

Bevægelsens Geometri

Vi vil betragte bevægelsen af et punkt. Dette punkt kan f.eks. være tyngdepunktet af en flue, et menneske, et molekyle, en galakse eller hvad man nu ellers har lyst til at beskrive. Det kan også en fodbold på vej mod mål eller en lysstråle på vej uden om en stjerne, men det kunne lige så godt være et mere abstrakt punkt, f.eks. et punkt der repræsenterer tilstanden af den danske økonomi indenfor en (matematisk) mængde af økonomier eller et punkt i mængden af alle “afstandsbegreber” (metrikker) på en vis given mængde.

Vi vil her præsentere visse aspekter af den matematiske beskrivelse af begrebet bevægelse. Vore betragtninger vil bl.a. lede til en definition af, hvad der skal svare til de rette linier i planen, når man befinder sig på en krum flade.

Dermed bliver også vist en vej til, hvorledes geometri kan formuleres i krumme rum, endda af højere dimension.

Helt naivt kan vi begynde med at definere bevægelse som det, at “noget” ikke ligger stille. Altså, at dette “noget” ændrer position som tiden går.

Bevægelse i en plan.

Lad os begynde med en meget simplificerende antagelse, nemlig at punktet er bundet til at bevæge sig i en (uendelig) plan. Den matematiske model for en uendelig plan er rummet $\mathbb{R}^2$ bestående af alle par (x, y) af reelle tal. Vi kan også sige, at et element $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ har formen $\bar{p} = (x, y)$. Når vi bruger denne sprogbrug kaldes tallet på første plads for “ x -koordinaten” og tallet på anden plads for “ y -koordinaten”. Til andre tider skrives $\bar{p} = (x_1, x_2)$ og man taler om hhv. første- og andenkoordinaten.

En bevægelse af et punkt kan da beskrives ved at angive, til enhver tidsparameter t , i hvilket punkt af $\mathbb{R}^2$ punktet befinder sig. Dette punkt betegner vi med $\bar{p}(t)$ og kan evt. skrive $\bar{p}(t) = (x(t), y(t))$. Lad os endvidere sige, at vi kun er interesserede i tidsparametre i et vist interval $I =]a, b[= \{t \in \mathbb{R} \mid a < t < b\}$. En bevægelse er da givet ved en funktion $\bar{p} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, eller, om man vil, ved to reelle funktioner $t \rightarrow x(t)$ og $t \rightarrow y(t)$. Fælles for alle sådanne afbildninger $\bar{p}$ bruges betegnelsen “kurve”.

Lad os nu antage, at de indgående funktioner $x(t)$ og $y(t)$ er tilpas pæne. Vi skal mindst kunne differentiere dem to gange, og de differentierede funktioner (afledte) skal også være kontinuerte. Den afledte $\bar{p}'(t)$ af punktionen $\bar{p}(t)$ er da givet ved

$$\bar{p}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{p}(t + \Delta t) - \bar{p}(t)}{\Delta t} \right) = \left(\frac{d\bar{p}}{dt} \right) = (x'(t), y'(t)). \quad (1)$$

Den geometriske betydning af $\bar{p}'(t)$ er, at den angiver den øjeblikkelige retning, som punktet bevæger sig i. Det er således naturligt at afsætte vektoren $\bar{p}'(t)$ ud fra punktet $\bar{p}(t)$. Dette definerer en linie kaldet tangentlinien til kurven i punktet $\bar{p}(t)$.

