Math. Z. 136, 279–290 (1974)

Semi-groupes de Feller invariants sur les espaces homogènes non moyennables

Christian Berg et Jacques Faraut

0. Introduction

A l'aide de la transformation de Fourier sphérique on montre que, sur un espace riemannien symétrique de type non compact, tout semi-groupe de Feller invariant et non trivial est intégrable. Dans le cas d'un espace riemannien symétrique de type non compact irréductible, cette propriété est une conséquence du résultat général suivant: Si G est un groupe localement compact non moyennable, et si K est un sous-groupe compact de G, maximal parmi les sous-groupes fermés de G, tout semi-groupe de Feller invariant et non trivial sur l'espace homogène G/K est intégrable. Dans les énoncés ci-dessus, non trivial signifie que le semi-groupe en question n'est pas identiquement égal à l'opérateur identique.

1. Noyaux potentiels associés à un semi-groupe de probabilités

Soient X un espace localement compact et $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues complexes sur X tendant vers 0 à l'infini. L'espace $C_0(X)$ est muni de la norme uniforme. Le sous-espace de $C_0(X)$ des fonctions à support compact est noté $\mathscr{K}(X)$.

Un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contractions positives de $C_0(X)$. Il est dit markovien si pour tout t l'on a $\sup\{P_t f \mid f\in C_0(x),\ 0\leqq f\leqq 1\}=1$. Il est dit intégrable, si pour toute fonction f continue, positive et à support compact, la fonction Vf définie par

$$Vf(x)=\int_0^\infty P_t f(x)\,dt$$

est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini. Alors $V\colon \mathscr{K}(X)\to C_0(X)$ est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini et vérifiant le principe complet du maximum.

Soient G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar à gauche et $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe de mesures de probabilité sur G, c'est-à-dire une famille de mesures de probabilité $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ sur G vérifiant

$$\forall\, t, s\geqq 0, \qquad \mu_t * \mu_s=\mu_{t+s},$$

$$\lim_{t\to 0}\mu_t=\mu_0 \qquad \text{vaguement}.$$

La mesure μ_0 est idempotente, c'est donc la mesure de Haar ω_K d'un sous-groupe compact K de G ([9]). Les mesures μ_t sont biinvariantes par K.

Si f est une fonction de $C_0(G)$ invariante à droite par K, il en est de même de la fonction $f*\mu_t$, où l'on a posé

$$f*\mu_t(x)=\int f(x\,y^{-1})\,d\mu_t(y).$$

Si l'on identifie une fonction f sur G invariante à droite par K avec la fonction $\tilde{f}$ sur $X=G/K$ obtenue par passage au quotient, nous obtenons un semi-groupe de Feller markovien $(P_t)_{t\geqq 0}$ sur l'espace homogène $X=G/K$ défini par

$$P_t f=f*\mu_t, \qquad f\in C_0(X).$$

Le semi-groupe $(P_t)_{t\geqq 0}$ est invariant par l'action de G. Inversement, tout semi-groupe de Feller sur X, markovien et invariant par G est de ce type.

Si μ est une mesure positive sur G, qui par convolution à gauche applique $\mathscr{K}(G)$ dans $L^2(G)$, la norme de μ agissant comme opérateur de convolution dans $L^2(G)$ est le nombre $\|\mu\|_2\leqq\infty$ défini par

$$\|\mu\|_2=\sup\{\|\mu*f\|\,|\,f\in\mathscr{K}(G),\ \|f\|=1\}.$$

(La norme en question pour les fonctions est celle de $L^2(G)$.)

On a $\|\mu\|_2\leqq\int d\mu$, et si G est non moyennable, on peut avoir une inégalité stricte (cf. [6], p. 44).

Nous définissons le type α_0 du semi-groupe $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ par

$$\alpha_0=\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|\mu_t\|_2.$$

Cette limite existe en effet et $\alpha_0\leqq 0$, cf. [11], p. 232.

Si pour un $t_0>0$, $\|\mu_{t_0}\|_2<1$, alors $\alpha_0<0$. En effet posons $\|\mu_{t_0}\|_2=e^{\alpha t_0}$, où $\alpha<0$. Soit $t>0$, nous avons

$$t=n\,t_0+r \text{ avec } n \text{ entier } \geqq 0, \qquad r\in[0,t_0[,$$

alors

$$\|\mu_t\|_2\leqq\|\mu_{t_0}\|_2^n\,\|\mu_r\|_2\leqq e^{\alpha n t_0}=e^{-\alpha r}\,e^{\alpha t}\leqq e^{-\alpha t_0}\,e^{\alpha t},$$

donc $\alpha_0\leqq\alpha<0$.

