

GAUSS-BONNET

HANS PLESNER JAKOBSEN

1.1. Indledning. En af de mest fundamentale sætninger i geometri er Thales' Sætning, der siger, at vinkelsummen i en trekant er lig med π . Generalisationen af denne sætning til flader i rummet hedder Gauss-Bonnet's Sætning. Vi giver her et elementært bevis for denne sætning, der kun benytter Green's Sætning i planen samt "Sætningen om de roterende tangenter" (se hhv. Sætning 1 og Sætning 2 nedenfor). Sætningen (Sætning 3) er noget af et mirakel, og det er beviset her sådan set også.¹

2.1. Konventioner og notation. Partielle afledede af (vektor-)funktioner af flere variable betegnes med et nedre index. Således sættes $\frac{\partial N}{\partial x} = N_x$, og de variable udelades undertiden i funktionen. Når vi betragter restriktionen af en funktion N (el. lign.) defineret i en åben delmængde U af $\mathbb{R}^3$ til en kurve $\gamma(s)$, der løber i U , skriver vi ofte $N(s)$ i stedet for $N(\gamma(s))$ (eller blot N).

Ved en glat simpel lukket kurve γ i planen $\mathbb{R}^2$ forstås en C^∞ -afbildning $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \gamma(t)$, for hvilken der findes et positivt tal L således at

$$(1) \quad \forall t : \gamma(t+L) = \gamma(t) \text{ og } 0 < t_1 < t_2 \leq L \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2).$$

Løst sagt er dette en kurve, der ikke skærer sig selv. Vi vil senere få brug for simple lukkede kurver, der kun stykvist er C^∞ . Med dette vil vi forstå kontinuerte kurver, der opfylder (1) og er C^∞ på nær i endeligt mange punkter $0 \leq t_1 < \dots < t_n < L$, i hvilke der dog for alle $i = 1, \dots, n$ skal eksistere de første ordens afledede $\gamma'(t_i^-)$ og $\gamma'(t_i^+)$ fra begge sider.

3.1. Flader i rummet. Vi skal ikke her indføre flader S helt fra bunden af. Det viser sig nemlig at være en egenskab dels ved flader og dels ved den sætning, vi ønsker at bevise, at det er nok at bevise den for flader, der fremkommer som grafen for en funktion ϕ . Se i øvrigt de afsluttende bemærkninger.

Vi betragter altså udelukkende mængder af formen $S = \mathcal{G}_\phi$, hvor

$$(2) \quad \mathcal{G}_\phi = \{f(x, y) = (x, y, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2\},$$

hvor U er en åben mængde, $\phi \in C^\infty(U)$, og hvor vi benyttede lejligheden til at indføre funktionen f , som er en såkaldt parametrisering.

Følgende udtryk er af central betydning:

$$(3) \quad f_x(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \phi_x(x, y) \end{pmatrix}, f_y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \phi_y(x, y) \end{pmatrix} \text{ og}$$

¹Dette var "Side 9 Sætningen" i "Famøs", maj 1994

$$(4) \quad N = N(x, y) = \frac{f_x \times f_y}{\|f_x \times f_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\phi_x \\ -\phi_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Faktisk kan vi nu indføre **tangentrummet** $T_m(S)$ til S i et punkt $m = f(x, y) \in S$ som

$$(5) \quad T_m(S) = \text{Span}\{f_x(x, y), f_y(x, y)\} = \{\mathbb{R} \cdot N(x, y)\}^\perp.$$

Dette er et underrum, der ligger parallelt med den plan (det “sideunderrum”), der tangerer fladen S i punktet $m = f(x, y)$.

3.2. En interessant størrelse. Dette afsnit går ud på at forklare, hvorfor udtrykket

$$(6) \quad K(x, y) = \frac{\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}\phi_{xy}}{(1 + \phi_x^2 + \phi_y^2)^2},$$

som i lettere modificeret form får en central rolle, dukker op. I første omgang kan man evt. blot tro på, at det er vigtigt og så gå videre til næste afsnit.

