

SUITES DÉFINIES NÉGATIVES ET
ESPACES DE DIRICHLET SUR LA SPHÈRE

par Christian BERG

0. Introduction.

BEURLING et DENY ont caractérisé les formes et espaces de Dirichlet invariants par translations sur un groupe abélien localement compact G , à l'aide des fonctions définies négatives sur le groupe dual \hat{G} (voir [3]).

Nous allons déterminer les formes et espaces de Dirichlet, sur la sphère, invariants par rotations.

Pour aborder ce problème, nous introduisons des suites définies positives et négatives par rapport à un système de polynômes. Sous certaines hypothèses portant sur les polynômes, on peut développer une théorie aussi féconde que la théorie classique : Une formule de Lévy-Khintchine, un théorème de type Schoenberg, etc. Les polynômes ultrasphériques entrent dans ce cadre, et les suites définies négatives par rapport à ces polynômes permettent de résoudre le problème.

1. Suites définies positives et négatives.

Soit \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nul, et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes, p_n de degré n , qu'on fixe une fois pour toutes. On ne considère ces polynômes que dans l'intervalle $(-1, 1)$, et on suppose que $p_n(1) = 1$.

DÉFINITION. - Une suite $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

1° Définie positive (par rapport à (p_n)), si

$$\forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R},$$

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n p_n(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in (-1, 1) \right) \implies \left(\sum_{n=0}^N a_n \varphi(n) \geq 0 \right);$$

2° Définie négative (par rapport à (p_n)), si $\varphi(0) \geq 0$, et si

$$\forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R},$$

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n p_n(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in (-1, 1) \text{ et } \sum_{n=0}^N a_n = 0 \right) \implies \left(\sum_{n=0}^N a_n \varphi(n) \leq 0 \right).$$

Remarque. - Ici, l'intervalle $(-1, 1)$ joue un rôle particulier. On peut aussi bien considérer un intervalle fini (a, b) , $a < b$, et supposer les p_n normalisés par $p_n(b) = 1$. Puisqu'on peut toujours se ramener à $(-1, 1)$, et surtout puisque, dans nos applications, il s'agira de l'intervalle $(-1, 1)$, nous avons préféré choisir celui-là.

Propriétés évidentes.

(a) L'ensemble DP des suites définies positives et l'ensemble DN des suites définies négatives sont des cônes convexes, stables par limites simples, et contenant les constantes positives.

$$(b) \quad \varphi \in DN \implies \varphi - \varphi(0) \in DN.$$

$$(c) \quad \varphi \in DP \implies \varphi(0) - \varphi \in DN.$$

La représentation intégrale suivante de toutes les suites définies positives est facile à établir :

PROPOSITION 1. - Une suite φ est définie positive, si, et seulement si, il existe une mesure positive μ sur $(-1, 1)$, telle que l'on ait

$$(1) \quad \varphi(n) = \int_{-1}^1 p_n(x) d\mu(x), \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

Voici la représentation intégrale ("formule de Lévy-Khintchine") des suites définies négatives :

PROPOSITION 2. - Une suite φ est définie négative, si, et seulement si, il existe une constante $a \geq 0$ et une mesure positive μ sur $(-1, 1)$, telles que l'on ait

$$(2) \quad \varphi(n) = a + \int_{-1}^1 \frac{1 - p_n(x)}{1 - x} d\mu(x), \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

Une telle représentation est unique.

Démonstration. - L'expression $(1 - p_n(x))/(1 - x)$ est un polynôme de degré $n - 1$, et la valeur au point 1 est $p'_n(1)$.

(a) $p'_n(1)$ est définie négative, car, si $p = \sum_{n=0}^N a_n p_n$ est positive sur $(-1, 1)$, et si $p(1) = \sum_{n=0}^N a_n = 0$, on a $p'(1) \leq 0$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^N a_n p'_n(1) \leq 0.$$

(b) $\frac{1 - p_n(x)}{1 - x}$ est définie négative pour $x \in (-1, 1[$, car, si $\sum_{n=0}^N a_n p_n$ est positive sur $(-1, 1)$ avec $\sum_{n=0}^N a_n = 0$, on a

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{1 - p_n(x)}{1 - x} = -\frac{1}{1 - x} \sum_{n=0}^N a_n p_n(x) \leq 0 .$$

De (a) et (b), il résulte que les suites données par la formule (2) sont définies négatives.

Inversement, pour φ définie négative, on pose $a = \varphi(0)$, et $\psi = \varphi - a$ est encore définie négative. Tout polynôme p s'écrit de façon unique

$$p(x) = \sum_{n=1}^N a_n \frac{1 - p_n(x)}{1 - x} ,$$

où $N - 1$ est le degré de p , et on pose

$$T(p) = \sum_{n=1}^N a_n \psi(n) ,$$

ce qui définit une forme linéaire T sur le sous-espace vectoriel de $C([-1, 1])$ formé par la restriction des polynômes à $(-1, 1)$. Cette forme linéaire est positive, car, si $p \geq 0$ sur $(-1, 1)$, on a

$$\sum_{n=1}^N a_n (1 - p_n(x)) \geq 0 , \quad \text{quel que soit } x \in (-1, 1[,$$

d'où

$$\left(\sum_{n=1}^N a_n \right) p_0 + \sum_{n=1}^N (-a_n) p_n \geq 0 \quad \text{sur } (-1, 1) .$$

Or ψ étant définie négative avec $\psi(0) = 0$, ceci entraîne que

$$T(p) = \sum_{n=1}^N a_n \psi(n) \geq 0 .$$

Si μ désigne la mesure positive unique qui prolonge T , on trouve la représentation cherchée.