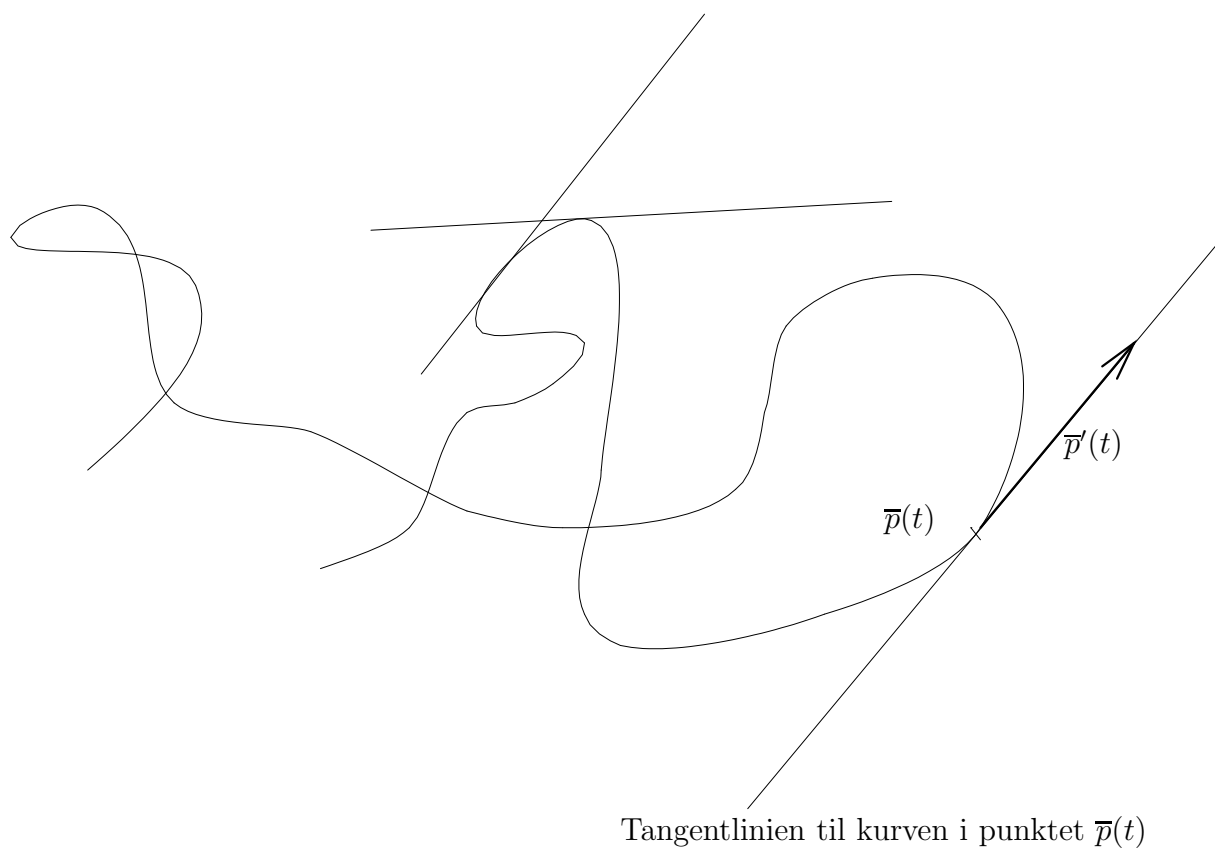
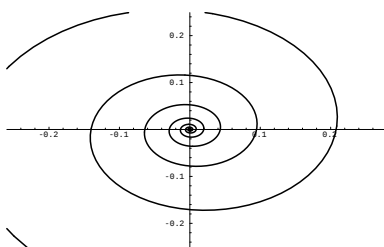
Endvidere angiver længden af $\bar{p}'(t)$, $\|\bar{p}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, den øjeblikkelige hastighed eller “fart” i bevægelsen.

Vi vil ikke udlede følgende formel for længden af den del af kurven der ligger mellem to tidsværdier t_0 og s ,

$$\ell(s) = \int_{t_0}^s \|\bar{p}'(t)\| dt, \quad (2)$$

hvor vi i øvrigt betragter t_0 som et fast valgt udgangspunkt og s som den frie variable, men vi nævner dog, at eftersom den øjeblikkelige fart ganget med en “meget lille” tid Δt giver en “meget lille” $\Delta \ell = \|\bar{p}'(t)\| \Delta t$, kan man let give et uformelt bevis for formlen. Dette kan endvidere forholdsvis let strammes op til et rigtigt bevis.