Pour tout $\alpha>\alpha_0$, il existe $M_\alpha>0$ tel que

$$\|\mu_t\|_2\leqq M_\alpha\,e^{\alpha t}, \qquad t>0.$$

Il en résulte que pour $\lambda>\alpha_0$, $f\in L^2(G)$, la fonction

$$R_\lambda f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mu_t*f\,dt$$

est dans $L^2(G)$ et que R_λ est un opérateur borné de $L^2(G)$.

Théorème 1.1. *Soit $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe de mesures de probabilité sur G de type α_0 et soit $\lambda > \alpha_0$. Alors:*

a) *L'intégrale vague*

$$\kappa_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t \, dt$$

est une mesure biinvariante par K, qui par convolution à gauche applique $\mathcal{K}(G)$ dans $L^2(G)$.

b) *Pour toute $f \in \mathcal{K}(G)$, on a*

$$R_\lambda f = \kappa_\lambda * f$$

et $\|\kappa_\lambda\|_2 < \infty$.

c) *Les régularisées à gauche et à droite de κ_λ tendent vers* 0 *à l'infini.*

Démonstration. Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_+(G)$ la fonction

$$(R_\lambda f_1) * \check{f}_2 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\mu_t * f_1) * \check{f}_2 \, d\mu_t,$$

étant le produit de convolution $\varphi * \check{\psi}$ pour des fonctions $\varphi, \psi \in L^2(G)$, est continue et tend vers 0 à l'infini.

Puisque toute fonction f continue positive à support compact peut être majorée par une fonction de la forme $f_1 * \check{f}_2$ où f_1 et f_2 sont positives, continues à support compact, l'application

$$f \in \mathcal{K}(G) \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t(f) \, dt$$

est une mesure de Radon positive κ_λ sur G. Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_+(G)$ on trouve

$$(R_\lambda f_1) * \check{f}_2 = \kappa_\lambda * f_1 * \check{f}_2,$$

ce qui montre que $R_\lambda f_1 = \kappa_\lambda * f_1$ et que les régularisées à droite de κ_λ tendent vers 0 à l'infini.

Le semi-groupe $(\check{\mu}_t)_{t \geqq 0}$ est du même type α_0 parce que $\|\mu_t\|_2 = \|\check{\mu}_t\|_2$. Par la formule

$$f * \kappa_\lambda = (\check{\kappa}_\lambda * \check{f})\check{}$$

on trouve que les régularisées à gauche de κ_λ tendent vers 0 à l'infini. □

Remarque. La masse de la mesure κ_λ est infinie pour $\alpha_0 < \lambda \leqq 0$ et égale à λ^{-1} pour $\lambda > 0$. L'énoncé est donc seulement intéressant pour $\alpha_0 < \lambda \leqq 0$.

Si $\alpha_0 < 0$ le théorème a la conséquence suivante pour le semi-groupe de Feller $(P_t)_{t \geqq 0}$ associé:

Théorème 1.2. *Soit $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe de mesures de probabilité sur G de type α_0 négatif. Alors le semi-groupe de Feller associé $(P_t)_{t \geqq 0}$ sur X est intégrable.*

En effet, si $f \in \mathscr{K}_+(G)$ est invariante à droite par K et si $x \in G$, on a

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt = \int_0^\infty f * \mu_t(x)\, dt = f * \kappa_0(x),$$

qui est une fonction de $C_0(G)$ d'après le théorème précédent.

De même $V_\lambda f = f * \kappa_\lambda$ définit pour $\alpha_0 < \lambda < 0$ un noyau de Hunt sur X au sens de Deny (cf. [3]), V_λ étant l'intégrale d'un semi-groupe d'opérateurs surmarkoviens. En particulier V_λ vérifie le principe de domination.