Remarque. - Si on enlève la masse de μ au point 1, on trouve la représentation suivante :

$$(3) \quad \varphi(n) = a + b p_n'(1) + \int_{-1}^1 (1 - p_n(x)) d\sigma(x) , \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N} ,$$

avec $a, b \geq 0$, et σ une mesure positive sur $(-1, 1[$ telle que

$$\int_{-1}^1 (1-x) d\sigma(x) < \infty .$$

Nous allons examiner les conséquences de l'hypothèse (S) suivante :

(S) Le cône DP est stable par multiplication, c'est-à-dire, si φ et ψ sont des suites définies positives, alors $\varphi\psi$ l'est aussi.

Cette hypothèse, qui est maniable dans les démonstrations, est vérifiée dans nos applications, mais ne l'est pas en général (cf. les exemples ci-dessous).

PROPOSITION 3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'hypothèse (S) est vérifiée ;
 (ii) $\forall \varphi \in DP, \forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R} :$

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n p_n \geq 0 \text{ sur } (-1, 1) \right) \implies \left(\sum_{n=0}^N a_n \varphi(n) p_n \geq 0 \text{ sur } (-1, 1) \right) ;$$

- (iii) $\forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R} :$

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n p_n \geq 0 \text{ sur } (-1, 1) \right) \implies \left(\sum_{n=0}^N a_n p_n(x) p_n(y) \geq 0 \right) ,$$

quels que soient $x, y \in (-1, 1) ;$

(iv) Il existe une loi de composition \star , définie sur le cône $M_+((-1, 1))$ des mesures positives sur $(-1, 1)$, telle que l'on ait

$$(4) \quad \int p_n d(\mu \star \nu) = \left(\int p_n d\mu \right) \left(\int p_n d\nu \right) ,$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}$, $\mu, \nu \in M_+((-1, 1))$. (Une telle loi \star est unique.)

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 4. - Si l'hypothèse (S) est vérifiée, on a $|p_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in (-1, 1)$. D'autre part, si φ est définie positive, on a $|\varphi(n)| \leq \varphi(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si φ est définie négative, on a $\varphi(n) \geq \varphi(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi(n)/n^2$ est bornée.

Démonstration. - Si on pose $k_n = \max |p_n(x)|$ pour $x \in (-1, 1)$, on trouve que $k_n p_0 \pm p_n \geq 0$ sur $(-1, 1)$, ce qui implique l'inégalité

$$|\varphi(n)| \leq k_n \varphi(0) ,$$

pour toute suite définie positive φ . D'après l'hypothèse (S), $p_n^2(x)$ est définie positive, d'où

$$p_n^2(x) \leq k_n, \quad \text{quel que soit } x \in (-1, 1),$$

et par conséquent $k_n^2 \leq k_n$, d'où finalement $k_n = 1$, parce que $k_n \geq p_n(1) = 1$.

On a $p_0 - p_n \geq 0$ sur $(-1, 1)$, d'où l'inégalité $\varphi(0) \leq \varphi(n)$ pour toute suite définie négative φ . Il est bien connu que l'inégalité $|p_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in (-1, 1)$, pour un polynôme p_n de degré n , entraîne l'inégalité $|p_n'(x)| \leq n^2$ pour tout $x \in (-1, 1)$ (voir par exemple [8], ex. 83, p. 91). La formule (2) entraîne donc $\varphi(n) \leq a + \|u\|n^2$.

Voici maintenant un théorème de type Schoenberg (cf. [9]), qui lui aussi est une conséquence de l'hypothèse (S) :

THÉORÈME 5. - Si on suppose l'hypothèse (S), les conditions suivantes sur la suite φ sont équivalentes :

- (i) φ est définie négative ;
- (ii) $\varphi(0) > 0$, et $\exp(-t\varphi)$ est définie positive quel que soit $t > 0$.

Démonstration.

(i) \implies (ii) : D'après la formule (3), il suffit de démontrer que

$$\exp(-tbp_n'(1)) \quad \text{et} \quad \exp(-t \int_{-1}^1 (1 - p_n(x)) d\sigma(x))$$

sont définies positives pour $t > 0$. Puisque $p_n(x)$ est définie positive, l'hypothèse (S) entraîne qu'il en est de même de

$$\exp\left(-tb \frac{1 - p_n(x)}{1 - x}\right) = \exp\left(-\frac{tb}{1-x}\right) \exp\left(\frac{tb}{1-x} p_n(x)\right), \quad \text{pour } t > 0, x \in (-1, 1).$$

Si on fait tendre x vers 1, on voit que $\exp(-tbp_n'(1))$ est définie positive.

Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$d\sigma_\varepsilon = 1_{[-1, 1-\varepsilon[} d\sigma,$$

qui est une mesure positive sur $(-1, 1)$. Il en résulte que

$$\int_{-1}^1 p_n(x) d\sigma_\varepsilon(x)$$

est définie positive, d'où aussi

$$\exp(-t\|\sigma_\varepsilon\|) \exp\left(t \int_{-1}^1 p_n d\sigma_\varepsilon\right) = \exp(-t \int_{-1}^{1-\varepsilon} (1 - p_n(x)) d\sigma(x))$$

est définie positive pour $t > 0$. On conclut en faisant tendre ε vers 0.

(ii) \implies (i) : On suppose que $\psi_t(n) = \exp(-t\varphi(n))$ est définie positive, et que $\psi_t(0) \leq 1$ quel que soit $t > 0$. Il en résulte que

$$\frac{1 - \psi_t(n)}{t}$$

est définie négative pour $t > 0$; d'où le résultat, en faisant tendre t vers 0.

COROLLAIRE 6. - Supposons que (S) est vérifiée. Alors, si φ est définie négative, et $\varphi(0) > 0$, on a $1/\varphi$ définie positive.

Démonstration. - La suite $1/\varphi$ est bien définie, parce que $\varphi(n) \geq \varphi(0) > 0$. La formule suivante montre le résultat :

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \int_0^\infty \exp(-t\varphi(n)) dt .$$

Remarque. - Soit \star la loi de composition sur $M_+((-1, 1))$, définie par (4), sous l'hypothèse (S). La mesure de Dirac δ_1 au point 1 est élément neutre. Il est facile, grâce au théorème 5, de caractériser les semi-groupes $(\mu_t)_{t>0}$ de mesures positives sur $(-1, 1)$ satisfaisant :

$$(5) \quad \begin{cases} \mu_t \star \mu_s = \mu_{t+s}, & \text{quels que soient } t, s > 0, \\ \|\mu_t\| \leq 1, & \text{quel que soit } t > 0, \\ \mu_t \text{ tend vers } \delta_1 \text{ vaguement,} & \text{quand } t \text{ tend vers } 0. \end{cases}$$

Il y a une bijection entre de tels semi-groupes et les suites définies négatives φ , établie par la relation

$$\int_{-1}^1 p_n d\mu_t = \exp(-t\varphi(n)), \quad \text{pour } t > 0, \quad n \in \mathbb{N} .$$

2. Exemples.

(a) $p_0 = 1$, $p_n(x) = (1-x)^n + 1$, $n \geq 1$. Puisque $p_n(-1) = 2^n + 1$, la proposition 4 montre que l'hypothèse (S) n'est pas vérifiée.

(b) $p_n(x) = x^n$. Dans ce cas, (S) est vérifiée, car, si $\sum_{n=0}^N a_n x^n \geq 0$ sur $(-1, 1)$, on a aussi $\sum_{n=0}^N a_n x^n y^n = \sum_{n=0}^N a_n (xy)^n \geq 0$, quels que soient $x, y \in (-1, 1)$. La loi de composition correspondante sur $M_+((-1, 1))$ est la suivante :

$$\int_{-1}^1 f(x) d\mu \star \nu(x) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(xy) d\mu(x) d\nu(y) ,$$

pour $f \in C((-1, 1))$, $\mu, \nu \in M_+((-1, 1))$.

(c) $p_n(x) = (\alpha x + 1 - \alpha)^n$ pour $\alpha \neq 0$. On voit que $|p_n(x)| \leq 1$ sur $(-1, 1)$, si, et seulement si, $0 < \alpha \leq 1$. D'autre part, il est facile de voir que (S) est vérifiée, si, et seulement si, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. La loi de composition correspondante \star sur $M_+((-1, 1))$ est construite à partir de la loi de composition \circ_α sur $(-1, 1)$,

$$x \circ_\alpha y = \alpha xy + (1 - \alpha)(x + y) - (1 - \alpha),$$

par la formule

$$\int_{-1}^1 f(x) d\mu \star \nu(x) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x \circ_\alpha y) d\mu(x) d\nu(y).$$

(d) L'exemple fondamental : Les polynômes de Gegenbauer. - Soit $p_n^\nu(x)$ la suite de polynômes définie comme "le système orthogonal" associé à la mesure $(1 - x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dx$ sur $(-1, 1)$. Ici, ν est un paramètre réel > 0 . Plus précisément, $p_n^\nu(x)$ est le polynôme unique de degré n satisfaisant aux conditions :

$$(6) \quad \begin{cases} \int_{-1}^1 p_n^\nu(x) p_m^\nu(x) (1 - x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dx = 0, & \text{si } n \neq m, \\ p_n^\nu(1) = 1, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Les polynômes $p_n^\nu(x)$ sont liés aux polynômes de Gegenbauer $C_n^\nu(x)$ par la formule

$$C_n^\nu(x) = \frac{(2\nu)(2\nu + 1) \dots (2\nu + n - 1)}{n!} p_n^\nu(x);$$

voir par exemple [5], où on trouve aussi la formule suivante :

$$(p_n^\nu)'(1) = \frac{n(n + 2\nu)}{2\nu + 1}.$$

La formule d'addition de Gegenbauer ([5]) entraîne

$$(7) \quad \int_{-1}^1 p_n^\nu(xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} z) (1 - z^2)^{\nu - 1} dz = A_\nu p_n^\nu(x) p_n^\nu(y),$$

pour $x, y \in (-1, 1)$,

où

$$A_\nu = \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{\nu - 1} dz = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + 1/2)}.$$

