde{f}))^{1/n}$$

est donc croissante.

Théorème 1. *Soit μ une mesure positive bornée de type positif sur G. Alors pour toute fonction continue positive f à support compact et non nulle, et pour tout voisinage compact V de l'unité on a*

$$\|\mu\|_2 = \lim_{n\to\infty} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\mu^{*n}(V))^{1/n}.$$

Démonstration. Soient f, g deux fonctions continues positives à support compact et non nulles. Pour $a \in G$ nous posons

$$\varphi_a = g * \varepsilon_a * \tilde{g}.$$

Si $g(x) > 0$ alors $\varphi_a(x\,a\,x^{-1}) > 0$.

Il existe par compacité un nombre $\alpha > 0$ et des points $a_1, \ldots, a_p \in G$ tels que

$$f*\tilde{f} \leqq \alpha \sum_{i=1}^{p} \varphi_{a_i},$$

et on a donc pour tout n

$$\mu^{*n}(f*\tilde{f}) \leqq \alpha \sum_{i=1}^{p} \mu^{*n}(\varphi_{a_i}) = \alpha \sum_{i=1}^{p} g^* * \mu^{*n} * g(a_i).$$

La fonction

$$\Delta^{\frac{1}{2}}(g^* * \mu^{*n} * g)$$

est continue et de type positif, (cf. [3], p. 265), et a donc son maximum à l'unité e. Alors

$$\Delta^{\frac{1}{2}}(a_i)\, g^* * \mu^{*n} * g(a_i) \leqq \Delta^{\frac{1}{2}}(e)\, g^* * \mu^{*n} * g(e) = \mu^{*n}(g*\tilde{g}),$$

ce qui entraîne

$$\mu^{*n}(f*\tilde{f}) \leqq \beta\, \mu^{*n}(g*\tilde{g}) \qquad \text{avec } \beta = \alpha \sum_{i=1}^{p} \Delta^{-\frac{1}{2}}(a_i),$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n} \leqq \lim_{n\to\infty} (\mu^{*n}(g*\tilde{g}))^{1/n}.$$

Pour des raisons de symétrie nous avons finalement

$$\lim_{n\to\infty} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\mu^{*n}(g*\tilde{g}))^{1/n}. \tag{2}$$

Pour tout voisinage compact V de e il existe des fonctions continues positives f_i, $i = 1, 2$, à support compact et non nulles, telles que

$$f_1 * \tilde{f}_1 \leqq 1_V \leqq f_2 * \tilde{f}_2.$$

Il en résulte que $(\mu^{*n}(V))^{1/n}$ converge vers la limite de (2).

Pour toute f de $L^2(G)$ nous avons

$$(\lambda(\mu) f | f) \leqq (\lambda(\mu)\, |f| \,|\, |f|) = \mu(|f| * |f|^{\sim}),$$

donc

$$\|\mu\|_2 = \sup_{f\in A} \mu(f*\tilde{f}),$$

où A est l'ensemble des fonctions continues positives f à support compact telles que

$$\int f^2\,dx = 1.$$

Puisque $\|\mu^{*n}\|_2 = \|\mu\|_2^n$, nous avons pour tout n

$$\|\mu\|_2 = \sup_{f\in A} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n},$$

donc

$$\|\mu\|_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in A} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n} = \sup_{f\in A} \sup_{n\in\mathbb{N}} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n}$$
$$= \sup_{f\in A} \lim_{n\to\infty} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n},$$

et ceci combiné avec (2) achève la démonstration du théorème.

Théorème 2. *Soit μ une mesure positive bornée symétrique sur G. Alors pour toute fonction continue positive f à support compact et non nulle, et pour tout voisinage compact V de l'unité on a*

$$\|\mu\|_2 = \limsup_{n\to\infty} (\mu^{*n}(f*\tilde{f}))^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} (\mu^{*n}(V))^{1/n}.$$

Démonstration. La mesure $\nu = \mu * \mu$ est de type positif et $\|\nu\|_2 = \|\mu\|_2^2$. Nous avons donc

$$\|\mu\|_2 = \lim_{n\to\infty} (\mu^{*2n}(f*\tilde{f}))^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} (\mu^{*2n}(V))^{1/2n}.$$

Pour des mesures bornées $\sigma, \tau \in M^1(G)$ nous posons

$$B_f(\sigma,\tau) = \sigma * \tau^*(f*\tilde{f}).$$

Alors B_f est une forme hermitienne positive sur $M^1(G)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique:

$$|\sigma*\tau^*(f*\tilde{f})| \leqq (\sigma*\sigma^*(f*\tilde{f}))^{\frac{1}{2}}\,(\tau*\tau^*(f*\tilde{f}))^{\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte que

$$(\mu^{*(2n+1)}(f*\tilde{f}))^{\frac{1}{2n+1}} \leqq (\mu^{*4n}(f*\tilde{f}))^{\frac{1}{4n+2}}\,(\mu^{*2}(f*\tilde{f}))^{\frac{1}{4n+2}},$$

et alors on a

$$\limsup_{n\to\infty} (\mu^{*(2n+1)}(f*\tilde{f}))^{\frac{1}{2n+1}} \leqq \|\mu\|_2.$$

Soit h une fonction continue positive à support compact telle que

$$1_V \leqq h*\tilde{h},$$

alors

$$\limsup_{n\to\infty} (\mu^{*(2n+1)}(V))^{\frac{1}{2n+1}} \leqq \limsup_{n\to\infty} (\mu^{*(2n+1)}(h*\tilde{h}))^{\frac{1}{2n+1}} \leqq \|\mu\|_2 .$$