Vi betragter afbildningen N i (4) som en afbildning fra $S = \mathcal{G}_\phi$ til kugleoverfladen S^2 , ja faktisk til den “øvre hemisfære S_+^2 ” bestemt ved, at z -koordinaten er strengt positiv. Dette er “Gauss-afbildningen”. Der gælder nu, at $S_+^2 = \mathcal{G}_{\psi_0}$, hvor

$$(7) \quad \psi_0(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Differentialet af N i m , dN_m , er en afbildning fra tangentrummet $T_m(S)$ til S i m til tangentrummet $T_{N(m)}(S^2)$ til S^2 i $N(m)$.

$$(8) \quad dN(a_1 f_x + a_2 f_y) \stackrel{Def.}{=} a_1 N_x + a_2 N_y,$$

og det er et faktum (som det er elementært at eftervise), at der givet a_1, a_2 findes konstanter b_1, b_2 således at

$$(9) \quad a_1 N_x + a_2 N_y = b_1 f_x + b_2 f_y.$$

Faktisk kan man udregne (overlades til læseren) at

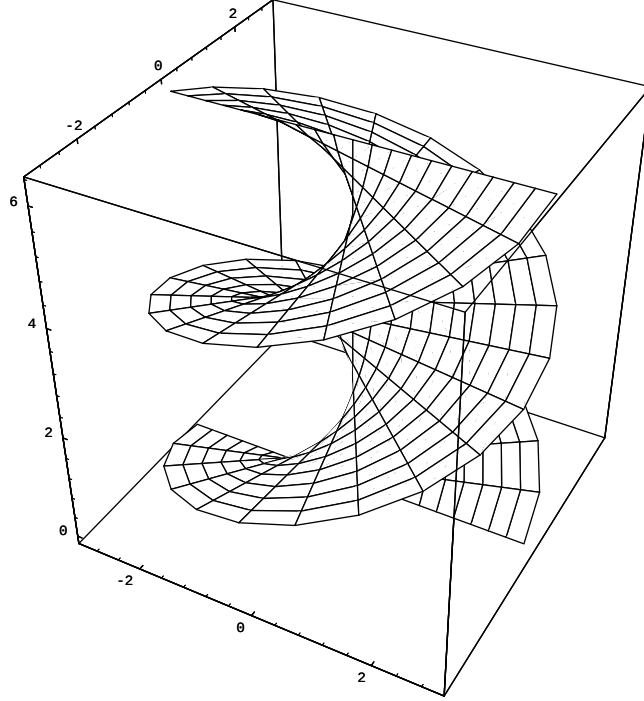
$$(10) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \overline{dN} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

hvor

$$(11) \quad \overline{dN} = \frac{1}{(1 + \phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\phi_{xx} - \phi_y^2 \phi_{xx} + \phi_x \phi_y \phi_{xy} & -\phi_{xy} - \phi_y^2 \phi_{xy} + \phi_x \phi_y \phi_{yy} \\ -\phi_{xy} - \phi_x^2 \phi_{xy} + \phi_x \phi_y \phi_{xx} & -\phi_{yy} - \phi_x^2 \phi_{yy} + \phi_x \phi_y \phi_{xy} \end{pmatrix}.$$

Et mindre mirakel er nu, at man ved udregning af $\det(dN) \stackrel{Def.}{=} \det(\overline{dN})$ præcist får:

$$(12) \quad K = \det dN.$$



FIGUR 1. En helicoide eller vindelflade. Her er Gauss-krumningen K overalt negativ.

Igen opfordres læseren til selv at eftervise dette.

Hvis vi tænker på, at N entydigt angiver tangentrummet, er det “klart”, at variationen af N fortæller noget om, hvor hurtigt eller langsomt tangentrummet ændrer sig og i hvilken retning, det sker. Således må $dN_{f(x,y)}$ indeholde information om, hvorledes S krummer i, og i den nærmeste omegn om, $f(x, y)$. Funktionen K kaldes i øvrigt **Gauss-krumningen**.

3.3. Flademål. Lad R være en lukket begrænset delmængde af $\mathcal{G}_\phi$ og lad $\tilde{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ opfylde, at

$$(13) \quad R = f(\tilde{R}).$$

Lad F være en funktion på $\mathcal{G}_\phi$. Der findes da en funktion $\tilde{F}$ så

$$(14) \quad F(f(x, y)) = \tilde{F}(x, y).$$

Antag, at $|\tilde{F}|$ er integrabel (altså bl. a. målelig). Vi definerer da

$$(15) \quad \int_R F \, ds = \int_{\tilde{R}} \tilde{F} \sqrt{1 + \phi_x^2 + \phi_y^2} dx dy.$$

Dette er det mest rimelige integral i den forstand, at det tilhørende arealbegreb på fladen “harmonerer” med de sædvanlige areal- og volumenbegreber.

