

# 工場でトポロジー

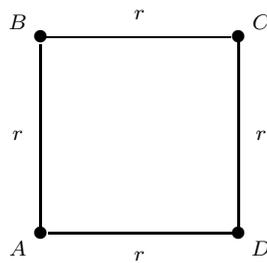
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

ヘッセルホルト・ラース

NHK文化センター

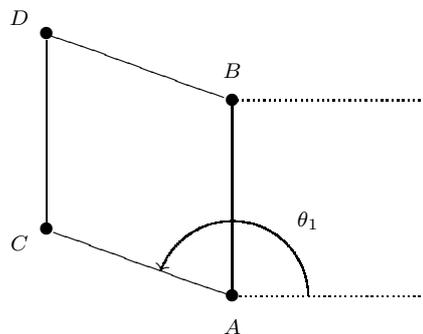
2009.07.27

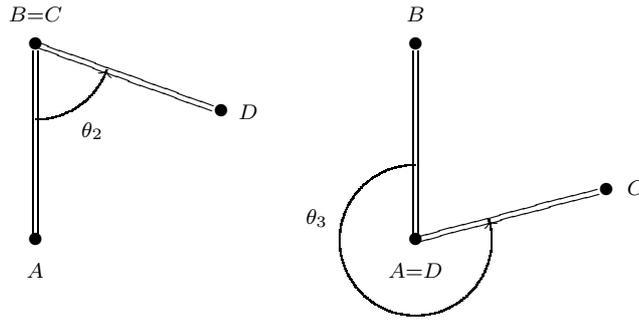
ロボットアームの位置のなす空間を考えてみる。正確に言えば、平面リンク機構  $L$  の任意の位置のなす空間  $C(L)$  を考えてみる。この配位空間と呼ばれる空間  $C(L)$  を定義する前に、例として次の平面リンク機構  $L$  を考えてみる。



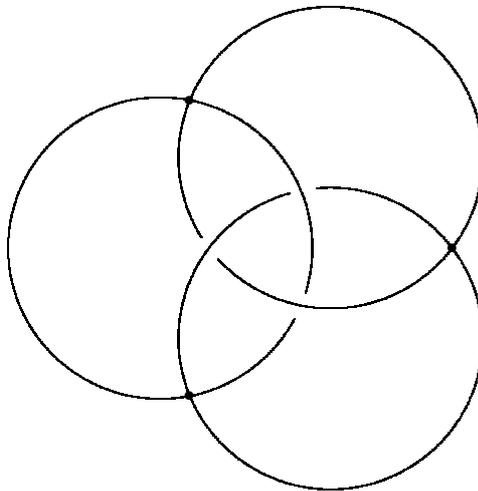
正方形リンク機構

ここで、全ての辺は同じ長さ  $r$  で、頂点  $A$  と  $B$  は不動頂点とする。次の図式を見ると、すぐ平面リンク機構  $L$  の任意の位置が分かることができる。





よって、配位空間  $C(L)$  は、角  $\theta_1$  と  $\theta_2$ 、 $\theta_3$  で媒介変数化された 3 つの円となり、その 3 つの円が互いにそれぞれの 1 点で交わる。正確に、角  $\theta_1$  と  $\theta_2$  で媒介変数化された円は、点  $\theta_1 = \pi/2$ 、 $\theta_2 = \pi$  で交わり、角  $\theta_1$  と  $\theta_3$  で媒介変数化された円は、点  $\theta_1 = 3\pi/2$ 、 $\theta_3 = \pi$  で交わり、角  $\theta_2$  と  $\theta_3$  で媒介変数化された円は、点  $\theta_2 = \theta_3 = 0$  で交わる。



正方形リング機構の配位空間

つづいて、正確にリングとその位置のなす空間を定義する。

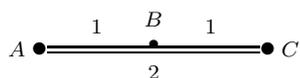
定義. 抽象リング  $L$  とは、次の (i)–(iii) を合わせたものである。

- (i) 頂点のなす集合  $V$  と辺のなす集合  $E$ 、任意の辺  $e \in E$  に対して、その辺の両端点を与える非順序対  $v(e) \subset V$
- (ii) 不動頂点のなす部分集合  $V_0 \subset V$
- (iii) 長さと呼ばれる関数  $l: E \rightarrow (0, \infty)$

例として、次のように与えられた抽象リング  $L$  を考えてみる。

$$\begin{aligned} V &= \{A, B, C\}, & V_0 &= \{A\}, & E &= \{e, f, g\} \\ v(e) &= \{A, B\}, & v(f) &= \{B, C\}, & v(g) &= \{A, C\} \\ \ell(e) &= \ell(f) = 1, & \ell(g) &= 2 \end{aligned}$$