On introduit une loi de composition \star (qui dépend de ν) sur $M_+((-1, 1))$, en posant

$$(8) \quad \int_{-1}^1 f d\mu \star \nu = \frac{1}{A_\nu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} z) (1 - z^2)^{\nu - 1} dz d\mu(x) d\nu(y),$$

pour $u, v \in M_+((-1, 1))$, $f \in C((-1, 1))$. La formule (7) montre que l'hypothèse (S) est vérifiée.

Pour une étude détaillée de cette loi de composition, consulter les travaux de HIRSCHMAN, Jr [6], et de BOCHNER [2].

(e) Les polynômes $T_n(x)$ de Čebyčev. - Ils sont définis par $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, et sont en fait un cas limite des polynômes de Gegenbauer avec $\nu = 0$. Une suite $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive (resp. définie négative) par rapport à (T_n) , si, et seulement si, φ est la restriction à \mathbb{N} d'une fonction paire $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est définie positive (resp. définie négative) au sens usuel sur le groupe des entiers \mathbb{Z} . L'hypothèse (S) est vérifiée.

(f) Les polynômes ultrasphériques. - On appelle ainsi le cas particulier du cas (d) où le paramètre $\nu = (k-2)/2$, $k = 3, 4, 5, \dots$. On les note $p_n(k, x)$, qui est alors le seul polynôme de degré n satisfaisant aux conditions

$$(9) \quad \begin{cases} \int_{-1}^1 p_n(k, x) p_m(k, x) (1-x^2)^{(k-3)/2} dx = 0, & \text{si } n \neq m, \\ p_n(k, 1) = 1, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Les polynômes $p_n(3, x)$ sont les polynômes de Legendre.

La loi de composition \star de (8) peut s'introduire d'une façon plus naturelle dans ce cas particulier :

Soient :

Ω_k , la sphère unité de \mathbb{R}^k , $k = 3, 4, \dots$;

$SO(k)$, le groupe des rotations de \mathbb{R}^k ;

$SO(k, a)$, le sous-groupe des rotations qui laissent le point $a \in \Omega_k$ fixe.

La sphère Ω_k sera toujours munie de la mesure ω_k^* , qui est invariante par $SO(k)$, et est de masse totale

$$\|\omega_k\| = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}.$$

L'importance des polynômes ultrasphériques vient du fait que, pour $a, \xi \in \Omega_k$, la fonction $\xi \mapsto p_n(k, a, \xi)$ est la seule fonction sphérique d'ordre n qui vaut 1 au point a , et qui est invariante par $SO(k, a)$ (cf. [7]).

Soient $F \in \mathcal{L}^1(\Omega_k)$, $a \in \Omega_k$. On note F_a la fonction symétrique de F autour du point a , c'est-à-dire

$$F_a(\xi) = \int_{SO(k, a)} F(A\xi) d\mu(A) = \frac{1}{\|\omega_{k-1}\|} \int_{a, \eta=0} F(ta + \sqrt{1-t^2} \eta) d\omega_{k-1}(\eta),$$

où μ est la mesure de Haar normalisée sur $SO(k, a)$, et $t = a.\xi$. La fonction F_a est invariante par $SO(k, a)$; par conséquent, il existe une fonction \tilde{F}_a sur $(-1, 1)$, intégrable par rapport à la mesure

$$(1 - t^2)^{(k-3)/2} dt,$$

telle que l'on ait $\tilde{F}_a(a.\xi) = F_a(\xi)$ pour tout $\xi \in \Omega_k$. De plus, on a

$$\int_{\Omega_k} F(\xi) d\omega_k(\xi) = \|\omega_{k-1}\| \int_{-1}^1 \tilde{F}_a(t) (1 - t^2)^{(k-3)/2} dt.$$

Si, en particulier, F est une fonction sphérique d'ordre n , F_a est une fonction sphérique d'ordre n (ou nulle) et invariante par $SO(k, a)$, d'où

$$(10) \quad F_a(\xi) = F(a) p_n(k, a.\xi); \quad \tilde{F}_a(t) = F(a) p_n(k, t), \quad \text{si } t = a.\xi.$$

Nous allons maintenant introduire un produit de convolution entre les mesures sur $(-1, 1)$ et les fonctions sur Ω_k ; cette convolution s'applique même à des distributions sur les deux espaces, et est étudiée dans des cas particuliers en [1]. Voir aussi [4]. Soient $\mu \in M((-1, 1))$, $F \in C(\Omega_k)$. On pose

$$\mu \star F(a) = \int_{-1}^1 \tilde{F}_a(t) d\mu(t), \quad \text{pour } a \in \Omega_k,$$

et $\mu \star F \in C(\Omega_k)$. Pour $f \in C((-1, 1))$, $a \in \Omega_k$, le produit de convolution de μ et de la fonction $\tau_a f: \xi \mapsto f(a.\xi)$ est une fonction continue sur Ω_k , invariante par $SO(k, a)$; donc il existe une fonction continue g sur $(-1, 1)$, telle que

$$g(a.\xi) = \mu \star \tau_a f(\xi) = \int_{-1}^1 (\widetilde{\tau_a f})_{\xi}(t) d\mu(t), \quad a, \xi \in \Omega_k.$$