3.4. Green’s Sætning. Lad $t \rightarrow \gamma(t)$ være en simpel lukket kurve, der stykvis er C^∞ , og lad os blot betragte den som defineret på det lukkede interval $I = [0, L]$. I følge Jordan’s kurvesætning deler γ planen i præcis 2 komponenter. Lad $\tilde{R}$ betegne den begrænsede komponent. Antag nu, at P og Q er kontinuerte funktioner på en åben delmængde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ og at $R \subset U$. Der gælder da

Sætning 1 (Green).

$$(16) \quad \int_{\tilde{R}} (P_x - Q_y) \, dx dy = \int_0^L (Q(\gamma(t))x'(t) + P(\gamma(t))y'(t)) \, dt.$$

3.5. Geodætisk krumning. Lige som i afsnit 3.2 kan man evt. i første omgang blot tage formlen (18) nedenfor for pålydende og så senere vende tilbage til den geometriske fortolkning.

Lad $s \rightarrow \beta(s)$ være en uendeligt ofte differentiabel kurve på fladen $\mathcal{G}_\phi$ og antag: $\forall s : \|\beta'(s)\| = 1$. Vi siger da, at β er parametriseret ved kurve- eller buelængde. Ved differentiation af ligningen $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$ fås let, at $\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle = 0$. Krumningen $k(s)$ af kurven i punktet $\beta(s)$ defineres nu, når kurven er parametriseret ved buelængde, som længden af den andenaffledede; $k(s) = \|\beta''(s)\|$.

Vi betragter nu projektionen $\beta''_{\perp}(s)$ af $\beta''(s)$ på tangentrummet. Dette er den del af krumningsvektoren, der kan “mærkes” på fladen. Det er let at se, at $\beta''_{\perp}(s)$ står vinkelret på både $N(s) = N(\beta(s))$ og $\beta'(s)$. Der må derfor gælde, at

$$(17) \quad \beta''_{\perp}(s) = k_g(s) \cdot (N(s) \times \beta'(s))$$

for et reelt tal $k_g(s)$. Tallet $k_g(s)$ kaldes **den geodætiske krumning** af β i punktet $\beta(s)$. Absolutværdien er den del af krumningen, der har med fladen at gøre. Videre defineres β til at være **en geodæt** netop hvis $\forall s : k_g(s) = 0$. Dette er starten på en mængde fascinerende “geometri på flader”, som vi i midlertid ikke vil komme yderligere ind på her.

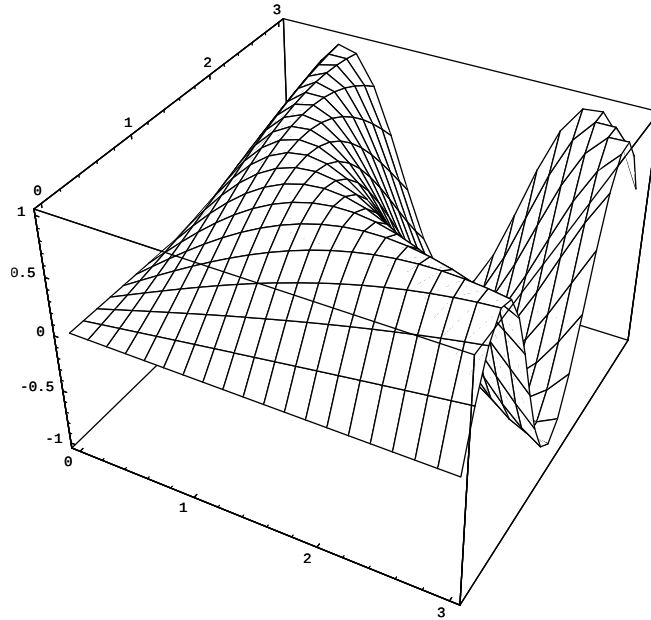
Det er let at se, at der gælder

$$(18) \quad k_g(s) = \langle N(s) \times \beta'(s), \beta''(s) \rangle,$$

og vi kunne nu forsøge at bestemme dette udtryk via f og γ . F. eks. gælder

$$(19) \quad \beta'(s) = x'(s) \cdot f_x + y'(s) \cdot f_y.$$

Læseren opfordres til at gøre dette, selvom det ikke er den vej, vi nu slår ind på.