Eksempel: Kurven $\bar{l} : t \rightarrow \bar{l}(t) = (e^t \cdot \cos 8t, e^t \cdot \sin 8t)$ er et eksempel på en logaritmisk spiral. Der gælder, at $\bar{l}'(t) = (-8e^t \cdot \sin 8t + e^t \cdot \cos 8t, 8e^t \cdot \cos 8t + e^t \sin 8t)$. Specielt er $\|\bar{l}'(t)\| = 9 \cdot e^t$ og dermed

FIGUR 1. Kurve med tangentlinier i planen $\mathbb{R}^2$ 

FIGUR 2. Logaritmisk spiral

bliver formelen (2) givet ved

$$\ell(s) = \int_{t_0}^s 9e^t dt = 9(e^s - e^{t_0}).$$

Når vi tænker på en kurves geometri er det som selve punktmængden

$$\{\vec{p}(t) \mid t \in I\} \quad (3)$$

og ikke på den måde, punktet gennemløber denne mængde på. For eksempel vil kurven $t \rightarrow \bar{l}(t^3)$ gennemløbe samme punktmængde som kurven $\bar{l}$ i eksemplet med den logaritmiske spiral og ligeledes vil for eksempel $t \rightarrow \bar{l}((t-1)(t-2)(t-3))$ gennemløbe den logaritmiske spiral. I det sidste tilfælde vil den undervejs endda gennemløbe visse strækninger flere gange.

Når vi vælger en bestemt måde at gennemløbe punktmængden i (3) på, siger vi, at vi vælger en parametrisering af kurven.

Det er nu bekvemt at antage, at $\bar{p}'(t) \neq 0$ for alle $t \in I$. En kurve, der opfylder dette kaldes **regulær**.

Det nyttige ved sådanne kurver er, at funktionen $\ell(s)$ bliver strengt voksende, m.a.o at $s_1 < s_2 \Rightarrow \ell(s_1) < \ell(s_2)$. Det følger af dette, at funktionen ℓ har en omvendt funktion. Vi betegner denne med ℓ_{omv} . Der gælder altså

$$\ell_{\text{omv}}(t) = s \Leftrightarrow \ell(s) = t. \quad (4)$$

Indfører vi nu funktionen $\bar{p}_o$ defineret som en omparametrisering af $\bar{p}$ ved

$$\bar{p}_o(t) = \bar{p}(\ell_{\text{omv}}(t)), \quad (5)$$

definerer denne kurve samme punktmængde som $\bar{p}$. Det følger endvidere fra kædereolen for differentiation samt reglen for differentiation af omvendt funktion, at

$$\bar{p}'_o(t) = \frac{\bar{p}'(s)}{\|\bar{p}'(s)\|}, \quad (6)$$

hvor $s = \ell_{\text{omv}}(t)$.

Af dette følger, at $\|\bar{p}'_o(t)\| = 1$ for alle t . Generelt siges en kurve $t \rightarrow \bar{q}(t)$ at være *parametriseret ved buelængde* såfremt der for alle t gælder

$$\|\bar{q}'(t)\| = 1. \quad (7)$$

Enhver regulær kurve kan således omparametriseres til kurvelængde.

Eksempel: Hvis vi vælger $t_0 = 0$ i eksemplet med den logaritmiske spiral, så bliver $s = \ln(\frac{t}{9} + 1) = \ell_{\text{omv}}(t)$. Kurven $t \rightarrow ((\frac{t}{9} + 1) \cos(8 \ln(\frac{t}{9} + 1)), (\frac{t}{9} + 1) \sin(8 \ln(\frac{t}{9} + 1)))$ er således parametriseret ved kurvelængde.

Vi går nu i gang med at diskutere begrebet **krumning** af en plan kurve. Vi vil for dette formål kun betragte kurver $\bar{q}$, der er parametriserede ved kurvelængde. Vi kan også sige, at alle kurver gennemløbes med konstant hastighed 1. Som mål for krumning vil vi bruge ændringen i tangentlinierne: Hvis i to nærtliggende punkter $\bar{q}(t + \Delta t)$ og $\bar{q}(t)$ tangentlinierne er meget forskellige, vil vi sige, at der er stor krumning. Omvendt, hvis tangentlinierne ikke ændrer sig ret meget vil vi nok synes, at der ikke er ret megen krumning (se i øvrigt Figur 1). Med udgangspunkt i dette definerer vi nu simpelthen krumningen $k(t)$ i punktet $\bar{q}(t)$ som den fart, som hastighedsvektoren $\bar{q}'(t)$ (og dermed tangentlinierne) ændrer sig med, altså

$$k(t) = \left\| \left(\frac{d}{dt} \bar{q}' \right) (t) \right\| = \|\bar{q}''(t)\|. \quad (8)$$

Hvis $k(t) \neq 0$ definerer vi

$$\text{Krumningsvektoren } n_k(t) = \frac{\bar{q}''(t)}{\|\bar{q}''(t)\|}. \quad (9)$$

