11　ホモトピー不変性（続き）

定義 7.15 から、チェインホモトピーの定義を思い出そう。

命題 **11.1.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi, \psi\colon U \to V$ とその誘導されたチェイン写像 $\phi^*, \psi^*\colon \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ について、ϕ から ψ への滑らかなホモトピーは、ϕ^* から ψ^* へのチェインホモトピーを誘導する。

証明. ポアンカレの補題（定理 6.4）の証明で定義された線形写像

$$\hat{s}^p\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U \times \mathbb{R}) \qquad (p \text{ は整数})$$

を思い出そう。ここで、どんな開集合 $W \subset \mathbb{R}^k$ に対しても、$p < 0$ のとき、$\Omega^p(W) = 0$ と定義される。それに、(6.6) より、次の公式が成り立つ。

$$d\hat{s}^p + \hat{s}^{p+1}d = \iota_1^* - \iota_0^* \qquad (p \text{ は整数})$$

ただし、$\iota_v\colon U \to U \times \mathbb{R}$（$v = 0, 1$）は、$\iota_v(x) = (x, v)$ で定義された滑らかな写像である。今、ϕ から ψ への滑らかなホモトピー $\Phi\colon U \times \mathbb{R} \to V$ が与えられた、

$$s^p = \hat{s}^p \circ \Phi^*\colon \Omega^p(V) \to \Omega^{p-1}(U) \qquad (p \text{ は整数})$$

と定義する。このとき、任意の整数 p に対して、

$$\begin{aligned} ds^p + s^{p+1}d &= d\hat{s}^p\Phi^* + \hat{s}^{p+1}\Phi^*d = d\hat{s}^p\Phi^* + \hat{s}^{p+1}d\Phi^* = (d\hat{s}^p + \hat{s}^{p+1}d)\Phi^* \\ &= (\iota_1^* - \iota_0^*)\Phi^* = (\Phi\iota_1)^* - (\Phi\iota_0)^* = \psi^* - \phi^* \end{aligned}$$

であることが分かる。すなわち、写像 s^p は、ϕ^* から ψ^* へのチェインホモトピーとなることが分かる。 □

定義 **11.2.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$ について、連続写像 $f\colon U \to V$ で誘導された写像

$$f^*\colon H^p(V) \to H^p(U)$$

は、ある f とホモトピックである滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ で誘導された写像 ϕ^* と定義される。

注 11.3. (1) 連続写像 $f\colon U \to V$ が与えられたとき、命題 10.8(i) より、f とホモトピックである滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ が存在する。それに、命題 10.8(ii) と補題 10.2 より、$\phi_0, \phi_1\colon U \to V$

は f とホモトピック滑らかな写像なら、ϕ_0 から ϕ_1 への滑らかなホモトピー $\Phi\colon U\times\mathbb{R}\to V$ が存在する。よって、命題 11.1 と補題 7.16 より、$\phi_0^* = \phi_1^*\colon H^p(V)\to H^p(U)$ であるので、定義 11.2 で定義された写像 $f^*\colon H^p(V)\to H^p(U)$ は、うまく定義された写像であることが分かる。

(2) 任意の滑らか写像 $\phi\colon U\to V$ は、チェイン写像 $\phi^*\colon \Omega^*(V)\to\Omega^*(U)$ を誘導する。しかし、連続写像 $f\colon U\to V$ には、そのようなチェイン写像が定義されない。

<u>定理</u> **11.4.** 開集合 $U\subset\mathbb{R}^k$ と $V\subset\mathbb{R}^m$、$W\subset\mathbb{R}^n$ をおいておく。連続写像で誘導された写像に関して、次の性質が成り立つ。

(i) 任意のホモトピックである連続写像 $f_0, f_1\colon U\to V$ に対して、

$$f_0^* = f_1^*\colon H^p(V)\to H^p(U)$$

である。

(ii) 任意の連続写像 $f\colon U\to V$ と $g\colon V\to W$ に対して、

$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^*\colon H^p(W)\to H^p(U)$$

である。

<u>証明</u>. (i) 補題 10.2 より、滑らかな写像 $\phi\colon U\to V$ に対して、$\phi\simeq f_0$ であることと $\phi\simeq f_1$ であることは同値なので、定義 11.2 より、$f_0^*=\phi^*=f_1^*$ であることが分かる。

(ii) 補題 10.3 より、滑らかな写像 $\phi\colon U\to V$ と $\psi\colon U\to V$ に対して、$\phi\simeq f$ と $\psi\simeq g$ なら、$\psi\circ\phi\simeq g\circ f$ なので、

$$(g\circ f)^* = (\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^* = f^*\circ g^*$$

であることが分かる。 □

<u>注</u> 11.5. 定理 11.4 と定理 5.11 は、ド・ラームコホモロジーが、次のような反変関手であることを示す。

$$\left\{\begin{matrix}\text{ユークリッド空間の開集合}\\ \text{連続写像のホモトピー類}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{H^*(-)} \left\{\begin{matrix}\text{体 }\mathbb{R}\text{ 上次数つき可換代数}\\ \text{その準同型}\end{matrix}\right\}$$

ただし、連続写像 $f\colon U \to V$ を含むホモトピー類 $[f]$ は、誘導された写像

$$[f]^* = f^*\colon H^p(V) \to H^p(U)$$

に移される。

<u>系</u> **11.6.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$、連続写像 $f\colon U \to V$ に対して、f はホモトピー同値なら、誘導された写像 $f^*\colon H^p(V) \to H^p(U)$ は、同型である。特に、f は同相なら、f^* は同型である。

<u>証明</u>. 反変関手である性質より、次の方程式が成り立つ。

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{id}_U^* = \mathrm{id}_{H^p(U)}$$
$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{H^p(V)}$$