Remarque. Si le groupe G est unimodulaire, nous pouvons associer au semi-groupe de mesures $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe $(T_t)_{t \geqq 0}$ fortement continu de contractions invariantes de l'espace $L^2(X)$, l'espace X étant muni d'une mesure invariante par G. Il est défini comme le semi-groupe de Feller par

$$T_t f = f * \mu_t,$$

et il est facile de vérifier que la norme de T_t agissant sur $L^2(X)$ est égale à $\|\mu_t\|_2$.

Si les mesures μ_t sont symétriques, alors les opérateurs T_t sont hermitiens sur $L^2(X)$. Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T_t)_{t \geqq 0}$ est autoadjoint semi-borné supérieurement, et α_0 est la borne supérieure de son spectre.

2. Relations entre le type d'un semi-groupe de probabilités et la moyennabilité

Dans ce paragraphe, à partir d'un résultat de Berg et Christensen [2], nous donnons des critères pour que le type d'un semi-groupe de probabilités soit négatif.

Nous notons G un groupe localement compact, K un sous-groupe compact de G et ω_K la mesure de Haar normalisée de K.

Théorème 2.1. *Soit $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe de mesures de probabilité sur G vérifiant:*

(i) *Pour tout $t > 0$ l'élément neutre e de G appartient au support de μ_t.*

(ii) *Le plus petit sous-groupe fermé contenant les supports des mesures μ_t est égal à G.*

(iii) *Le semi-groupe de mesures est de type $\alpha_0 = 0$.*

Alors le groupe G est moyennable.

Démonstration. Puisque $\alpha_0 = 0$, pour tout $t > 0$ nous avons $\|\mu_t\|_2 = 1$. Soit G_t le plus petit sous-groupe fermé de G contenant le support de μ_t. L'hypothèse (i) entraîne que pour $t < s$ nous avons $G_t \subseteq G_s$. D'après [2] il existe une moyenne m_t sur l'espace $UCB(G)$, (espace des fonctions bornées uniformément continues sur G) invariante par l'action de G_t. Soit m une valeur d'adhérence faible de m_t quand t tend vers l'infini, m est une moyenne invariante par $\bigcup_{t>0} G_t$, qui est dense dans G d'après (ii). Donc m est une moyenne invariante sur $UCB(G)$, c'est-à-dire G est moyennable. $\square$

Dans les théorèmes 2.4 et 2.5 ci-après l'hypothèse (i) ne figure pas. Pour cela nous avons besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur G invariante à droite par K. Pour que μ vérifie*

$$\check{\mu} * \mu = \omega_K,$$

il faut et il suffit que $\mu = \delta_g * \omega_K$ pour un élément g de G. La mesure μ est biinvariante par K si et seulement si

$$g^{-1} K g \subseteq K.$$

Démonstration. Si $\mu = \delta_g * \omega_K$, alors

$$\check{\mu} * \mu = \omega_K * \delta_{g^{-1}} * \delta_g * \omega_K = \omega_K.$$

Inversement, soit μ une mesure de probabilité invariante à droite par K vérifiant $\check{\mu} * \mu = \omega_K$. Si S est le support de μ, nous avons $S^{-1} S \subseteq K$, donc en particulier $S \subseteq gK$ pour tout $g \in S$. Puisque S est invariant à droite par K, nous avons aussi $gK \subseteq S$, donc

$$\forall g \in S \colon \; S = gK,$$

c'est-à-dire que S est une classe à droite modulo K. Si g appartient à S, la mesure $\delta_{g^{-1}} * \mu$ est portée par K et est invariante à droite par K, c'est donc la mesure de Haar de K, et on a

$$\mu = \delta_g * \omega_K.$$

Si de plus la mesure μ est biinvariante par K, le support S est invariant à gauche par K. Pour tout g de S on a donc

$$g^{-1} K g \subseteq S^{-1} S \subseteq K.$$

Inversement si $g^{-1} K g \subseteq K$ la mesure $\mu = \delta_g * \omega_K$ est invariante à gauche par K car

$$\forall k \in K \qquad \delta_k * \delta_g * \omega_K = \delta_g * \delta_{g^{-1}kg} * \omega_K = \delta_g * \omega_K. \quad \square$$

Corollaire 2.3. *Si μ est une mesure de probabilité biinvariante par K vérifiant*

$$\mu * \check{\mu} = \check{\mu} * \mu = \omega_K$$

alors pour tout g du support de μ, on a

$$\mu=\delta_g*\omega_K=\omega_K*\delta_g,$$

et tout g du support de μ normalise K:

$$g^{-1}Kg=K.$$

Remarque. Il est possible que l'inclusion

$$g^{-1}Kg\subseteq K$$

soit stricte.