Det er meget let at se, at en ret linie i planen overalt har krumning 0. Faktisk kan en ret linie skrives som $t \rightarrow \bar{q}(t) = (a \cdot t + b, c \cdot t + d)$, hvor a, b, c, d er reelle konstanter (og a og c er ikke begge lig nul), og hvor man uden indskrænkning kan antage, at $a^2 + c^2 = 1$. Dermed er linien parametriseret ved buelængde og $\bar{q}''(t) = 0$. Omvendt gælder, at hvis en kurve overalt har krumning 0, da opfylder koordinatfunktionerne at $x'' = 0 = y''$, og dermed er $\bar{q}$ en ret linie.

Vi bemærker videre, at ved differentiation af identiteten $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \|\vec{q}'(t)\|^2 \equiv 1$ følger, at $2(x'(t)x''(t)) + 2(y'(t)y''(t)) = 0$, og dermed

$$\text{for alle } t : \vec{q}'(t) \cdot \vec{q}''(t) = 0, \quad (10)$$

altså at det indre produkt er 0 eller med andre ord, at krumningsvektoren $n_k(t)$ er vinkelret på $\vec{q}'(t)$.

Vi kan konkludere, at de rette linier præcist er karakteriserede ved, at de har krumning 0. Videre kan man vise, at de kurver, der har konstant krumning $k \neq 0$, præcist er cirklerne.

Vi minder om, at de rette linier i planen er basisobjekter vedrørende geometriske figurer såsom trekanter, parallelle linier osv., og kan også nævne en velkendt egenskab ved de rette linier, nemlig at de angiver de kurver, man skal bevæge sig langs for hurtigst muligt (husk på, at alle bevægelser lige nu sker med konstant hastighed 1) at komme fra et punkt i planen til et andet.

Det er disse egenskaber, vi vil søge at generalisere, og med vores karakteristik via krumning har vi et godt udgangspunkt. Vi skal dog først lige diskutere kurver i $\mathbb{R}^3$.

Bevægelse i rummet.

Lad os nu gå et stort skridt videre og betragte kurver i $\mathbb{R}^3$. Faktisk er det matematiske skridt slet ikke så stort, de eneste forskelle er, at kurver nu er givet ved 3 koordinatfunktioner $\vec{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ samt at længden af en vektor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \quad (11)$$

Ellers har vi præcist de samme formler som for kurver i $\mathbb{R}^2$.

Eksempel: Kurven $\vec{h} : t \rightarrow \vec{h}(t) = (\cos at, \sin at, bt)$ kaldes skruelinien eller helix'en. Det er den kurve man vil bevæge sig i, hvis man går op i rundetårn og holder en konstant afstand til væggen. Antag, at $a^2 + b^2 = 1$ (a og b er reelle konstanter). Da er skruelinien parametriseret ved buelængde. Krumningen bliver da a^2 og krumningsvektoren bliver $(-\cos at, -\sin at, 0)$.

Bevægelse på en flade.

Lad os nu indføre begrebet “en flade” S i $\mathbb{R}^3$. Vi vil ikke her give den præcise definition men nævne, at det løst sagt er, hvad der kan fremkomme ved at tage en del af $\mathbb{R}^2$ og give den “buler” og “fordybninger”, uden at der opstår skarpe kanter. Man kan f.eks. tænke på en dug, der er samlet sammen efter brug. Overfladen af glatte objekter vil også være flader, f.eks. kugleoverfladen $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$, overfladen af et bil- eller cykeldæk (uden ventilen!), opgangen i rundetårn (en såkaldt vindelflade) eller siden på en konservesdåse (eller rundetårn!). Jordoverfladen vil også approximativt være en flade. Man kan vise, at en flade lokalt kan skrives som grafen af en funktion af to variable. (F.eks. er den øvre del af kugleoverfladen grafen af funktionen $(x, y) \rightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ med (x, y) i enhedsskiven. Hvis begge sider kvadreres fås nemlig $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ og dermed $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.)

Lad os spørge os selv: Hvad skal på sådan en flade svare til de rette linier i planen, altså hvad er “ret linie” i et krumt rum? Ja, her kan vi tænke på resultatet fra planen: De rette linier er præcist de kurver, der har krumning 0.