この抽象リングは、次のように表すことができる。



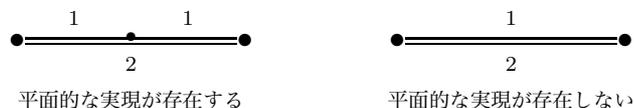
平面  $\mathbb{R}^2$  の距離を復習する。二点  $p_1 = (x_1, y_1)$  と  $p_2 = (x_2, y_2)$  について、その点の距離は、

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で与えられた。

**定義.** 抽象リング  $L$  について、平面的な実現とは、次の性質を満たす写像  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  である。「任意の辺  $e \in E$  とその両端点  $v_1, v_2 \in V$  に対して、 $d(\phi(v_1), \phi(v_2)) = \ell(e)$ 」

抽象リング  $L$  には、必ずしも平面的な実現が存在するとは限らない。



これから、平面的な実現が存在する抽象リングしか考えない。

**定義.** 抽象リング  $L$  とその平面的な実現  $\phi_0: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  について、配位空間とは、次の性質を満たす平面的な実現  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  のなす空間  $C(L)$  である。「任意の不動頂点  $v \in V_0$  に対して、 $\phi(v) = \phi_0(v)$ 」

この定義を説明するために、集合  $V$  と  $V_0 \subset V$ 、 $E$  を次のように表す。

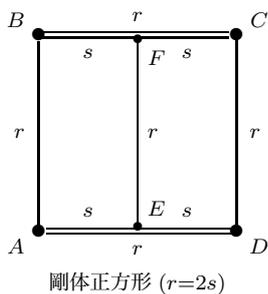
$$\begin{aligned} V &= \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\} \\ V_0 &= \{v_1, \dots, v_r\} \\ E &= \{e_1, \dots, e_N\} \end{aligned}$$

さらに、辺  $e_1, \dots, e_N$  の両端点を、それぞれ  $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \dots, \{v_{i_N}, v_{j_N}\}$  と表しておく。これに、ある写像  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  とその値  $\phi(v_1) = (x_1, y_1), \dots, \phi(v_n) = (x_n, y_n)$  を合わせた  $2n$  次元ベク

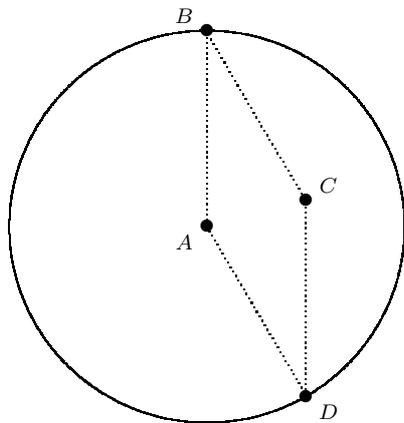
トル  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$  は、一対一対応する。よって、写像  $\phi_0: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  と対応するベクトルを、 $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$  と表すと、抽象リング  $L$  の配位空間は、次の  $N + 2r$  個の方程式を満たす部分空間  $C(L) \subset \mathbb{R}^{2n}$  である。

$$\begin{aligned} (x_{i_1} - x_{j_1})^2 + (y_{i_1} - y_{j_1})^2 &= \ell(e_1)^2 \\ (x_{i_2} - x_{j_2})^2 + (y_{i_2} - y_{j_2})^2 &= \ell(e_2)^2 \\ &\vdots \\ (x_{i_N} - x_{j_N})^2 + (y_{i_N} - y_{j_N})^2 &= \ell(e_N)^2 \\ x_1 &= a_1 \\ y_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ x_r &= a_r \\ y_r &= b_r \end{aligned}$$

例として、次の抽象リング  $L$  は、剛体正方形と呼ばれる。



ここで、頂点  $A$  と  $B$  を不動町店とすると、配位空間  $C(L)$  は一つの円となる。



剛体正方形の配位空間

特に、剛体正方形の配位空間は、微分可能多様体となる。驚くほどに、次の定理が成り立つ [1, Cor. C] :