Exemple. Soit $G=\mathbb{Z}$, $\mu=\frac{1}{2}(\varepsilon_{-1}+\varepsilon_1)$. Alors

$$\mu^{*n}(0)=\begin{cases} 0, & n \text{ impair} \\ 2^{-n}\begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix}, & n \text{ pair,} \end{cases}$$

ce qui montre que la suite $(\mu^{*n}(0))^{1/n}$ n'est pas convergente mais

$$\limsup_{n\to\infty} (\mu^{*n}(0))^{1/n}=1 .$$

Corollaire 3. *Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé, et soit μ une mesure positive bornée sur G portée par H. Alors*

$$\|\mu\|_{2,H}=\|\mu\|_{2,G}, \qquad r_H(\mu)=r_G(\mu).$$

En effet, la mesure $\nu=\mu*\mu^*$ est de type positif sur G et sur H. Pour un voisinage compact V de l'unité dans G nous avons

$$\|\mu\|_{2,G}^2=\|\nu\|_{2,G}=\lim_{n\to\infty}(\nu^{*n}(V))^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(\nu^{*n}(V\cap H))^{1/n}=\|\nu\|_{2,H}=\|\mu\|_{2,H}^2 .$$

Le corollaire 3 est même vrai pour une mesure bornée non nécessairement positive, cf. [5].

2. Il est bien connu que le groupe G est moyennable si et seulement si

$$\|\mu\|_2=\int d\mu$$

pour toute mesure positive bornée μ sur G, ou seulement pour toute mesure positive bornée μ de type positif sur G cf. [4].

Le groupe G est donc moyennable si et seulement si pour toute probabilité de type positif μ sur G et pour tout voisinage compact V de l'unité on a

$$\lim (\mu^{*n}(V))^{1/n}=1 .$$

Pour la marche aléatoire droite de loi μ sur G ceci signifie que la probabilité de visite de V pour la marche n'ième ne tend pas vers zéro plus vite que α^n pour tout $\alpha<1$.

Pour les groupes non moyennables G le problème se pose de caractériser l'ensemble C des μ de $M_+^1(G)$ telles que

$$\|\mu\|_2<\int d\mu .$$

Il est clair que C est un cône convexe de $M_+^1(G)$, et si $\mu \in C$, $\nu \in M_+^1(G)$ alors $\mu + \nu \in C$. En particulier on a

$$\nu + \frac{1}{n}\mu \in C,$$

ce qui montre que C est dense dans $M_+^1(G)$ pour la norme de $M^1(G)$.

Dans [1] il est démontré que si le support de μ contient l'unité de G et engendre un sous-groupe dense de G, alors $\mu \in C$.

Cependant, les deux conditions ne sont pas nécessaires.

Théorème 4. *Soit μ une mesure positive bornée sur G et soit H_μ le sous-groupe fermé engendré par SS^{-1} où S est le support de μ. Alors*

$$\|\mu\|_2 < \int d\mu$$

si et seulement si le groupe H_μ n'est pas moyennable.

Démonstration. Le support de $\nu = \mu * \mu^*$ est $\overline{SS^{-1}}$, qui contient l'unité et engendre un sous-groupe dense de H_μ. Alors d'après [1] nous avons

$$\|\nu\|_{2,H_\mu} < \int d\nu$$

si et seulement si H_μ n'est pas moyennable. De plus nous avons

$$\|\nu\|_{2,H_\mu} = \|\nu\|_{2,G} = \|\mu\|_{2,G}^2, \qquad \int d\nu = \left(\int d\mu\right)^2.$$

3. D'après la caractérisation des groupes moyennables mentionnée au début de § 2, il est clair que G est moyennable si et seulement si

$$r(\mu) = \int d\mu$$

pour toute mesure positive bornée μ sur G.

Dans [2] il est démontré que si G n'est pas moyennable et si le support de μ engendre un sous-groupe dense de G, alors

$$r(\mu) < \int d\mu.$$

D'après le corollaire 3 nous avons donc le résultat suivant:

Théorème 5. *Soit μ une mesure positive bornée sur G et soit F_μ le sous-groupe fermé engendré par le support de μ. Alors*

$$r(\mu) < \int d\mu$$

si et seulement si F_μ n'est pas moyennable.

Exemple. Soit G le groupe libre à deux générateurs a et b. Pour $\mu = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$ on trouve

$$r(\mu) < \|\mu\|_2 = 1,$$

car $S = \{a, b\}$ engendre G, et SS^{-1} engendre un groupe abélien.

Bibliographie

1. Berg, C., Christensen, J. P. R.: On the relation between amenability of locally compact groups and the norms of convolution operators. A paraître au Math. Ann.
2. Derriennic, Y., Guivarc'h, Y.: Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables. C. R. Acad. Sc., Paris, **277**, 613–615 (1973)
3. Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. Paris: Gauthier-Villars 1964
4. Eymard, P.: Moyennes invariantes et représentations unitaires. Lecture Notes in Mathematics **300**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
5. Herz, C.: Le rapport entre l'algèbre A_p d'un groupe et d'un sous-groupe. C. R. Acad. Sc. Paris, **271**, 244–246 (1970)

Christian Berg
Jens Peter Reus Christensen
Matematisk Institut
Universitetsparken 5
DK-2100 København Ø, Danemark

(Reçu le 15 novembre 1973)