C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 488-490 (14 septembre 1970). Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Suites définies négatives et espaces de Dirichlet sur la sphère* (¹). Note (*) de M. **Christian Berg**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

On introduit une notion de suites définies positives et négatives par rapport à une suite de polynômes. Sous certaines hypothèses portant sur les polynômes on peut développer une théorie aussi féconde que la théorie classique : Une formule de Lévy-Khintchine, un théorème de type Schoenberg, etc. Les polynômes de Gegenbauer entrent dans ce cadre, et dans une Note suivante on va montrer comment les suites définies négatives par rapport à ces polynômes permettent la caractérisation complète des formes et espaces de Dirichlet invariants par rotations sur la sphère unité dans $\mathbf{R}^k$.

On se donne une fois pour toutes une suite (p_n), $n \in \mathbf{N}$, de polynômes réels, p_n de degré n. On ne considère ces polynômes que dans l'intervalle $[-1, 1]$, et on suppose que $p_n(1) = 1$.

Une suite $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ est dite

(1) *définie positive* (de type positif) si

$$\forall\, a_0, \ldots, a_N \in \mathbf{R} : \left(\sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x) \geqq 0 \text{ pour } x \in [-1, 1]\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi(n) \geqq 0\right);$$

(2) *définie négative*, si $\varphi(0) \geqq 0$ et si

$$\forall\, a_0, \ldots, a_N \in \mathbf{R} : \left(\sum_{n=0}^{N} a_n = 0,\ \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x) \geqq 0 \text{ pour } x \in [-1, 1]\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi(n) \leqq 0\right).$$

L'ensemble des suites définies positives et l'ensemble des suites définies négatives sont des cônes convexes, stables par limites simples et contenant les constantes positives. D'autre part, si φ est définie positive (resp. négative), $\varphi(0) - \varphi$ [resp. $\varphi - \varphi(0)$] est définie négative.

Pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ à support contenu dans $[-1, 1]$, on définit la suite $\hat{T}$ par $\hat{T}(n) = T(p_n)$.

Voici une caractérisation des suites définies positives et négatives [*cf.* (⁴)] :

(3) Les suites définies positives sont exactement les suites $\hat{\mu}$, μ étant une mesure positive sur $[-1, 1]$.

(4) Les suites définies négatives sont exactement les suites $\hat{T}$, T étant une distribution à support dans $[-1, 1]$ vérifiant le principe

$$\forall f \in C^\infty(\mathbf{R}) : \left(\max_{[-1,1]} f = f(1) \geqq 0\right) \Rightarrow (T(f) \geqq 0).$$

On peut aussi donner une représentation intégrale de type Lévy-Khintchine pour les suites définies négatives φ

$$\varphi(n) = a + b\,p'_n(1) + \int_{-1}^{1} (1 - p_n(x))\, d\sigma(x), \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{5}$$

où a, $b \geqq 0$ sont des constantes positives, et σ une mesure positive sur $[-1, 1[$ telle que $\int_{-1}^{1} (1 - x)\, d\sigma(x) < \infty$.

Notre principal exemple consiste en les polynômes p_n^λ de Gegenbauer, qui sont orthogonaux par rapport à la mesure $(1 - x^2)^{\lambda - 1/2}\, dx$ sur $[-1, 1]$ et normalisés par $p_n^\lambda(1) = 1$. Ici λ est un paramètre réel $\geqq 0$. Dans ce cas, le cône des suites définies positives est stable par multiplication, car il existe un produit de convolution $\star$ (dépendant de λ) sur le cône $M_+([-1, 1])$ des mesures positives sur $[-1, 1]$, telle que l'on ait

$$\widehat{\mu \star \nu} = \hat{\mu} . \hat{\nu} \qquad \text{pour} \quad \mu, \nu \in M_+([-1, 1])$$

[*cf.* (2), (5)].