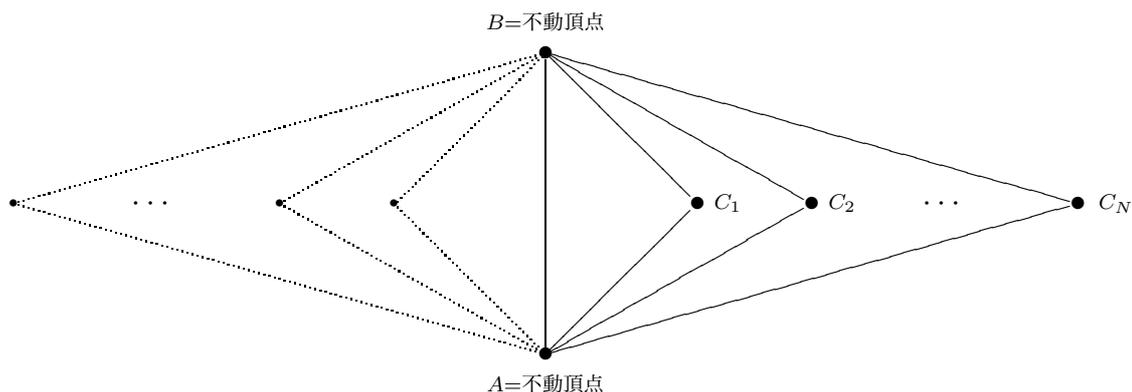
定理. 任意のコンパクト微分可能多様体は、ある抽象リング  $L$  の配位空間  $C(L)$  の連結成分と微分同相である。

ここで、 $n$ 次元の微分可能多様体  $M$  とは、局所的に  $n$ 次元のユークリッド空間と微分同相である部分空間  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  と定義された。その多様体  $M$  はコンパクトとは、ある点からある有限距離の範囲内に存在することである。例えば、

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

と定義された  $n$ 次元の単位球面は、 $n$ 次元のコンパクト微分可能多様体である。

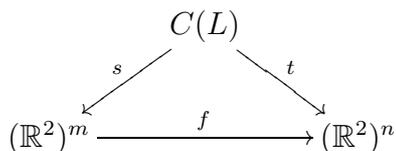
例として、0次元のコンパクト微分可能多様体は、ある有限個の点を合わせた空間である。一方次の抽象リング  $L$  の配位空間  $C(L)$  は、 $2^N$  個の点を合わせた空間となる。



よって、これで0次元の多様体に関して、定理が証明された。

一方、0次元の多様体と違って、過多の高次元のコンパクト微分可能多様体が存在する。しかし、ジョン・ナッシュによって、1952年に証明された定理より、任意のコンパクト微分可能多様体は、連立多項式系の解集合と表すことができる [1, Thm. 2.20]。よって、以上の定理を証明するために、次の問題を考えよ。蒸気エンジンが発明されたから19世紀の大きな問題だった。

ある写像  $f: (\mathbb{R}^2)^m \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$  は、抽象リング  $L$  で表現されるのは、次のように定義された。次の図式を考えてみる。

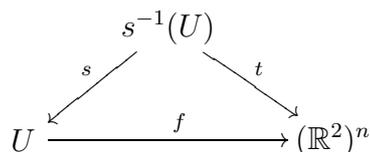


ここで、写像  $s$  と  $t$  はそれぞれの  $m$  個の入力頂点  $v'_1, \dots, v'_m$  と  $n$  個の出力頂点  $v''_1, \dots, v''_n$  の位置を与えられる写像であり、次のように定義される。

$$s(\phi) = (\phi(v'_1), \dots, \phi(v'_m))$$

$$t(\phi) = (\phi(v''_1), \dots, \phi(v''_n))$$

定義. 与えられた写像  $f: (\mathbb{R}^2)^m \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$  は、開近傍  $U \subset (\mathbb{R}^2)^m$  上、抽象リング  $L$  で表現されるとは、ある  $m$  個の入力頂点と  $n$  個の出力頂点に対して、写像  $s: s^{-1}(U) \rightarrow U$  は有限対 1 で、次の図式が可換になることである。



三つの例を考えてみる。

例 1 二つの剛体長方形を合わせた抽象リンク  $L_1$  を考えてみる。



平行移動リンク ( $u > v$ )

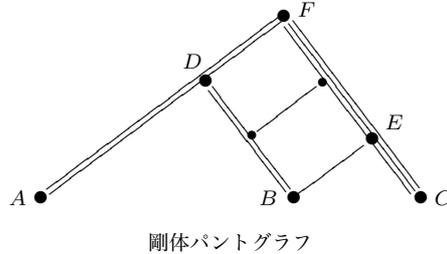
まず、頂点  $A$  と  $B$  を、それぞれの位置  $(0, 0)$  と  $(c, 0)$  の不動頂点とし、頂点  $C$  と  $D$  を、それぞれの入力頂点と出力頂点とする。このとき、平行移動リンクは、開近傍

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (u - v)^2 < x^2 + y^2 < (u + v)^2\}$$

上、写像  $f_1(x, y) = (x + c, y)$  を表現する。写像  $s: s^{-1}(U) \rightarrow U$  は 2 対 1 の写像である。

