球とそのベクトル場

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

ヘッセルホルト　ラース

NHK 文化センター

2009.03.28

ユークリッド空間

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$：ベクトル

$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$：ベクトル和

$tx = (tx_1, \ldots, tx_n)$：スカラー積

ベクトル和　～　平行移動

スカラー積　～　拡大

ユークリッド空間の幾何

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$：内積

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$：ノルム　〜　長さ

補題　$-\|x\|\|y\| \leqslant \langle x, y \rangle \leqslant \|x\|\|y\|$

証明　$\langle tx + y, tx + y \rangle \geqslant 0$　よって、

$$\|x\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2 \geqslant 0$$

事実「$at^2 + bt + c \geqslant 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \leqslant 0$」より、

$(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$　よって、

$$\langle x, y \rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$$

これで、補題が成り立つ。

直交しているベクトル

$0 = (0, \ldots, 0)$：ゼロベクトル

$x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

定義 ゼロでないベクトルx, yのなす角θは、次の等式で定義される。

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

定義次の等式を満たすベクトルx, yは、直交しているベクトルと呼ばれる。

$$\langle x, y\rangle = 0$$

特に、ゼロでないベクトルx, yに対して、

$$\langle x, y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

直交している $\Leftrightarrow$ 直角

球S^{n-1}とその接ベクトル場

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$：単位球

$T_x S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0\}$：接空間

定義 球S^{n-1}上の接ベクトル場とは、以下の性質(1)–(2)を満たす写像

$$\mathfrak{X}\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

のことである。

(1) $(\forall x \in S^{n-1}) : \langle x, \mathfrak{X}(x) \rangle = 0$

(2) $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in S^{n-1}) :$

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|\mathfrak{X}(x) - \mathfrak{X}(x')\| < \epsilon$$

例 $n = 2m$が偶数のとき、次の式は、球S^{n-1}上の接ベクトル場を定義する。

$$\mathfrak{X}(x) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

単位接ベクトル場

以上の例で定義された接ベクトル場について、各点$x \in S^{n-1}$に対して、

$$\|\mathfrak{X}(x)\| = 1.$$

つまり、$\mathfrak{X}$は単位接ベクトル場である。

補題 次の性質(1)–(2)は同値である。

(1) 球S^{n-1}上にどこでもゼロでない接ベクトル場が存在する。

(2) 球S^{n-1}上に単位接ベクトル場が存在する。

証明 どこでもゼロでない接ベクトル場$\mathfrak{X}$において、次のように定義された接ベクトル場$\hat{\mathfrak{X}}$は、単位接ベクトル場である。

$$\hat{\mathfrak{X}}(x) = \frac{\mathfrak{X}(x)}{\|\mathfrak{X}(x)\|}$$

定理 (Poincaré–Brouwer) もしnが奇数なら、どんな球S^{n-1}上の接ベクトル場$\mathfrak{X}$に対しても、必ず$\mathfrak{X}(x)=0$となる点xが存在する。

証明 補題により、S^{n-1}上の単位接ベクトル場が存在しないことを証明すればよい。新しい空間を定義しておく。

$$V_2(\mathbb{R}^n)=\{(x,y)\mid x,y\in S^{n-1},\langle x,y\rangle=0\}$$

もしS^{n-1}上に単位接ベクトル場が存在すれば、次の写像gが定義できる。

$$S^{n-1}\xrightarrow{\quad g\quad}V_2(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\quad f\quad}S^{n-1}$$

$$g(x)=(x,\mathfrak{X}(x))\qquad f(x,y)=x$$

写像fとgは連続で、各点xに対して、

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x$$

となる。

$$\text{トポロジー} \quad \overset{\text{関手}}{\rightsquigarrow} \quad \text{代数}$$

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "\mathrm{id}"'] & & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "g_*"] \arrow[dd, bend right, "\mathrm{id}"'] \\
V_2(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "f"] \arrow[rr, squiggly, "H_{n-1}(-)"] & & H_{n-1}(V_2(\mathbb{R}^n)) \arrow[d, "f_*"] \\
S^{n-1} & & H_{n-1}(S^{n-1})
\end{tikzcd}$$

id：恒等写像：$\mathrm{id}(x) = x$.

右辺を計算する：nが奇数のとき、

$$H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{R}$$

$$H_{n-1}(V_2(\mathbb{R}^n)) = 0.$$

矛盾なので、単位接ベクトル場が存在しない。

定義 $\rho(n)=$球S^{n-1}上で、互いに直交している単位接ベクトル場の最大個数.

例 円S^1上、単位接ベクトル場

$$\mathfrak{X}(x)=(-x_2,x_1)$$

が存在しているので、$\rho(2)\geqslant 1$.

定理 (Poincaré 1885) $\rho(3)=0$.

定理 (Brouwer 1911) nが奇数$\Rightarrow \rho(n)=0$.

例 (Hamilton 1843) 次は、球S^3上で、互いに直交している単位接ベクトル場である。

$$\mathfrak{X}_1(x)=(-x_2,x_1,-x_4,x_3)$$

$$\mathfrak{X}_2(x)=(x_3,-x_4,-x_1,x_2)$$

$$\mathfrak{X}_3(x)=(x_4,x_3,-x_2,-x_1)$$

よって、$\rho(4)\geqslant 3$.

<u>定理</u> (Hurwitz-Radon 1923)

$n = 2^{4a+b}c \quad (a \geqslant 0,\, 0 \leqslant b \leqslant 3,\, c$奇数$) \;\Rightarrow$

$$\rho(n) \geqslant 8a + 2^b - 1.$$

<u>証明</u> Hamilton による方法の一般化。例として、次は球 S^7 上互いに直交している単位接ベクトル場である。

$$\mathfrak{X}_1(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, x_6, -x_5, x_8, -x_7)$$

$$\mathfrak{X}_2(x) = (-x_6, x_5, -x_8, x_7, -x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

$$\mathfrak{X}_3(x) = (-x_5, -x_6, x_7, x_8, x_1, x_2, -x_3, -x_4)$$

$$\mathfrak{X}_4(x) = (-x_7, -x_8, -x_5, -x_6, x_3, x_4, x_1, x_2)$$

$$\mathfrak{X}_5(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2, -x_7, x_8, x_5, -x_6)$$

$$\mathfrak{X}_6(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1, -x_8, -x_7, x_6, x_5)$$

$$\mathfrak{X}_7(x) = (-x_8, x_7, x_6, -x_5, x_4, -x_3, -x_2, x_1)$$

よって、$\rho(8) \geqslant 7$.

<u>定理</u> (Adams 1962)

$$n = 2^{4a+b}c \qquad (a \geqslant 0,\ 0 \leqslant b \leqslant 3,\ c\text{奇数}) \ \Rightarrow$$

$$\rho(n) \leqslant 8a + 2^b - 1.$$

<u>証明</u> Poincaré-Brouwer による方法の一般化。

新しい関手

$$\{\text{空間}\} \xrightarrow{K-\text{理論}} \{\lambda - \text{環}\}$$

を作り、それを計算する。