C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 778-780 (19 octobre 1970). Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Suites définies négatives et espaces de Dirichlet sur la sphère* [1]. Note (*) de M. **Christian Berg**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Dans une Note précédente nous avons introduit la notion de suites définies positives et négatives par rapport à une suite de polynômes. Ici, on donne la caractésation complète des formes et espaces de Dirichlet invariants par rotations sur la sphère unité dans $\mathbf{R}^k$ à l'aide des suites définies négatives par rapport aux polynômes de Gegenbauer p_n^λ.

Notations :

Ω_k, la sphère unité de $\mathbf{R}^k$, $k \geq 3$;

$\mathrm{SO}(k)$, le groupe des rotations de $\mathbf{R}^k$;

ω_k, la mesure invariante ordinaire sur Ω_k;

$\mathcal{E}$, l'espace de Hilbert, $\mathcal{L}^2(\Omega_k, \omega_k)$;

$p_n(k)$, le polynôme de Gegenbauer $p_n^{(k-2)/2}$, $n \geq 0$.

Pour la théorie générale des formes et espaces de Dirichlet nous renvoyons à [4].

Théorème 1. — *Il existe une bijection canonique entre les formes de Dirichlet* Q *définies sur des sous-espaces denses* V *de* $\mathcal{E}$ *et invariantes par les rotations* [*i. e.* $F \in V$, $A \in \mathrm{SO}(k)$ *entraînent* $F \circ A \in V$ et $Q(F \circ A) = Q(F)$], *et les suites* φ *définies négatives par rapports aux polynômes* $p_n(k)$. *Cette bijection est établie par les relations*

$$(1)\quad V = \left\{ F \in \mathcal{E} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \| F_n \|^2 \varphi(n) < \infty \right\}; \qquad Q(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \| F_n \|^2 \varphi(n) \quad \textit{pour} \quad F \in V,$$

où $F \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ *est le développement de* F *en série de fonctions sphériques, et* $\|.\|$ *est la norme hilbertienne de* $\mathcal{E}$.

Théorème 2. — *Il existe une bijection canonique entre les espaces de Dirichlet* $\mathcal{H}$ sur Ω_k, *réguliers et invariants par les rotations* [*i. e.* $F \in \mathcal{H}$, $A \in \mathrm{SO}(k)$ *entraînent* $F \circ A \in \mathcal{H}$ *et* $|||F \circ A||| = |||F|||$, $|||.|||$ *étant la norme hilbertienne de* $\mathcal{H}$], *et les suites* φ *définies négatives par rapport aux polynômes* $p_n(k)$ *et vérifiant* $\varphi(0) > 0$. *Cette bijection est établie par les relations*

$$(2)\quad \mathcal{H} = \left\{ F \in \mathcal{E} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \| F_n \|^2 \varphi(n) < \infty \right\}; \qquad |||F|||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| F_n \|^2 \varphi(n) \quad \textit{pour} \quad F \in \mathcal{H},$$

où on utilise la notation du théorème 1.

Les deux théorèmes reposent sur la connaissance de la structure des opérateurs bornés U dans $\mathcal{E}$ qui vérifient (*a*) U *commute avec les rotations*, i. e. $U(F \circ A) = (UF) \circ A$ pour toute $F \in \mathcal{E}$ et pour toute rotation A;

(*b*) U *est sous-markovien*, i. e. $F \in \mathcal{E}$, $0 \leqq F \leqq 1$ entraînent $0 \leqq UF \leqq 1$ (les inégalités ayant lieu presque partout).

Un opérateur borné U dans $\mathcal{E}$ vérifie (*a*) et (*b*), si et seulement si il existe une mesure positive μ sur $[-1, 1]$ de masse totale $\leqq 1$, telle que l'on ait $UF = \mu \star F$ pour $F \in \mathcal{E}$, où $\mu \star F$ est la fonction sur Ω_k définie par

$$\mu \star F(a) = \int_{-1}^{1} \tilde{F}_a(t)\, d\mu(t), \tag{3}$$

$\tilde{F}_a$ étant la fonction sur $[-1, 1]$, qui au point t est la moyenne de F sur la sphère $\{\xi \in \Omega_k \mid a.\xi = t\}$ de dimension $k-2$ (ou 0 si $t = \pm 1$).

Ceci entraîne, qu'il existe une bijection canonique entre les semi-groupes fortement continus d'opérateurs de contraction dans $\mathcal{E}$ vérifiant (*a*) et (*b*), et les semi-groupes de mesures positives sur $[-1, 1]$ vérifiant (14) de la Note précédente [3], la loi $\star$ étant celle qui correspond aux polynômes $p_n(k)$.

Remarques. — 1° La formule de Lévy-Khintchine établie dans [3] donne la représentation explicite suivante de toutes les formes de Dirichlet Q invariantes par rotations sur la sphère :

$$Q(F) = a\,\|F\|^2 + b\langle F, \delta'_1 \star F\rangle + \int_{-1}^{1} \langle F, F - \delta_x \star F\rangle\, d\sigma(x),$$

où a, b sont des constantes positives et σ une mesure positive sur $[-1, 1[$ telle que

$$\int_{-1}^{1} (1-x)\, d\sigma(x) < \infty.$$

Le crochet $\langle\,,\rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathcal{E}$. Enfin δ_x est la mesure de Dirac au point $x \in [-1, 1[$, et δ'_1 la distribution sur la droite $\varphi \mapsto \varphi'(1)$. Il est sous-entendu qu'on peut étendre la définition de la convolution (3) à des distributions.

2° Si φ est une suite définie négative telle que $\varphi(0) > 0$, la mesure positive ν sur $[-1, 1]$ telle que $\hat{\nu} = 1/\varphi$ est le noyau potentiel de l'espace de Dirichlet $\mathcal{H}$ correspondant : Le potentiel engendré par $F \in C(\Omega_k)$ est la fonction $\nu \star F \in \mathcal{H}$ donnée par (3).

Plus généralement on introduit l'espace W des distributions sur Ω_k d'énergie finie

$$W = \left\{ T \in \mathcal{D}'(\Omega_k) \;\middle|\; \mathcal{I}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \|T_n\|^2 \varphi(n)^{-1} < \infty \right\},$$

où $T \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ est le développement de la distribution T en série de fonctions sphériques [*cf.* [5]]. Le nombre $\mathcal{I}(T)$ est l'énergie de T, et $\mathcal{I}$ est le carré d'une norme hilbertienne sur W pour laquelle W est complet.

Pour toute distribution $T \in W$, la distribution $\nu \star T$ est dans $\mathcal{H}$ et est appelée le potentiel (généralisé) d'énergie finie engendré par T. L'application $T \mapsto \nu \star T$ définit une isométrie de l'espace de Hilbert W sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

(*) Séance du 5 octobre 1970.

(1) Une partie de cette Note est exposée en mai 1970 dans le Séminaire de Théorie du potentiel (Brelot, Choquet, Deny) à Paris.

(2) Pour les notations employées nous renvoyons à la Note précédente (3).

(3) *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 488.

(4) J. DENY, *Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel*, C. I. M. E., 1969, I ciclo : *Potential Theory*.

(5) C. BERG, *Corps convexes et potentiels sphériques* (*Det Kgl. Danske Vid. Selskab*, Mat.-Fys. Medd. 37, 6. Copenhague, 1969).

(*Matematisk Institut,*
Universitetsparken 5,
2100 *Copenhague ø,*
Danemark.)