En posant $\mu \star f = g$, et ensuite

$$(11) \quad \int_{-1}^1 f d\mu \star \nu = \int_{-1}^1 \mu \star f d\nu = \int_{-1}^1 \nu \star f d\mu, \quad \mu, \nu \in M((-1, 1)),$$

on retrouve la loi de composition \star sur $M((-1, 1))$, déjà définie dans (8) avec $\nu = (k-2)/2$.

D'après (10), on voit que

$$\mu \star p_n(k, \cdot)(s) = p_n(k, s) \int_{-1}^1 p_n(k, t) d\mu(t), \quad \text{pour toute } \mu \in M((-1, 1)),$$

d'où

$$\int_{-1}^1 p_n(k, t) d\mu \star \nu(t) = \int_{-1}^1 p_n(k, t) d\mu(t) \int_{-1}^1 p_n(k, t) d\nu(t),$$

pour toutes $\mu, \nu \in M((-1, 1))$,

et on a retrouvé le fait que l'hypothèse (S) est vérifiée dans le cas des polynômes ultrasphériques.

D'autre part, avec un peu de patience, on peut démontrer la loi d'associativité suivante pour $\mu, \nu \in M((-1, 1))$, $F \in C(\Omega_k)$, à savoir

$$(12) \quad (\mu \star \nu) \star F = \mu \star (\nu \star F).$$

(L'abus de notation, \star désignant deux lois de composition différentes, ne donne lieu à aucune confusion dans la pratique).

Il est facile de voir que $F \mapsto \mu \star F$ définit un opérateur borné T_μ dans $C(\Omega_k)$ qui commute avec les rotations, c'est-à-dire

$$(13) \quad (T_\mu F) \circ A = T_\mu(F \circ A), \quad \text{pour } F \in C(\Omega_k), A \in SO(k).$$

D'ailleurs, on peut montrer que tout opérateur borné T dans $C(\Omega_k)$, qui vérifie (13), est de la forme T_μ pour une certaine mesure μ sur $(-1, 1)$ (cf. [4]).

D'autre part, les opérateurs T_μ s'étendent à des opérateurs dans $\mathcal{L}^p(\Omega_k)$, $1 \leq p \leq \infty$, qui vérifient encore (13). Dans certains cas, on peut affirmer qu'un opérateur borné dans $\mathcal{L}^p(\Omega_k)$, qui vérifie (13), est de la forme T_μ (cf. [4]).

Ici, nous nous contenterons de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 7. - Pour qu'un opérateur borné T dans $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$ satisfasse aux conditions :

(i) T commute avec les rotations, i. e. $(TF) \circ A = T(F \circ A)$ pour $A \in SO(k)$, $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$;

(ii) T est sous-markovien, i. e. $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$, $0 \leq F \leq 1 \implies 0 \leq TF \leq 1$, les inégalités ayant lieu presque-partout ;

il est nécessaire et suffisant qu'il existe une mesure positive μ sur $(-1, 1)$, de masse totale ≤ 1 , telle que l'on ait $TF = \mu \star F$ pour toute $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$.

Démonstration. - La condition est évidemment suffisante.

Inversement, supposons que T vérifie les conditions (i) et (ii).

Cas particulier : $T(\mathcal{L}^2(\Omega_k)) \subset C(\Omega_k)$. Dans ce cas, quel que soit $a \in \Omega_k$, il existe une mesure positive μ_a sur Ω_k , de masse totale ≤ 1 , telle que

$$\int_{\Omega_k} F d\mu_a = TF(a), \quad \text{pour toute } F \in C(\Omega_k),$$

car il est facile de voir que $F \mapsto TF(a)$ définit une forme linéaire positive sur $C(\Omega_k)$.

Soit $f \in C([-1, 1])$, et soient $a, b \in \Omega_k$. Il existe $A \in SO(k)$ telle que $Aa = b$, d'où

$$\int_{\Omega_k} f(b \cdot \xi) d\mu_b(\xi) = T(\tau_b f)(Aa) = T(\tau_b f \circ A)(a) = T(\tau_a f)(a) = \int_{\Omega_k} f(a \cdot \xi) d\mu_a(\xi),$$

ce qui montre qu'il existe une mesure positive μ sur $[-1, 1]$, de masse ≤ 1 , telle qu'on ait

$$\int_{-1}^1 f(t) d\mu(t) = \int_{\Omega_k} f(a \cdot \xi) d\mu_a(\xi),$$

quels que soient $a \in \Omega_k$, $f \in C([-1, 1])$. La mesure μ_a est invariante par $SO(k, a)$, car, pour $A \in SO(k, a)$, on a

$$\int_{\Omega_k} F \circ A d\mu_a = T(F \circ A)(a) = TF(Aa) = TF(a) = \int_{\Omega_k} F d\mu_a,$$

pour toute $F \in C(\Omega_k)$. Cette invariance entraîne que

$$\int_{\Omega_k} F(\xi) d\mu_a(\xi) = \int_{\Omega_k} F_a(\xi) d\mu_a(\xi) = \int_{\Omega_k} \tilde{F}_a(a \cdot \xi) d\mu_a(\xi) = \int_{-1}^1 \tilde{F}_a(t) d\mu(t),$$

donc $TF(a) = \mu \star F(a)$, quels que soient $F \in C(\Omega_k)$, $a \in \Omega_k$, et par continuité,

$$TF = \mu \star F, \quad \text{pour toute } F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k).$$

