DIFFERENTIALLIGNINGER

Mogens Esrom Larsen

København 2001

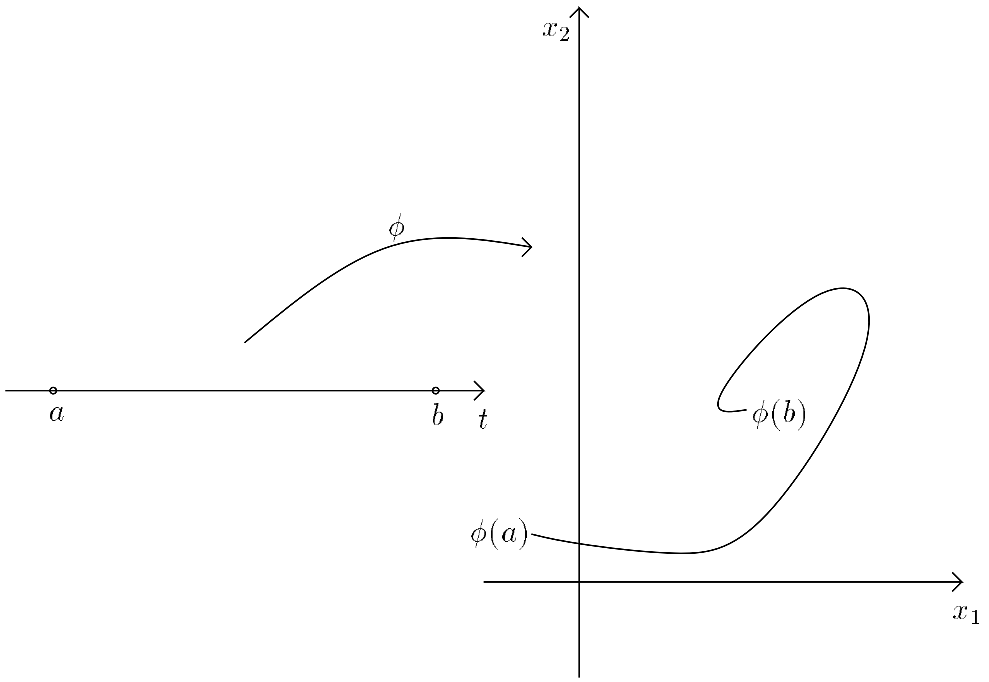
Noter til indledning af kurset DL1, der er en indledning til teorien for partielle differentialligninger.

Indhold

27. november 2001
Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
ISBN–nr. 87–7834–450–6

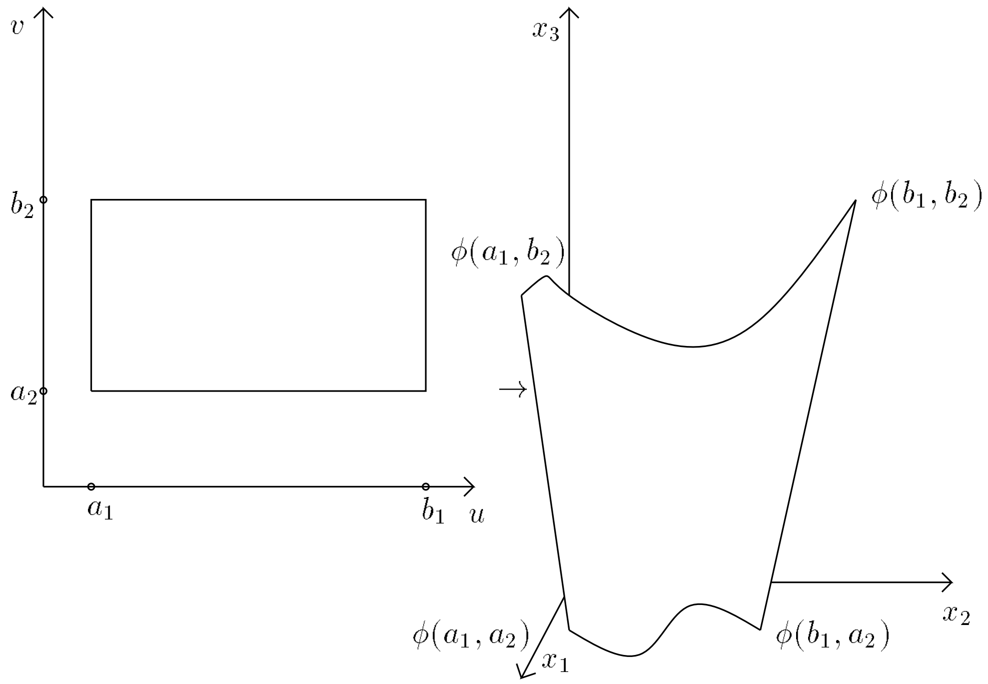
1. Kurver og flader.