ただし、g は f のホモトピー逆写像である。 $\square$

<u>系</u> **11.7.** 任意の可縮な開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、

$$H^p(U) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_U & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

である。

<u>証明</u>. 集合 U から空間 1 点への写像は連続で、ホモトピー同値である。よって、系 11.6 より、誘導された写像は同型であることが分かる。さらに、空間 1 点のド・ラームコホモロジーは、定義からすぐ成り立つ。 $\square$

次に、$A \neq \mathbb{R}^n$ を満たす閉集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ をおいておく。このとき、次のように定義された開集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ は、開集合 $U = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})$ の開被覆となる。

$$U_1 = \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \cup (\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-1, \infty) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$
$$U_2 = \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-\infty, 1) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

その開被覆が誘導されるマヤー・ビートリス系列を考えてみる。

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

これに、標準全射

$$\mathrm{pr}_1\colon U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-1,1) \to \mathbb{R}^n \smallsetminus A$$

で誘導された準同型と境界準同型の合成写像は、サスペンション準同型とよばれ、

$$\sigma^* = \delta^* \circ \mathrm{pr}_1^*\colon H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \to H^{p+1}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\}))$$

と書かれる。

命題 **11.8.** 真閉部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、次の性質 (i)–(iii) が成り立つ。

(i) $H^0((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})) = \mathbb{R} \cdot 1_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})}$

(ii) 次の完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}^n \smallsetminus A} \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \xrightarrow{\sigma^*} H^1((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})) \longrightarrow 0$$

(iii) 任意の $p \geqslant 1$ に対して、サスペンション準同型

$$\sigma^*\colon H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \to H^{p+1}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\}))$$

は、同型である。

証明. まず、$A \subset \mathbb{R}^n$ は真部分集合なので、開集合 $U = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ は連結集合であることがわかる。よって、命題の (i) が成り立つ。

つづいて、$i\colon \mathbb{R}^n \smallsetminus A \to (\mathbb{R}^n \times A) \times (-1,1)$ を $i(y) = (y, 0)$ と定義すると、例 10.6 より、

$$i \circ \mathrm{pr}_1 \simeq \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-1,1)}$$
$$\mathrm{pr}_1 \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \smallsetminus A}$$

であることが分かる。よって、系 11.6 より、任意の p に対して、

$$\mathrm{pr}_1^*\colon H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \to H^p((\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-1,1)) = H^p(U_1 \cap U_2)$$

は同型であることが成り立つ。

次に、開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ であることを示す。このために、次のように定義された写像を考えてみる。

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \qquad \phi(x,t) = (x, t+1)$$

ここで、$x \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ である。写像 ϕ は連続なので、誘導された写像 $\phi|_{U_1}\colon U_1 \to U_1$ も連続であることが分かる。さらに、例 10.6 より、$\phi|_{U_1}$ と id_{U_1} はホモトピックであることが分かる。また、例 10.6 より、$\phi|_{U_1}$ と定置写像 $c\colon U_1 \to U_1$、$c(y) = (0,1)$、もホモトピックであることが分かる。よって、U_1 は可縮であることを示した。同様に、U_2 は可縮であることが成り立つ。系 11.7 より、

$$H^p(U_v) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{U_v} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

であることが分かる。よって、マヤー・ビートリス系列より、$p \geqslant 1$ のとき、境界準同型

$$\delta^*\colon H^p(U_1 \cap U_2) \to H^{p+1}(U)$$

は同型であることが分かる。これで、命題の (iii) が成り立つ。それで、$p = 0$ のとき、マヤー・ビートリス系列は、次のような完全系列となることが分かる。

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \cdot 1_U \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} \mathbb{R} \cdot 1_{U_1} \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{U_2} \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta^*} H^1(U) \longrightarrow 0$$

これで、準同型 $j_1^* - j_2^*$ の像は、$\mathbb{R} \cdot 1_{U_1 \cap U_2}$ となることが分かる。最後に、次の可換になる図式を考えてみる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \cdot 1_{U_1 \cap U_2} \arrow[r] & H^0(U_1 \cap U_2) \arrow[r, "\delta^*"] & H^1(U) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}^n \smallsetminus A} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1^*"'] & H^0(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \arrow[r, "\sigma^*"] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1^*"'] & H^1(U) \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

写像 pr_1^* は同型で、上の系列は完全なので、下の系列も完全であることが分かる。これで、命題の (ii) も成り立つ。 □

定理 **11.9.** 任意の $n \geqslant 2$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) = \begin{cases} 1 & (p = 0 \text{ 及び } p = n-1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

証明. 帰納法を使う。先ず、$n = 2$ のとき、例 9.5 より、定理が成り立つので、$n-1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。それに、命題 11.8 より、任意の $p \geqslant 2$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) = H^p((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\{0\} \times \{0\})) = \dim_{\mathbb{R}} H^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\})$$

であることが分かる。さらに、命題 11.8 の (i) と (ii) より、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 1$$
$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$$

であることも成り立つ。これで、定理が成り立つ。 □

微分同相 $f\colon R^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき、連鎖律の公式より、任意の $x \in \mathbb{R}^m$ に対して、ヤコビ行列 $D_x f$ は可逆行列なので、必ず $m = n$ であることがすぐ分かる。一方、次の結果を証明するために、ここまで紹介された理論の全体を必要とする。

定理 11.10 (ブラウワー). 同型 $f\colon R^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき、必ず $m = n$ である。

証明. 同型 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、次のように定義された写像も同型となる。

$$g\colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad g(x) = f(x) - f(0)$$

よって、命題 11.6 より、任意の $p \geqslant 0$ に対して、誘導された写像

$$g^*\colon H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$$

は同型となることが分かる。このとき、定理 11.9 より、$m = n$ であることが分かる。 □