FIGUR 2. En graf $(\sin(xy))$ med nogle af de indgående størrelser.

4.1. En mirakuløs udregning. Lad os antage, at β og f er som ovenfor og skriv

$$(20) \quad \beta(s) = f(\gamma(s)),$$

hvor nu $s \rightarrow \gamma(s) = (x'(s), y'(s))$ er en kurve i planen. Antag nu, at γ er en glat simpel lukket kurve. Lad os stille os følgende (umotiverede) opgave: Bestem

$$(21) \quad \boxed{\int_0^L k_g(s) \, ds.}$$

Vi indfører nu

$$(22) \quad e_0(s) = \frac{1}{\|f_x(\gamma(s))\|} f_x(\gamma(s)) \text{ og } e_0^\perp(s) = N(s) \times e_0(s).$$

Det er klart, at $\{e_0(s), e_0^\perp(s)\}$ udgør en ortonormalbasis for tangentrummet til fladen i $\beta(s)$. Vi kan derfor skrive

$$(23) \quad \beta'(s) = \cos \theta(s) \cdot e_0(s) + \sin \theta(s) \cdot e_0^\perp(s),$$

hvor $s \rightarrow \theta(s)$ er en differentiabel funktion, der kun er defineret op til et multiplum af 2π , men det gør ikke noget, da vi straks vil differentiere den. Ved indsættelse i (18) fås

$$(24) \quad k_g = \langle N \times (\cos \theta e_0 + \sin \theta e_0^\perp), \frac{d\theta}{ds}(-\sin \theta e_0 + \cos \theta e_0^\perp) + (\cos \theta e'_0 + \sin \theta (e_0^\perp)') \rangle.$$

Ved brug af identiteter som $\langle e'_0, N \times e_0 \rangle = -\langle e_0, N \times e'_0 \rangle$ (fås ved differentiation af ligningen $\langle e'_0, N \times e_0 \rangle = 0$) samt $\langle e_0, e'_0 \rangle = 0$ (fås ved differentiation af ligningen $\langle e_0, e_0 \rangle = 1$) opnås følgende smukke udtryk:

$$(25) \quad \boxed{k_g(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) + \langle e'_0, N \times e_0 \rangle,}$$

og efter endnu en del regnerier fås

$$(26) \quad k_g(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) + Q(s)x'(s) + P(s)y'(s),$$

hvor

$$(27) \quad Q(s) = \frac{\phi_{xx}\phi_y}{\sqrt{1+\phi_x^2} \cdot \sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}} \text{ og } P(s) = \frac{\phi_{xy}\phi_y}{\sqrt{1+\phi_x^2} \cdot \sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}}.$$

Nu afslører notationen delvis, at et mirakel er under opsejling. Her er det:

Med Q og P som ovenfor fås (efter endnu en større udregning)

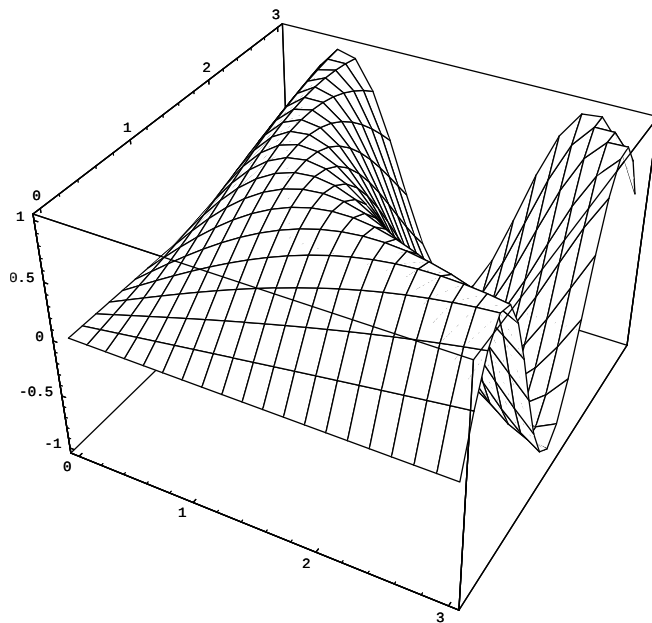
$$(28) \quad P_x - Q_y = -\frac{\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}\phi_{xy}}{(1+\phi_x^2+\phi_y^2)^{\frac{3}{2}}} = -K \cdot \sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}.$$