Cas général : Soit φ_ε , $\varepsilon > 0$, une famille de fonctions continues positives sur $[-1, 1]$, φ_ε à support dans $]1 - \varepsilon, 1]$, et satisfaisant

$$\int_{-1}^1 \varphi_\varepsilon(t) (1 - t^2)^{(k-3)/2} dt = 1.$$

Alors

$$\varphi_\varepsilon \star F(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{k-1}\|} \int_{\Omega_k} \varphi_\varepsilon(\xi \cdot \eta) F(\eta) d\omega_k(\eta)$$

est une fonction continue sur Ω_k , quelle que soit $F \in \mathcal{L}^1(\Omega_k)$, et une bonne approximation de F au sens suivant :

$\varphi_\varepsilon \star F$ tend vers F dans $C(\Omega_k)$ (resp. $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$), quand ε tend vers 0 ,
quelle que soit $F \in C(\Omega_k)$ (resp. $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$).

L'opérateur T_ε dans $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$, défini par

$$T_\varepsilon F = \varphi_\varepsilon \star TF ,$$

satisfait aussi aux conditions (i) et (ii), et entre dans le cas particulier. Donc, il existe des mesures positives μ_ε sur $(-1, 1)$, de masses ≤ 1 , telles que l'on ait

$$T_\varepsilon F = \mu_\varepsilon \star F , \quad \text{pour toute } F \in C(\Omega_k) .$$

Si μ est une mesure vaguement adhérente à l'ensemble des μ_ε , on trouve, par un passage à la limite simple, que

$$TF = \mu \star F , \quad \text{pour toute } F \in C(\Omega_k) ,$$

ce qui s'étend par continuité à toute $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$.

Remarque. - L'opérateur T est de norme ≤ 1 . D'autre part, T est un opérateur hermitien. Ceci est même vrai pour tous les opérateurs T_μ dans $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$, μ étant une mesure de signe quelconque sur $(-1, 1)$ (cf. [1], lemme 4.2).

COROLLAIRE 8. - Il y a une bijection entre les semi-groupes fortement continus d'opérateurs de contraction dans $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$, qui sont sous-markoviens, et qui commutent avec les rotations, et les semi-groupes de convolution (5) de mesures positives, la loi de composition \star étant celle définie dans (11) (ou dans (8), avec $\nu = (k-2)/2$).

Démonstration. - D'après la proposition 7, les opérateurs envisagés P_t , $t > 0$, sont de la forme $P_t F = \mu_t \star F$, $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$, où μ_t est une mesure positive sur $(-1, 1)$ de masse totale ≤ 1 . La formule (12) démontre la propriété de semi-groupe, et il est facile de montrer l'équivalence entre les deux propriétés de continuité :

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0} P_t F = F$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$, pour toute $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$;
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t \star F = F$, simplement pour toute $F \in C(\Omega_k)$.

(On utilise les φ_ε .)

Une fonction $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$ se développe en série de fonctions sphériques

$$F \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n ,$$

où F_n est la projection de F sur l'espace vectoriel des fonctions sphériques d'ordre n , dont la dimension est notée $N(k, n)$. On sait que (cf. [7])

$$F_n(\xi) = \frac{N(k, n)}{\|\omega_k\|} \int_{\Omega_k} p_n(k, \xi \cdot \eta) F(\eta) d\omega_k(\eta) .$$

LEMME 9. - Si $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$ a le développement $F \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n$, et si μ est une mesure sur $(-1, 1)$, alors $\mu \star F$ a le développement

$$\mu \star F \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) F_n,$$

où on a posé

$$\hat{\mu}(n) = \int_{-1}^1 p_n(k, t) d\mu(t).$$

Démonstration. - On combine la formule (10) avec la remarque ci-dessus que l'opérateur T est hermitien.

3. Formes et espaces de Dirichlet sur la sphère.

Pour la théorie générale des formes et espaces de Dirichlet, on renvoie à [3].
Voici notre résultat principal :

THÉOREME 10. - Soit Q une forme de Dirichlet sur le sous-espace dense V de $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$, invariante par rotations (i. e.

$$F \in V, A \in SO(k) \implies F \circ A \in V \text{ et } Q(F \circ A) = Q(F).$$

Alors il existe une suite φ définie négative par rapport aux polynômes ultrasphériques $p_n(k, x)$, telle que l'on ait

$$(14) \quad Q(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2 \varphi(n),$$

pour tout élément $F \in V$; ici, $F \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ est le développement de F en série de fonctions sphériques, et $\|\cdot\|$ est la norme de $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$. D'autre part, V est exactement l'ensemble des $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$ pour lesquelles le second membre de (14) est fini.