Soit $H=\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ le groupe compact des applications f de $\mathbb{Z}$ dans le tore $\mathbb{T}$. L'élément neutre est l'application

$$e\colon n\mapsto 1.$$

Pour $p\in\mathbb{Z}, f\in H$ on note $\tau_p f\in H$ l'application

$$n\mapsto f(n-p).$$

Soit $G=H\times\mathbb{Z}$ muni de la loi de groupe

$$(f,n)(g,m)=(f\tau_n g, n+m).$$

Alors G est un groupe localement compact, le produit semi-direct de H et de $\mathbb{Z}$. Soit K le sous-groupe compact de G défini par

$$K=\{(f,0)\,|\,\forall\, n<0\colon f(n)=1\}.$$

Pour $g=(e,-1)$ on a

$$g^{-1}Kg=\{(f,0)\,|\,\forall\, n\leqq 0\colon f(n)=1\}\neq K.$$

Par contre, si le groupe compact K est un groupe de Lie, ce phénomène est impossible. On let voit aisément en considérant l'algèbre de Lie de K.

Nous ferons jusqu'à la fin de ce paragraphe les hypothèses suivantes:

(A) *G est un groupe localement compact non moyennable.*

(B) *K est un sous-groupe compact de G, maximal parmi les sous-groupes fermés de G.*

Ces hypothèses sont vérifées si $X=G/K$ est un espace riemannien symétrique de type non compact irréductible (voir annexe).

Voici quelques conséquences préliminaires des hypothèses (A) et (B):

1) *K n'est pas distingué dans G.*

En effet, sinon le quotient G/K serait un groupe H. Considérons dans H un élément h différent de l'élément neutre, et soit F le plus petit sous-groupe fermé de H contenant h. L'image réciproque F_1 de F par l'application canonique

$$G\to G/K=H$$

est un sous-groupe fermé de G contenant K et différent de K, donc $F_1 = G$ d'après l'hypothèse (B), et par suite $F = H$. Le groupe F, étant abélien, est moyennable, et par suite G est moyennable ([6], p. 16), ce qui est contraire à l'hypothèse (A).

2) *Le normalisateur de K est réduit à K.*

Car sinon il serait égal à G, et K serait un sous-groupe distingué de G.

En combinant 2) avec le corollaire 2.3 nous trouvons:

3) *La seule mesure de probabilité μ biinvariante par K vérifiant*

$$\mu * \check{\mu} = \check{\mu} * \mu = \omega_K$$

est $\mu = \omega_K$.

4) *G est unimodulaire.*

Car δ étant le module, $\ker \delta$ est un sous-groupe fermé distingué de G contenant K.

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses* (A) *et* (B), *si μ est une mesure de probabilité sur G biinvariante par K, $\mu \neq \omega_K$, alors $\|\mu\|_2 < 1$.*

Démonstration. D'après la remarque 3) précédente on a $\nu = \mu * \check{\mu} \neq \omega_K$ (ou bien $\check{\mu} * \mu \neq \omega_K$). Le support de ν contient l'élément neutre de G et est donc strictement plus grand que K. Le plus petit sous-groupe fermé de G contenant le support de ν est donc égal à G. Puisque G n'est pas moyennable, d'après [2] on a $\|\nu\|_2 = \|\mu\|_2^2 < 1$. □

Théorème 2.5. *Sous les hypothèses* (A) *et* (B), *si $(\mu_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de mesures de probabilité sur G biinvariantes par K, tel que l'on ait pas identiquement $\mu_t = \omega_K$, alors ce semi-groupe est de type α_0 strictement négatif.*

Si nous avions $\alpha_0 = 0$, alors pour tout $t > 0$ $\|\mu_t\|_2 = 1$ et d'après le théorème 2.4, pour tout $t > 0$ nous aurions $\mu_t = \omega_K$.