Der gælder m.a.o.

$$(29) \quad \boxed{\int_\beta k_g(s) ds + \int_R K ds = \int_\beta \frac{d\theta}{ds}(s) ds.}$$

Vi er nu tæt på målet, men vi må dog klare endnu en “hurdle”, nemlig leddet med $\frac{d\theta}{ds}(s)$:

4.2. Sætningen om de roterende tangenter. I den situation vi befinder os i, nemlig der, hvor kurven γ er simpel, er det en klassisk sætning, der giver integralet, nemlig den sætning, der på engelsk i nogle bøger hedder “The Theorem of Turning Tangents”:



FIGUR 3. Indre og ydre vinkler.

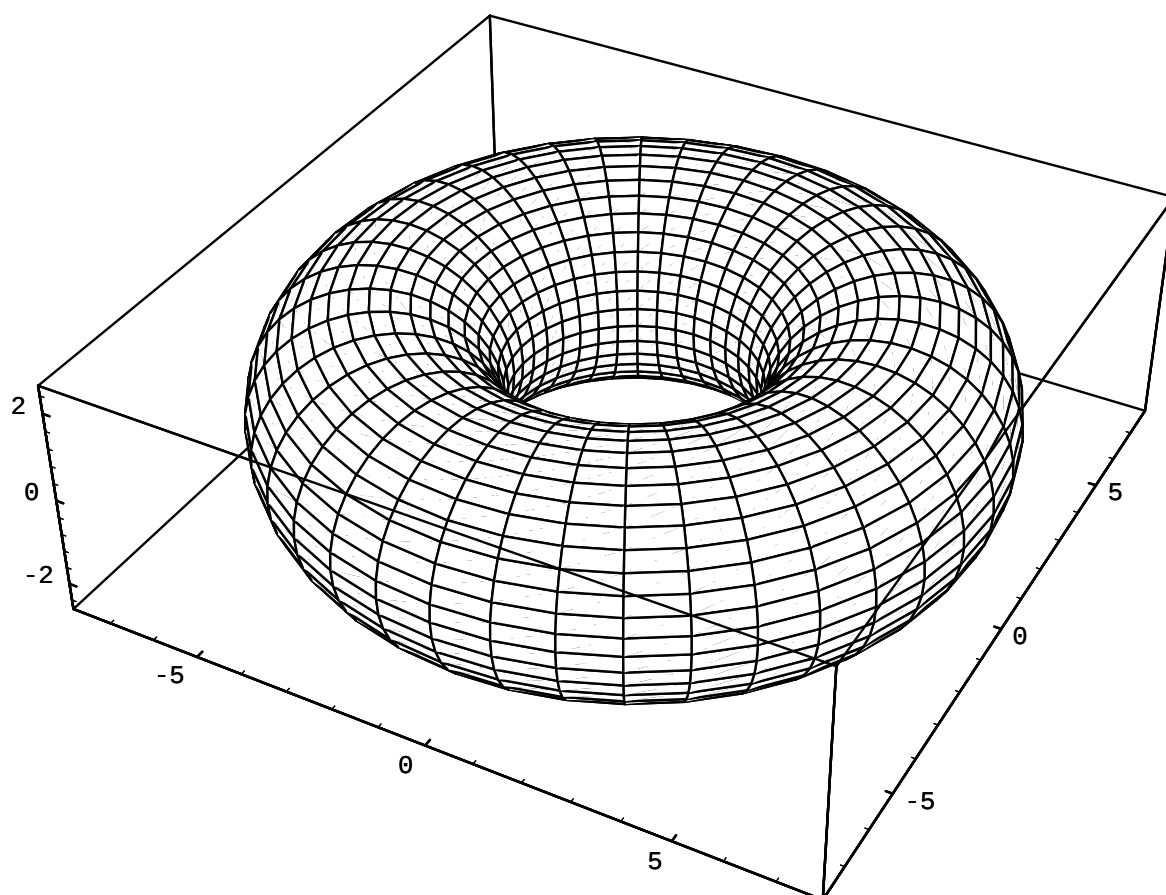
Sætning 2. *For en glat simpel lukket kurve β gælder:*