同情に、頂点  $A$  と  $B$  を、それぞれの位置  $(-c, 0)$  と  $(0, 0)$  の不動頂点とし、頂点  $D$  と  $C$  を、それぞれの入力頂点と出力頂点とすると、写像  $s: s^{-1}(U) \rightarrow U$  は 2 対 1 の写像で、平行移動リングは、開近傍  $U$  上、写像  $f_2(x, y) = (x - c, y)$  を表現する。

例 2 つについて、1603 年にクリストフ・シャイナーによって構成されたパントグラフと呼ばれるリングを考えてみる。



ここで、 $u = \ell(AD) > v = \ell(EF)$  と  $\ell(AF) = \lambda u$ 、 $\ell(CF) = \lambda v$  ( $\lambda > 1$ ) と仮定する。

まず、頂点  $A$  を位置  $(0, 0)$  の不動頂点とし、頂点  $B$  と  $C$  をそれぞれの入力頂点と出力頂点とする。このとき、パントグラフは開近傍

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\lambda u - v)^2 < x^2 + y^2 < (\lambda u + v)^2\}$$

上、写像  $f_3(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$  を表現する。写像  $s: s^{-1}(U) \rightarrow U$  は 2 対 1 の写像である。

同様に、頂点  $A$  を位置  $(0, 0)$  の不動頂点とし、頂点  $C$  と  $B$  をそれぞれの入力頂点と出力頂点とすると、パントグラフは開近傍

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda^2(u - v)^2 < x^2 + y^2 < \lambda^2(u + v)^2\}$$

上、写像  $f_4(x, y) = (\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$  を表現する。さらに、写像  $s: s^{-1}(U) \rightarrow U$  は 2 対 1 の写像である。

これから、 $\lambda = 2$  とする。まず、頂点  $B$  を位置  $(0, 0)$  の不動頂点とし、頂点  $A$  と  $C$  をそれぞれの入力頂点と出力頂点とする。このとき、パントグラフは開近傍

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (u - v)^2 < x^2 + y^2 < (u + v)^2\}$$

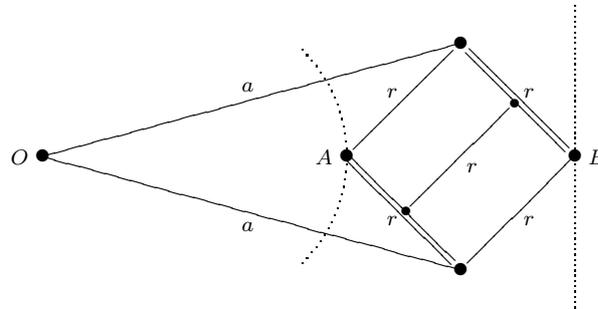
上、写像  $f_5(x, y) = (-x, -y)$  を表現する。写像  $s: s^{-1}(U) \rightarrow U$  は 2 対 1 の写像である。

最後に、頂点  $A$  と  $C$  を入力頂点とし、 $B$  を出力頂点とすると、パントグラフは、開近傍

$$U = \{(x_1, y_2, x_2, y_2) \in (\mathbb{R}^2)^2 \mid 4(u - v)^2 < (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < 4(u + v)^2\}$$

上、写像  $f_6(x_1, y_1, x_2, y_2) = (\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$  を表現する。さらに、 $s: s^{-1}(U) \rightarrow U$  は 2 対 1 の写像である。

例 3最後に、1864 年にポセリエーとリップキンによって独力で構成された有名な反転リングを考えてみる [3, 2]。



反転リング ( $a > r$ )

ここで、頂点  $O$  を位置  $(0, 0)$  の不動頂点とし、頂点  $A$  と  $B$  をそれぞれの入力頂点と出力頂点とすると、反転リングは、開近傍

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a - r)^2 < x^2 + y^2 < a^2 - r^2\}$$

上、次のように定義された写像  $f_7$  を表現する。

$$f_7(x, y) = \left( \frac{(a^2 - r^2)x}{x^2 + y^2}, \frac{(a^2 - r^2)y}{x^2 + y^2} \right)$$

これに、 $z = x + iy$  と  $\bar{z} = x - iy$  と表すと、

$$f_7(z) = \frac{a^2 - r^2}{\bar{z}}$$

と表すことができる。

以上の写像  $f_1, \dots, f_7$  の合成写像から、すべての実数係数の多項式が成り立つ。これを使うと、定理を証明することができる。

## 参考文献

- [1] M. Kapovich and J. J. Millson, *Universality theorems for configuration spaces of planar linkages*, *Topology* **41** (2002), 1051–1107.
- [2] L. Lipkin, *Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne*, *Revue anivers. des Mines et de la Métalurgie de Liège* **30** (1871), 149–150.
- [3] A. Peaucellier, *Note sur une question de géométrie de compas*, *Nouv. Ann. de Math.* **12** (1873), 71–73.