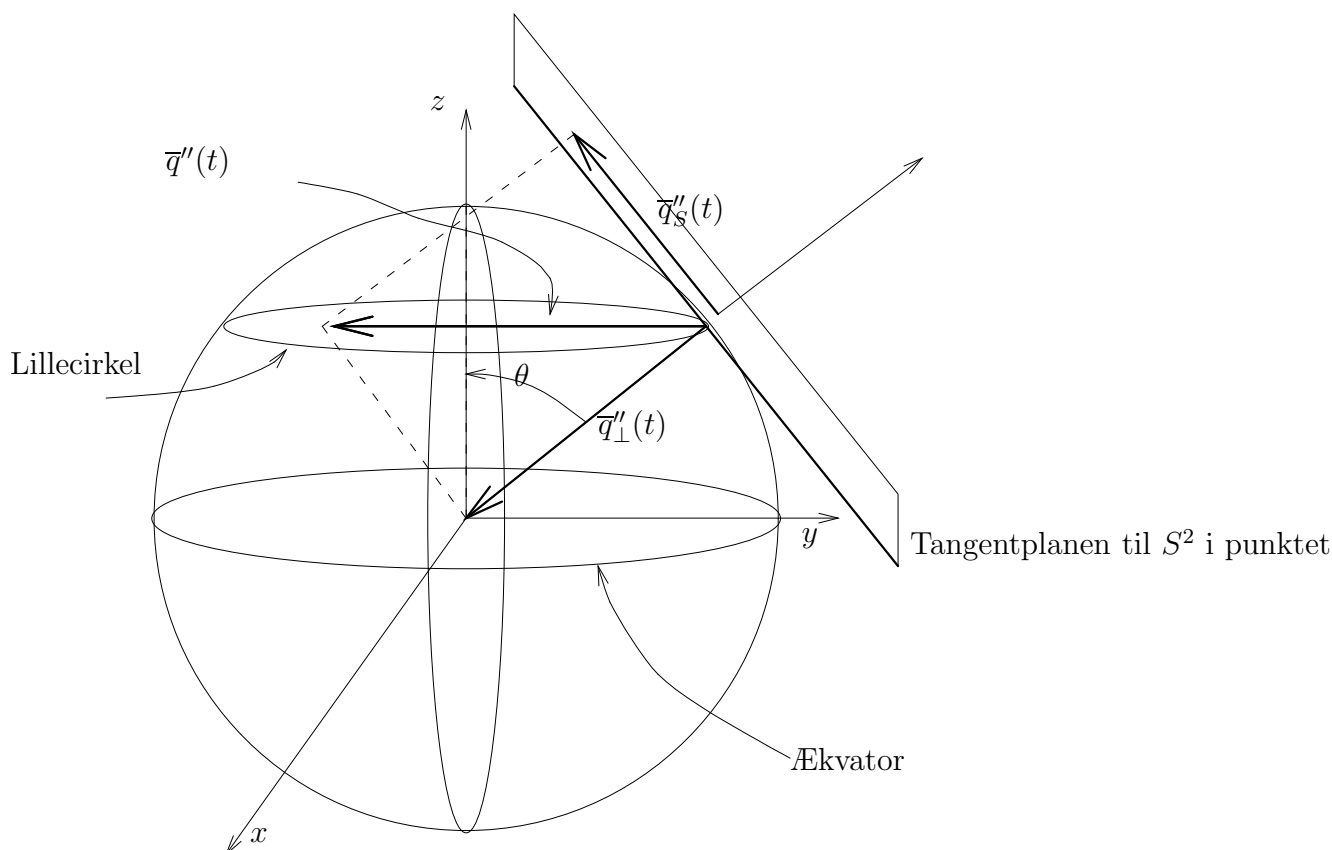
Når vi skal generalisere dette til en flade S , kan vi jo sige, at en kurve på en flade er en kurve i rummet $\mathbb{R}^3$, der blot “tilfældigvis” tager sine værdier indenfor fladen S . Som rumkurve har den en krumning og en krumningsretning. Her deler vi simpelthen denne krumning op i to komponenter $\vec{q}''_S$ og $\vec{q}''_\perp$, én komponent $\vec{q}''_S$, der har med fladen at gøre og én, $\vec{q}''_\perp$, der er vinkelret på fladen.

$$\vec{q}''(t) = \vec{q}''_S(t) + \vec{q}''_\perp(t). \quad (12)$$

Her kan man forestille sig et “væsen”— somme tider (for sjov) kaldet et “fladedyr”—, der lever på fladen. Dette dyr kan kun mærke $\vec{q}''_S(t)$, hvorimod $\vec{q}''_\perp(t)$ er den del, der ikke har med fladen at gøre og derfor ikke kan mærkes af noget fladedyr.