$$(30) \quad \int_{\beta} \frac{d\theta}{ds}(s) ds = \pm 2\pi.$$

Fortegnet + fremkommer når kurven gennemløbes på en sådan måde, at $N(s) \times \beta'(s)$ altid peger ind i den begrænsede komponent.

Efter det første chok over, at integralet ikke bliver 0, er det faktisk et meget plausibelt resultat. At sætningen er forkert på andre flader, f. eks. Torus, viser dog, at der må gøres brug af en speciel topologisk egenskab for at bevise sætningen. Helt konkret er denne egenskab, at det angivne område (den begrænsede komponent) skal være enkeltssammenhængende.

4.3. Ydre vinkler. Lad os endelig antage, at kurven β har tre “knæk”, eller at R har tre “hjørner”. Erstat R med symbolet T (for trekant), og antag at β er defineret på $[s_1, s_2] \cup [s_2, s_3] \cup [s_3, s_4]$, at β er C^∞ på de tre åbne intervaller, at $\beta(s_1) = \beta(s_4)$ og at vinklerne mellem $\beta'(s_i^-)$ og $\beta'(s_i^+)$, regnet med fortegn, er hhv. Θ_1, Θ_2 og Θ_3 ($i = 1$ og $i = 4$ identificeres). Disse vinkler kaldes **de ydre vinkler i trekanten**.



FIGUR 4. En Torus. Opgave: Prøv at finde integralet af K over denne flade ved at dele den op i trekanter.

5.1. Gauss-Bonnet. Lad β_1, β_2 og β_3 være de tre kurvestykker svarende til de tre intervaller. Vi får da

$$(31) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{\beta_i} k_g(s) ds + \int_T K ds = \sum_{i=1}^3 \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\theta}{ds}(s) ds,$$

og her er det ikke svært at overbevise sig om, at man i integralet på højre side netop kommer til at mangle de tre ydre vinkler i at få 2π . Dermed fås:

$$(32) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{\beta_i} k_g(s) ds + \int_T K ds = 2\pi - \left(\sum_{i=1}^3 \Theta_i\right),$$

eller, omsat til indre vinkler $\varphi_i = \pi - \Theta_i$ og med π flyttet til venstre:

$$(33) \quad \boxed{\sum_{i=1}^3 \int_{\beta_i} k_g(s) ds + \int_T K ds + \pi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i.}$$

Af speciel interesse er de “geodætiske trekanter”, i hvilke siderne er geodæter. Da får vi

Sætning 3 (Gauss-Bonnet). *I en geodætisk trekant gælder:*

$$(34) \quad \boxed{\int_T K ds + \pi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i.}$$

6.1. Afsluttende noter.

- K er “indre”, dvs. kan udregnes fra funktioner, der kun er definerede på fladen. Dette er Gauss’es Theorema Egregium.
- På kugleoverfladen er K identisk lig 1. Integralet af K over T bliver da arealet af trekanten.
- Bemærk, at k_g skifter fortegn, når trekanten gennemløbes i modsat retning. Dette gør det muligt at finde formler for mere komplicerede objekter ved at skrive dem som foreningsmængder af trekanter. F. eks. kan “store” trekanter opdeles i “små” trekanter, men man kan også lave formler for firkanter, femkanter, et cetera.
- Flader er lokalt grafer. Givet et punkt på en flade S i $\mathbb{R}^3$ findes en åben delmængde U af $\mathbb{R}^3$ således, at $S \cap U$ kan gives som grafen for en C^∞ funktion. (Men man skal evt. omdøbe (x, y, z) koordinaterne til (y, z, x) eller til (z, x, y) .)