3. Semi-groupes de Feller invariants sur les espaces riemanniens symétriques de type non compact

Soit (G, K) une paire riemannienne symétrique de type non compact. Le groupe G n'est pas moyennable [6], p. 18, mais si l'espace riemannien $X = G/K$ n'est pas irréductible, l'hypothèse (B) n'est pas vérifiée. Cependant, les conclusions des théorèmes 2.4 et 2.5 sont vraies. Nous en donnons une démonstration qui utilise la transformation de Fourier sphérique. Nous utilisons les notations de Helgason [8]. Les fonctions sphériques sont données par la formule de Harish-Chandra

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(i\lambda - \rho)(H(xk))}\, a\, k \qquad (x \in G).$$

Si λ est une forme linéaire réelle, c'est-à-dire si $\lambda \in \mathfrak{A}'$, on a

$$|\varphi_\lambda(x)| \leqq \varphi_0(x) \leqq 1,$$

et nous avons

$$\{x \in G \mid \varphi_0(x) = 1\} = K.$$

En effet, puisque φ_0 est de type positif, $H = \{\varphi_0 = 1\}$ est un sous-groupe fermé de G contenant K. Il est même compact, parce que φ_0 tend vers 0 à l'infini, et K étant un sous-groupe compact maximal, on a $H = K$.

Théorème 3.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur G biinvariante par K. Si $\mu \neq \omega_K$, alors*

$$\|P\| = \|\mu\|_2 < 1,$$

où P désigne l'opérateur de $L^2(X)$ défini par $Pf = f * \mu$.

Démonstration. La transformée de Fourier sphérique de μ est la fonction $\hat{\mu}$ définie sur $\mathfrak{A}'$ par

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_G \varphi_\lambda(x)\, d\mu(x).$$

D'après la formule de Plancherel nous avons

$$\|P\| = \sup_{\lambda \in \mathfrak{A}'} |\hat{\mu}(\lambda)| = \hat{\mu}(0) = \int_G \varphi_0(x)\, d\mu(x),$$

et puisque $\mu \neq \omega_K$ et $\{\varphi_0 = 1\} = K$,

$$\int \varphi_0(x)\, d\mu(x) < 1. \quad \square$$

Théorème 3.2. *Soit $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe de mesures de probabilité sur G biinvariantes par K tel que l'on ait pas identiquement $\mu_t = \omega_K$, alors ce semi-groupe de mesures est de type α_0 strictement négatif.*

La transformée de Fourier sphérique de μ_t s'écrit

$$\hat{\mu}_t(\lambda) = e^{-tq(\lambda)}$$

où q est une fonction continue sur $\mathfrak{A}'$. On appelle q la fonction définie négative associé à $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ (cf. [1]).

Nous avons

$$\|P_t\| = \hat{\mu}_t(0) = e^{-tq(0)}, \qquad \alpha_0 = -q(0),$$

et si μ_t n'est pas identiquement ω_K, alors $q(0) > 0$.

Remarque. Dans le cas des espaces hyperboliques

$$SO_0(1, n)/SO(n)$$

les résultats de ce paragraphe ont été exposés par Faraut [7].

4. Semi-groupes de Gauss sur les espaces hyperboliques

Soient G le groupe $SO_0(1,n)$ et K le groupe $SO(n)$. L'espace riemannien symétrique $X=G/K$ est l'espace de Lobachevsky, ou espace hyperbolique, de dimension n. C'est un espace symétrique de type non compact irréductible. Une fonction biinvariante sur G peut être considérée comme une fonction sur X qui ne dépend que de la distance géodésique r au point 0, l'image de e par l'application canonique π: $G \to X$. Le laplacien Beltrami Δf d'une telle fonction f est donné par

$$\Delta f = \frac{1}{(\operatorname{sh} r)^{n-1}} \frac{d}{dr}\left[(\operatorname{sh} r)^{n-1} \frac{df}{dr}\right].$$

Cet opérateur, considéré comme opérateur non borné de $C_0(X)$, de domaine $\mathscr{K}^{(2)}(X)$, espace des fonctions de classe C^2 à support compact, vérifie le principe du maximum positif et est invariant. Par suite il est préfermé et son plus petit prolongement fermé est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller invariant, que nous appelerons semi-groupe de Gauss. Les mesures μ_t correspondantes ont pour $t>0$ des densités p_t par rapport à la mesure de Haar, qui sont des fonctions biinvariantes par K. Pour $n=2$ et $n=3$, il est possible d'en donner des formules ([10], p. 400):