Vi definerer den **geodætiske krumning** $k_g(t)$ og **normalkrumningen** $k_\perp(t)$ ved

$$k_g(t) = \|\vec{q}''_S(t)\| \quad \text{og} \quad k_\perp(t) = \|\vec{q}''_\perp(t)\|. \quad (13)$$



FIGUR 3. For en “lillecirkel” på kugleoverfladen S^2 er de indgående størrelser som anført. Hvis vinklen mellem et punkt på lillecirklen og z -aksen kaldes θ , da er krumningen af lillecirklen givet ved $1/\sin \theta$, normalkrumningen er 1, og den geodætiske krumning er $\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$. Kun når vinklen er $\frac{\pi}{2}$ (altså på hvad der på tegningen er ækvator), forsvinder den geodætiske krumning. Mere generelt er storcirklerne på S^2 præcis de geodætiske kurver.

Ifølge Pythagoras gælder

$$k^2(t) = k_g^2(t) + k_\perp^2(t). \quad (14)$$

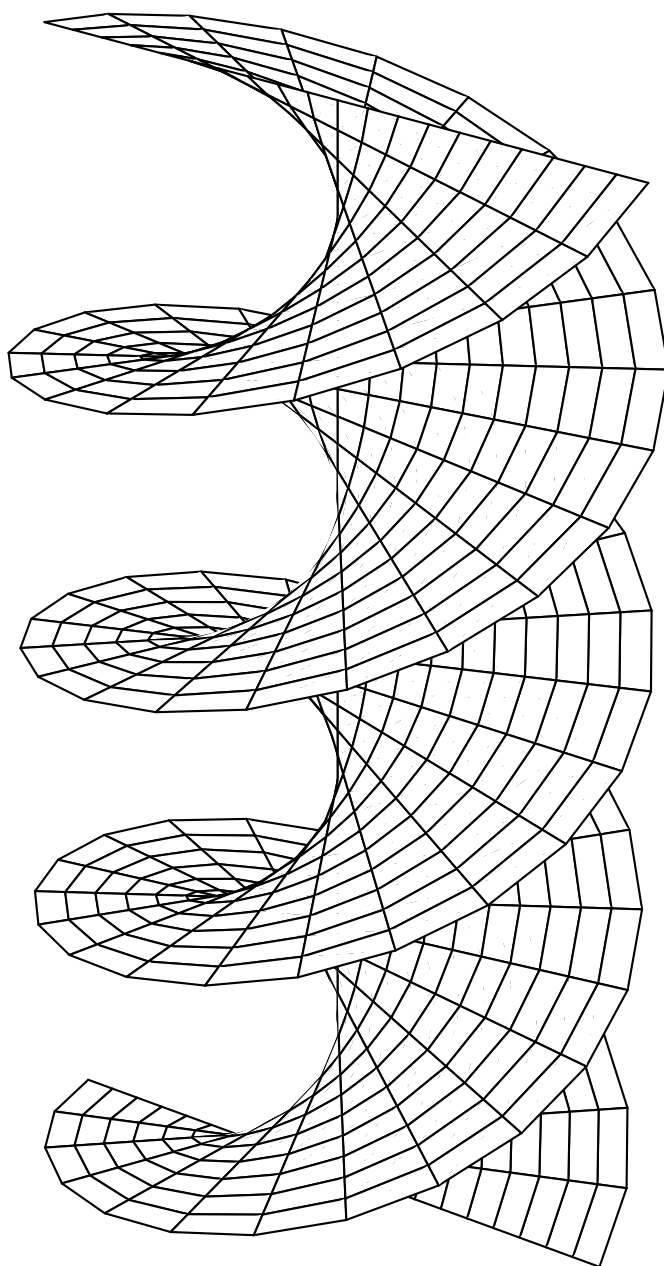
Vi kan nu definere begrebet en geodæt, eller hvad er det samme, en geodætisk kurve på en flade, som generalisationen af begrebet en ret linie i planen ved:

Definition: En **geodæt** på en flade S er en kurve $I \ni t \rightarrow \bar{p}(t) \in S$, der er parametriseret ved kurvelængde og opfylder, at den geodætiske krumning overalt er 0.