Inversement, si φ est une suite définie négative par rapport aux polynômes ultrasphériques $p_n(k, x)$, la formule (14) définit une forme de Dirichlet invariante par les rotations sur l'ensemble V des fonctions de $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$ pour lesquelles le second membre est fini.

Pour que Q soit définie positive, il faut et il suffit que $\varphi(0) > 0$. Dans ce cas, V , muni de la norme $Q^{\frac{1}{2}}$, est un espace de Dirichlet régulier et invariant par rotations. Inversement, tout espace de Dirichlet régulier de base (Ω_k, ω_k) et invariant par les rotations est de cette forme.

Démonstration. - Soit P_t , $t > 0$, le semi-groupe fortement continu d'opérateurs dans $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$ associé à Q (cf. [3], chapitre 5). On sait que les P_t sont des opérateurs sous-markoviens de norme ≤ 1 , et ils commutent avec les rotations, parce que Q est invariante. Soient μ_t , $t > 0$, le semi-groupe de convolution de type (5) de mesures positives, et φ la suite définie négative par rapport aux polynômes ultrasphériques $p_n(k, x)$, tels que l'on ait

$$P_t F = \mu_t \star F, \quad \int_{-1}^1 p_n(k, x) d\mu_t(x) = \exp(-t\varphi(n)),$$

pour $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$, $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons utiliser les formes approchées Q_t (cf. [3], chapitre 5). Par définition,

$$Q_t(F) = \frac{1}{t} \langle F - \mu_t \star F, F \rangle, \quad \text{pour } F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k),$$

où \langle, \rangle désigne le produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Omega_k)$.

Si F a le développement $F \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ en série de fonctions sphériques, le développement de $F - \mu_t \star F$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \exp(-t\varphi(n))) F_n \quad (\text{lemme 9}),$$

et par la formule de Parseval, on trouve

$$(15) \quad Q_t(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2 \frac{1 - \exp(-t\varphi(n))}{t}.$$

Si on fait tendre t vers 0 en décroissant, on sait de la théorie générale des formes approchées que $Q_t(F)$ croît vers

$$\begin{cases} Q(F), & \text{si } F \in V, \\ \infty, & \text{si } F \notin V; \end{cases}$$

puisque le second membre de (15) croît vers

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2 \varphi(n),$$

on a démontré la première partie de l'énoncé.

Inversement, si φ est une suite définie négative par rapport aux polynômes ultrasphériques, et si μ_t et $P_t F = \mu_t \star F$, $t > 0$, sont les semi-groupes correspondants, le calcul qu'on vient de faire montre bien, que la forme hermitienne positive fermée Q associée à (P_t) est donnée par la formule (14), et son

domaine V est l'ensemble indiqué. Il est clair que Q est invariante par les rotations, et Q est une forme de Dirichlet, parce que les opérateurs P_t sont sous-markoviens ([3], chapitre 5, théorème 1).

Quant à la troisième partie, on remarque que

$$Q(1) = \|\omega_k\| \varphi(0) ,$$

dont on déduit, si Q est définie positive, que $\varphi(0) > 0$. Inversement, Q est définie positive dès que $\varphi(0) > 0$, car, si $Q(F) = 0$, on a $F_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, parce que $\varphi(n) \geq \varphi(0)$ (proposition 4), et donc $F = 0$.

Si on suppose $\varphi(0) > 0$, V est complet pour la norme hilbertienne $Q^{\frac{1}{2}}$, car V est complet pour la norme $(\|F\|^2 + Q(F))^{\frac{1}{2}}$ (Q étant une forme fermée), et d'autre part

$$(16) \quad \varphi(0)\|F\|^2 \leq Q(F) .$$

L'espace de Hilbert $H = (V, Q^{\frac{1}{2}})$ est un espace de Dirichlet, dès qu'on a vu que l'injection canonique de H dans $\mathcal{L}^1(\Omega_k)$ est continue, ce qui est évident à partir de (16). L'espace de Dirichlet H est régulier, parce que V contient toutes les fonctions sphériques.

Finalement, tout espace de Dirichlet H de base (Ω_k, ω_k) , et invariant par les rotations, est donné par une suite φ , qui est définie négative par rapport aux polynômes ultrasphériques et satisfait $\varphi(0) > 0$, à savoir que

$$H = \{F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k) \mid Q(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2 \varphi(n) < \infty\} ,$$

et Q est le carré de la norme hilbertienne de H . On le voit en observant que la restriction de Q à $H \cap \mathcal{L}^2(\Omega_k)$ est une forme de Dirichlet invariante par rotations. (A priori, on sait uniquement que $H \subset \mathcal{L}^1(\Omega_k)$.)