Ved en *differentiabel kurve, K*, med en parameterfremstilling, ϕ, forstås en C^2–funktion af et interval, $\phi : [a,b] \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$.



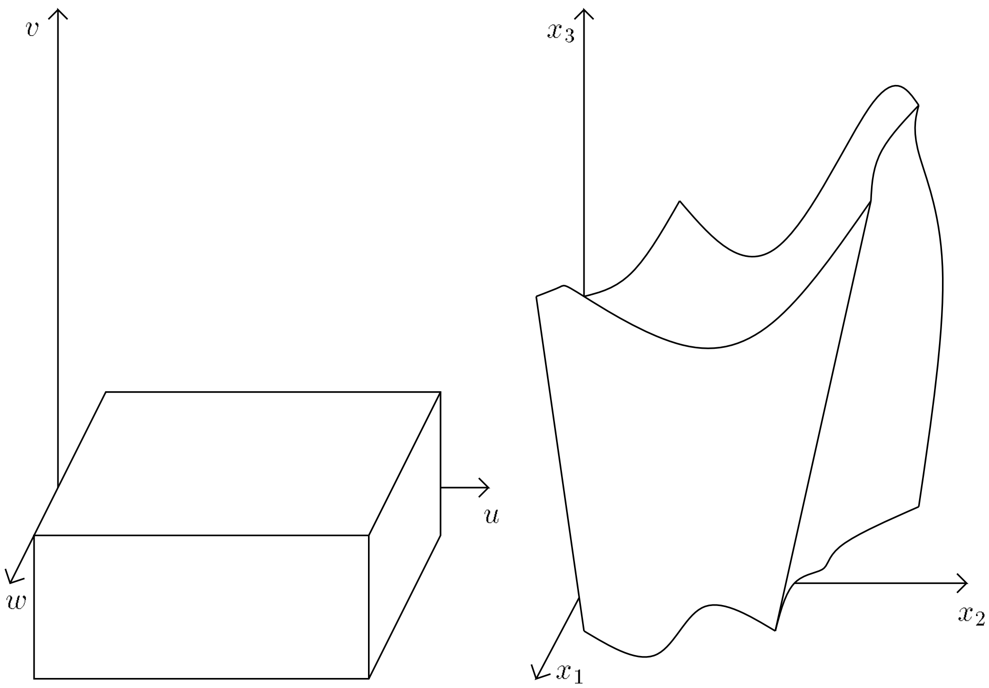
Hvis ϕ er vilkårlig ofte differentiabel, kaldes kurven *glat.*

Tilsvarende defineres en *differentiabel (glat) flade, F*, med en parameterfremstilling, ϕ, som en C^2– (C^∞–) funktion, $\phi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \in \mathbb{R}^n$, $n = 3, 4, \ldots$.