Vi minder nu om, at der mellem to punkter $\bar{p}_1$ og $\bar{p}_2$ i planen findes netop *en* ret linie, og denne angiver den korteste vej mellem de to punkter. Med vores definition af geodæter er det ikke klart, at disse har samme egenskab. Men det har de ikke desto mindre—næsten! Man kan nemlig vise, at den korteste vej mellem to punkter **må** være en geodæt. Der gælder bare ikke altid, at der kun kan trækkes en enkelt geodæt mellem to punkter, men hvis der er flere, kan man blot vælge den, der har mindst længde.

Sagt *meget* løst beviser man, at geodæterne har denne egenskab med hensyn til den korteste vej, på samme måde, som man beviser det for rette linier i planen. Dette kan så tages som yderligere en bekræftelse på, at vores definition af de rette linier i krumme rum (altså geodæterne) er den rigtige.

Med vores definition bliver geodæterne på S^2 alle storcirkler, og på ydersiden af rundetårn (opfattet som cylinderoverfladen $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$) bliver det skruelinierne (se ovenfor).



FIGUR 4. Et fladedyr skal for at bevæge sig den kortest mulige vej mellem to punkter A og B på en flade (f.eks. en vindelflade) følge en geodæt.

Bemærk, at i den sidste model gælder, at hvis vi har to punkter på $\mathcal{C}$ i forskellig højde z , da findes der uendeligt mange forskellige geodæter, der forbinder dem. Altså en komplet anden situation end i planen. Geodæterne i det indre af rundetårn (vindelfladen) er sværere at beskrive (det er ikke skruelinier). Dog kan man vise, at hvis ϕ angiver vinklen mellem kurven og det vandrette, og hvis d angiver afstanden ind til centrum af rundetårn, da vil der gælde for en given geodæt, at $\sqrt{1+d^2} \sin \phi$ er konstant.

Endelig kan nævnes, at man kan angive ligningerne som en geodæt skal opfylde. I “lokale koordinater” (u, v) skal en geodæt $(u(t), v(t))$ opfylde

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

hvor symbolerne Γ_{jk}^i er kendte funktioner på fladen, de såkaldte Christoffelsymboler.

Udover de geometriske overvejelser leder vore betragtninger over tid og bevægelse således bl.a. til hen til teorien for (ikke-lineære) differentiaalligninger. Vi vil dog slutte her, men kan bemærke, at f.eks. emnet “differentiaalligninger” har været behandlet i andre udgaver af “Naturligvis”.

Opgave 1.1. *Tegn/plot*

$$\alpha_1(t) = (5t + 3, -2t + 4) ; t \in [-2, 2].$$

Bestem $\alpha'(t)$ og $\alpha''(t)$. Samme spørgsmål for

$$\alpha_2(t) = (5 \cos(7t), 5 \sin(7t)) ; t \in [0, 1],$$

$$\alpha_3(t) = (e^t \cos(8t), e^t \sin(8t)) ; t \in [0, 1],$$

$$\alpha_4(t) = \left(\left(\frac{t}{9} + 1 \right) \cos \left(8 \ln \left(\frac{t}{9} + 1 \right) \right), \left(\frac{t}{9} + 1 \right) \sin \left(8 \ln \left(\frac{t}{9} + 1 \right) \right) \right) ; t \in [1, 2], \text{ og}$$

$$\alpha_1(t) = (\cos(at), \sin(at), b) ; t \in [0, 5].$$

I sidstnævnte eksempel et a, b positive konstanter. Hvad er betingelsen på disse for, at kurven er parametriseret ved kurvelængde?

Krumningen $k(s)$ af en kurve $I \ni s \mapsto \beta(s)$ er defineret under antagelsen $\forall s \in I : \|\beta'(s)\| = 1$, og er så givet ved $k(s) = \|\beta''(s)\|$.

Såfremt $I \ni t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ er en kurve, der ikke nødvendigvis er parametriseret ved kurvelængde, men som dog opfylder $\forall t \in I : \|\alpha'(t)\| \neq 0$ kan krumningen udregnes til

$$k(t) = \frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Opgave 1.2. *Bestem krumningen af alle kurverne i Opgave 1.1.*