Pour $n=2$

$$p_t(r) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{t}{4}}}{(\sqrt{4\pi t})^3} \int_r^\infty \frac{\rho\, e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\sqrt{\operatorname{ch}\rho - \operatorname{ch} r}}\, d\rho.$$

Pour $n=3$

$$p_t(r) = \frac{e^{-t}}{(\sqrt{4\pi t})^3} \cdot \frac{r}{\operatorname{sh} r}\, e^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

Les fonctions sphériques sont fonctions propres de Δ:

$$\Delta \varphi_\lambda + \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \lambda^2\right] \varphi_\lambda = 0,$$

et, par suite, la transformée de Fourier sphérique de la mesure μ_t est

$$\hat{\mu}_t(\lambda) = e^{-tq(\lambda)} \quad \text{avec} \quad q(\lambda) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \lambda^2,$$

d'où $\alpha_0 = -q(0) = -\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.

Le noyau potentiel associé au semi-groupe de Gauss

$$\kappa = \int_0^\infty \mu_t\, dt$$

est une mesure admettant une densité k par rapport à la mesure de Haar, qui est une fonction biinvariante par K; pour $n=2$

$$k(r)=\frac{1}{2\pi}\log\coth\frac{r}{2},$$

et pour $n=3$

$$k(r)=\frac{1}{4\pi}(\coth r-1).$$

Pour calculer k à partir des p_t on a besoin de connaître l'intégrale

$$\sigma_\lambda(r)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(4\pi t)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)dt, \qquad \lambda>0,$$

qui est la résolvente du semi-groupe de Gauss dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées polaires.

La transformée de Laplace de la fonction

$$f\colon u\mapsto u^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\lambda}{u}\right)$$

est la fonction

$$\mathscr{L}f\colon u\mapsto\sqrt{\pi}\,u^{-\frac{1}{2}}\exp(-\sqrt{4\lambda u})$$

([5], p. 146), et on trouve

$$\sigma_\lambda(r)=\frac{1}{4\pi r}e^{-\sqrt{\lambda}r}.$$

La mesure κ n'est pas bornée, mais la convolution par κ est un opérateur borné de $L^2(X)$ dont la norme est égale à

$$-\alpha_0^{-1}=\left(\frac{n-1}{2}\right)^{-2}.$$

5. Formes de Dirichlet invariantes sur les espaces homogènes non moyennables.

Dans [1] Berg a démontré que si X est un espace riemannien symétrique de type non compact et de rang 1, à toute forme de Dirichlet sur X, invariante et non nulle, est associé un espace de Dirichlet régulier.

À partir du théorème 3.2, nous allons voir que ce résultat reste vrai pour n'importe quel rang.

Soient G un groupe localement compact unimodulaire, K un sous-groupe compact et $X=G/K$ l'espace homogène associé.

On sait qu'il y a une correspondance biunivoque entre les formes de Dirichlet sur X invariantes par G et les semi-groupes de mesures $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ sur G vérifiant

$$\begin{gathered}\forall t \geqq 0:\ \mu_t \geqq 0, \quad \int d\mu_t \leqq 1,\\ \forall t \geqq 0:\ \mu_t = \check{\mu}_t,\\ \forall t, s \geqq 0:\ \mu_t * \mu_s = \mu_{t+s},\\ \lim_{t\to 0} \mu_t = \mu_0 = \omega_k \quad \text{vaguement}.\end{gathered}$$

(Voir p. ex. [1].) Notons que les mesures μ_t sont biinvariantes par K.

À partir de $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ on définit un semi-groupe $(T_t)_{t\geqq 0}$ fortement continu de contractions invariantes sur $L^2(X)$ par convolution à droite,

$$T_t f = f * \mu_t.$$

Les opérateurs T_t sont hermitiens et sous-markoviens. Pour le passage de $(T_t)_{t\geqq 0}$ à une forme de Dirichlet (Q, V) nous renvoyons à [4], chap. 5.

Supposons que le type α_0 du semi-groupe $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ soit strictement négatif. Si A est le générateur infinitésimal de $(T_t)_{t\geqq 0}$ nous avons

$$Q(f, f) = -(Af, f) \geqq -\alpha_0 \|f\|^2,$$

quelle que soit f dans le domaine D_A de A. Puisque D_A est dense dans V pour la norme $(Q + \|\cdot\|^2)^{\frac{1}{2}}$, pour laquelle V est complet, on trouve que V est complet pour la norme $Q^{\frac{1}{2}}$. Ainsi $(V, Q^{\frac{1}{2}})$ est un espace de Dirichlet plongé dans $L^2(X)$.