Voici quelques commentaires au théorème 10 :

La formule (3) de toutes les suites définies négatives permet de donner une représentation explicite de toutes les formes de Dirichlet invariantes par rotations sur la sphère Ω_k , $k \geq 3$. En effet, d'après (14), on obtient, par la formule de Parseval,

$$Q(F) = a\|F\|^2 + b\langle F, \delta_1' \star F \rangle + \int_{-1}^1 \langle F, F - \delta_x \star F \rangle d\sigma(x) ,$$

où $a, b \geq 0$ sont les constantes positives de (3), et σ est la mesure positive sur $[-1, 1[$ de (3), qui vérifie

$$\int_{-1}^1 (1-x) d\sigma(x) < \infty .$$

Enfin, δ_x est la mesure de Dirac au point $x \in (-1, 1[$, et δ_1' la distribution sur la droite $\varphi \mapsto \varphi'(1)$. (On n'a pas insisté sur le fait que le produit de convolution \star s'applique à des distributions, et que le lemme 9 reste valable pour des distributions μ).

Soit φ la suite définie négative du théorème 10 telle que $\varphi(0) > 0$, et soit

$$H = \{F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k) \mid Q(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2 \varphi(n) < \infty\}$$

l'espace de Dirichlet associé, Q désignant le carré de la norme. La suite $1/\varphi$ est définie positive (corollaire 6), donc il existe une mesure positive ν sur $(-1, 1)$, telle que

$$\int_{-1}^1 P_n(k, x) d\nu(x) = \frac{1}{\varphi(n)} .$$

On appelle ν le noyau potentiel de H , car, si F est une fonction réelle mesurable bornée sur Ω_k , le potentiel u_F , engendré par F (au sens des espaces de Dirichlet; cf. [3], chapitre 1), n'est rien d'autre que $\nu \star F$, c'est-à-dire que $\nu \star F$ est le seul élément de H vérifiant

$$Q(G, \nu \star F) = \int_{\Omega_k} G(\xi) F(\xi) d\omega_k(\xi) ,$$

pour tout élément $G \in H$, ce qui résulte de la formule de Parseval.

Le nombre

$$Q(\nu \star F) = \langle \nu \star F, F \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2 \frac{1}{\varphi(n)}$$

s'appelle l'énergie du potentiel $\nu \star F$.

Plus généralement, on introduit l'espace W des distributions d'énergie finie,

$$W = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega_k) \mid I(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \|T_n\|^2 \frac{1}{\varphi(n)} < \infty\} ,$$

où $T \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ est le développement de la distribution T en série de fonctions sphériques (cf. [1]). Le nombre $I(T)$ est appelé l'énergie de T , et I est le carré d'une norme hilbertienne sur W . Le lemme suivant montre que W est complet pour cette norme.

LEMME 11. - On se donne, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction sphérique T_n d'ordre n , et on suppose que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_n\|^2 \frac{1}{\varphi(n)} < \infty .$$

Alors il existe une distribution $T \in \mathcal{O}'(\Omega_k)$ avec le développement $T \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n$.

Démonstration. - On pose $\alpha_n = 1 + n(n + k - 2)$, et la proposition 4 entraîne que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{\alpha_n} T_n \right\|^2 < \infty .$$

Il existe donc une distribution $F \in \mathcal{L}^2(\Omega_k)$ avec le développement

$$F \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} T_n ,$$

et, par conséquent, la distribution $(1 - \Delta_k^*)F$ a le développement

$$(1 - \Delta_k^*)F \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n \quad (\text{cf. [7]}) .$$

Ici, Δ_k^* désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Ω_k .

Pour toute distribution $T \in W$, la distribution $\nu * T$ est dans H , et est appelée le potentiel (généralisé) d'énergie finie engendré par T , et il est facile de vérifier que l'application

$$T \mapsto \nu * T$$

définit une isométrie de l'espace de Hilbert W sur l'espace de Hilbert H .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERG (Christian). - Corps convexes et potentiels sphériques, Det Kgl. Danske Vid. Selskab, Mat.-Fys. Medd., t. 37, 1969, n° 6, 64 p.
- [2] BOCHNER (S.). - Positive zonal functions on spheres, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 40, 1954, p. 1141-1147.
- [3] DENY (J.). - Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, Potential theory. - Roma, Cremonese, 1970 (Centro Internazionale Matematico Estivo, I ciclo, Stresa, 1970).
- [4] DUNKL (Charles F.). - Operators and harmonic analysis on the sphere, Trans. Amer. math. Soc., t. 125, 1966, p. 250-263.
- [5] ERDELYI (A.), Editor. - Higher transcendental functions. Vol. 1-3. - New York, McGraw-Hill Book Company, 1953-1955 (California Institute of Technology. Bateman Manuscript Project).

- [6] HIRSCHMAN (I. I., Jr). - Harmonic analysis and ultraspherical polynomials, Symposium on Harmonic analysis and related integral transforms [1956. Cornell University].
- [7] MÜLLER (Claus). - Spherical harmonics. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 17).
- [8] PÓLYA (G.) und SZEGÖ (G.). - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Band 2. - Berlin, J. Springer, 1925 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ..., 20).
- [9] SCHOENBERG (I. J.). - Metric spaces and positive definite functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 44, 1938, p. 522-536.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Christian BERG
Matematisk Institut
Universitetsparken 5
DK-2100 - KOBENHAVN Ø
(Danemark)