Pour un développement ultérieur de notre théorie il sera nécessaire de supposer cette hypothèse de stabilité par multiplication :

(S) *Si* φ et ψ *sont des suites définies positives, alors* $\varphi\psi$ *l'est aussi.*

Proposition 6. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'hypothèse* (S) *est vérifiée;*

(ii) $\forall\, \varphi$ *définie positive,*

$$\forall\, a_0, \ldots, a_N \in \mathbf{R} : \left(\sum_{n=0}^{N} a_n p_n \geqq 0 \ sur\ [-1, 1] \right) \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi(n)\, p_n \geqq 0 \ sur\ [-1, 1] \right);$$

(iii) *Il existe une loi de composition* $\star$ *et une seule définie sur le cône* $M_+([-1, 1])$, *telle que l'on ait* $\widehat{\mu \star \nu} = \hat{\mu} . \hat{\nu}$, *quelles que soient* $\mu, \nu \in M_+([-1, 1])$.

On suppose dorénavant que *l'hypothèse* (S) *est vérifiée*, et on note $\star$ la loi de composition unique de la condition (iii). Voici quelques conséquences :

(7) On a $|p_n(x)| \leqq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

(8) Si φ est définie positive, alors $|\varphi(n)| \leqq \varphi(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(9) Si φ est définie négative, alors $\varphi(n) \geqq \varphi(0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et la suite $\varphi(n)/n^2$ est bornée.

Théorème 10 (de type Schoenberg). — *Pour une suite* φ *donnée il équivaut à dire :*

(i) φ *est définie négative;*

(ii) $\varphi(0) \geqq 0$ *et* $\exp(-t\varphi)$ *est définie positive pour tout* $t > 0$.

A partir du théorème 10 on peut montrer que beaucoup de propriétés, qu'on connaît pour les fonctions définies négatives classiques, subsistent dans notre cadre :

(11) Si φ est définie négative et si $\varphi(0) > 0$, alors $1/\varphi$ est définie positive.

(12) Les suites définies négatives sont les suites $a + \varphi(0) - \varphi$ et leurs limites simples, où $a \geqq 0$, et φ est définie positive.

(13) Les fonctions de Bernstein opèrent sur les suites définies négatives [*cf.* (3)].

On considère les semi-groupes μ_t, $t > 0$, de mesures positives sur $[-1, 1]$ vérifiant :

$$(14) \qquad \begin{cases} \mu_t \star \mu_s = \mu_{t+s} & \text{quels que soient } t,\ s > 0, \\ \| \mu_t \| \leqq 1 & \text{quel que soit } t > 0, \\ \mu_t \text{ tend vers } \delta_1 \text{ vaguement, quand } t \text{ tend vers zéro.} \end{cases}$$

Il y a une bijection canonique entre de tels semi-groupes et les suites définies négatives φ, *établie par la relation*

$$\hat{\mu}_t(n) = \exp(-t\,\varphi(n)) \qquad \textit{pour} \quad t > 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Exemples. — On a déjà mentionné que les polynômes de Gegenbauer p_n^λ vérifient l'hypothèse (S). Un autre exemple est constitué par les polynômes $p_n(x) = (ax + 1 - a)^n$, qui vérifient l'hypothèse (S) si et seulement si $1/2 \leqq a \leqq 1$.

(*) Séance du 17 août 1970.

(1) Une partie de cette Note est exposée en mai 1970 dans le séminaire de théorie du potentiel (Brelot, Choquet, Deny) à Paris.

(2) S. Bochner, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 40, 1954, p. 1141-1147.

(3) J. Deny, *Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel*, C. I. M. E., 1969, I ciclo : *Potentiel Theory*.

(4) C. S. Herz, *Ann. Inst. Fourier*, 15, 1965, p. 169-188.

(5) I. I. Hirschman Jr, *Harmonic Analysis and ultraspherical polynomials*, Proceedings on the conference on Harmonic Analysis, Cornell, 1956.

(*Matematisk Institut,*
Universitetsparken 5,
2100 *Copenhague, Danemark.*)