Le potentiel engendré par f de $\mathscr{K}(X)$ est $f * \kappa_0$, où κ_0 est la mesure

$$\kappa_0 = \int_0^\infty \mu_t \, dt.$$

L'ensemble

$$P = \{f * \kappa_0 \mid f \in \mathscr{K}(X)\}$$

est dense dans l'espace de Dirichlet $(V, Q^{\frac{1}{2}})$ (cf. [4], p. 131), et dense dans $C_0(X)$ (cf. [3]).

À partir de ces deux résultats de densité, on démontre de la même façon que Deny, [4], p. 192, que $(V, Q^{\frac{1}{2}})$ est un espace de Dirichlet régulier.

Les théorèmes 2.5 et 3.2 admettent ainsi la conséquence suivante:

Théorème 5.1. *Soit X un espace homogène G/K vérifiant les hypothèses (A) et (B), ou soit X un espace riemannien symétrique de type non compact. Alors pour toute forme de Dirichlet (Q, V) sur X, invariante et non nulle, $(V, Q^{\frac{1}{2}})$ est un espace de Dirichlet régulier.*

6. Annexe

Un espace riemannien symétrique $X = G/K$ de type non compact irréductible vérifie les hypothèses (A) et (B).

Pour l'hypothèse (A) voir [6], p. 18.

Montrons que l'hypothèse (B) est vérifiée. Soit F un sous-groupe fermé de G contenant K. D'après [8], p. 307 l'algèbre de Lie $\mathfrak{K}$ de K est une sous-algèbre propre maximale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G. Puisque G et K sont connexes, soit $F=G$, soit $F_0=K$, où F_0 désigne la composante connexe de F contenant l'élément neutre. Dans le cas où $F_0=K$, supposons qu'il existe dans F un élément g qui n'appartienne pas à K. La composante connexe de F contenant g est une classe à gauche et à droite modulo K, il lui correspond un point x de X invariant par K, $x \neq 0$. Soit γ la géodésique allant de 0 à x (d'après [8], p. 215 il en existe une et une seule). Si k appartient à K, $k\gamma$ est également une géodésique allant de 0 à x, et on peut choisir k de telle sorte que γ et $k\gamma$ ne soient pas identiques, d'où la contradiction.

Bibliographie

1. Berg, C.: Dirichlet forms on symmetric spaces. Ann. Inst. Fourier **23**, Fasc.1, 135–156 (1973)
2. Berg, C., Christensen, J. P. R.: On the relation between amenability of locally compact groups and the norms of convolution operators. Math. Ann. **208**, 149–153 (1974)
3. Deny, J.: Éléments de la théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt. In: Sém. Théorie du Potentiel. M. Brelot, G. Choquet et J. Deny, 5e année (1960/61). Nr. 8. 8 p. Paris: Secretariat mathématique 1961
4. Deny, J.: Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel. In: C.I.M.E., 1° Ciclo, Stresa Potential theory (1969) pp. 121–201. Rome: Edizioni Cremonese 1970
5. Erdélyi, A.: Tables of integral transforms. Bateman Manuscript Project Vol. 1. New York: McGraw-Hill 1954
6. Eymard, P.: Moyennes invariantes et représentations unitaires. Lecture Notes in Mathematics 300, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
7. Faraut, J.: Semi-groupes de Feller invariants sur les espaces hyperboliques. Sém. Théorie du Potentiel, Paris, 1971/72
8. Helgason, S.: Differential geometry and symmetric spaces. New York-London: Academic Press 1962
9. Heyer, H: Über Haarsche Masse auf lokalkompakten Gruppen, Arch. der Math. **17**, 347–351 (1966)
10. Karpelevich, F. I., Tutubalin, V. N., Shur, M. G.: Limit theorems for the compositions of distributions in the Lobachevsky plane and space. Theor. Probab. Appl. **4**, 399–402 (1959)
11. Yosida, K.: Functional Analysis. Third edition. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971

Christian Berg
Matematisk Institut
Universitetsparken 5
2100 København Ø
Danmark

Jacques Faraut
Département de Mathématique
7, Rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
France

(Reçu le 31 décembre 1973)