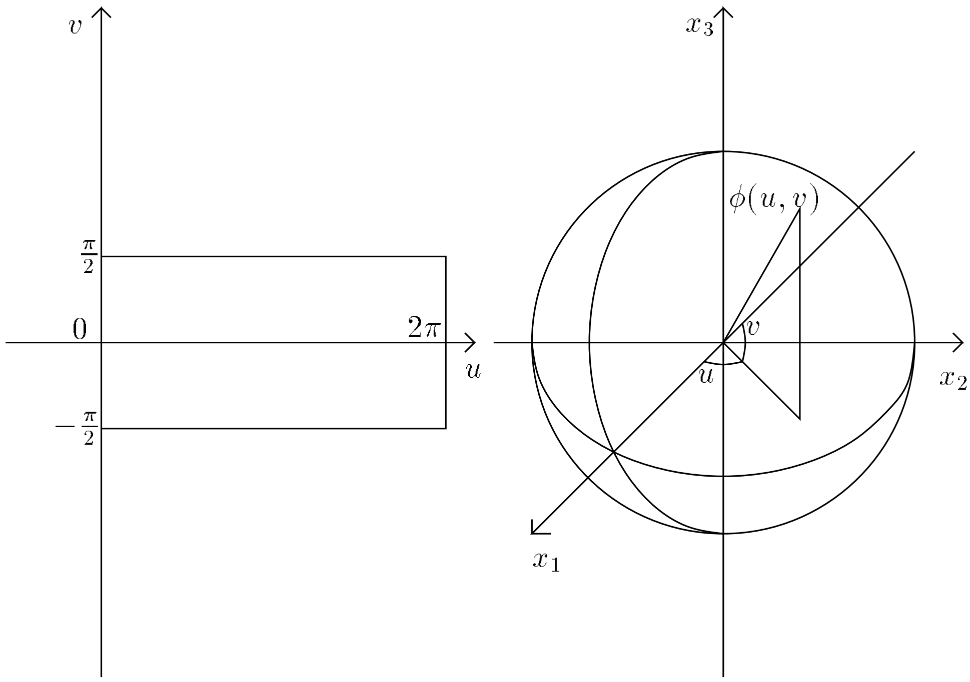


Fladebegrebet generaliseres til en p–flade, hvor $p \geq 0$, ved at forlange intervallet i $\mathbb{R}^p$. En kurve er på denne måde en 1–flade, og et punkt en 0–flade.

Man kan udmærket betragte en 3–flade i $\mathbb{R}^3$:



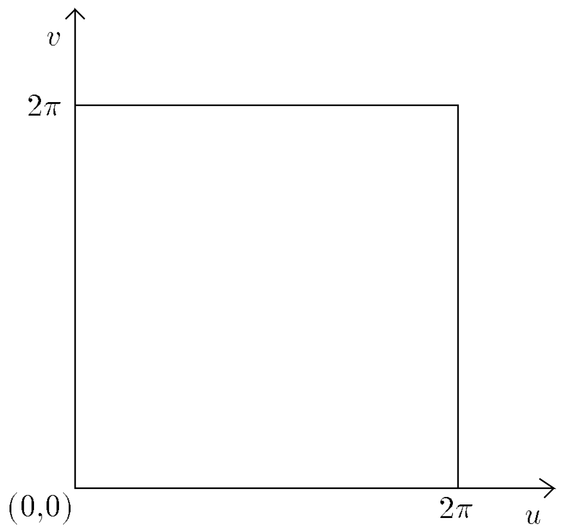
Et eksempel er fladen (kuglefladen)

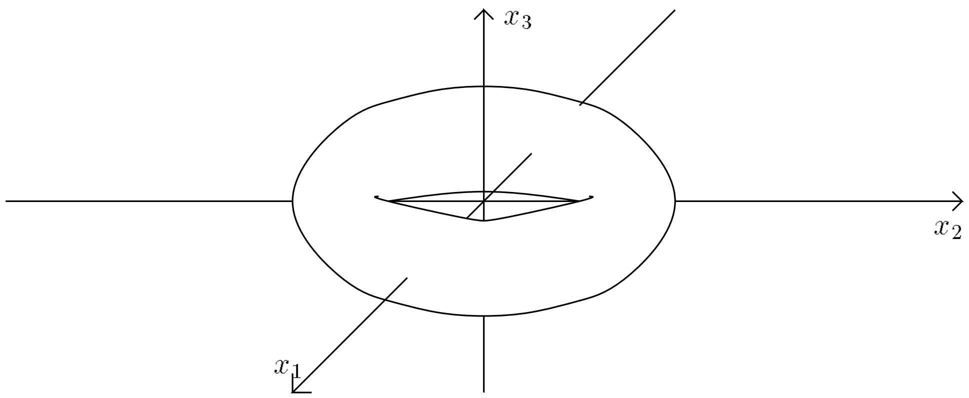


$$\phi : (u,v) \in [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \in \mathbb{R}^3$$

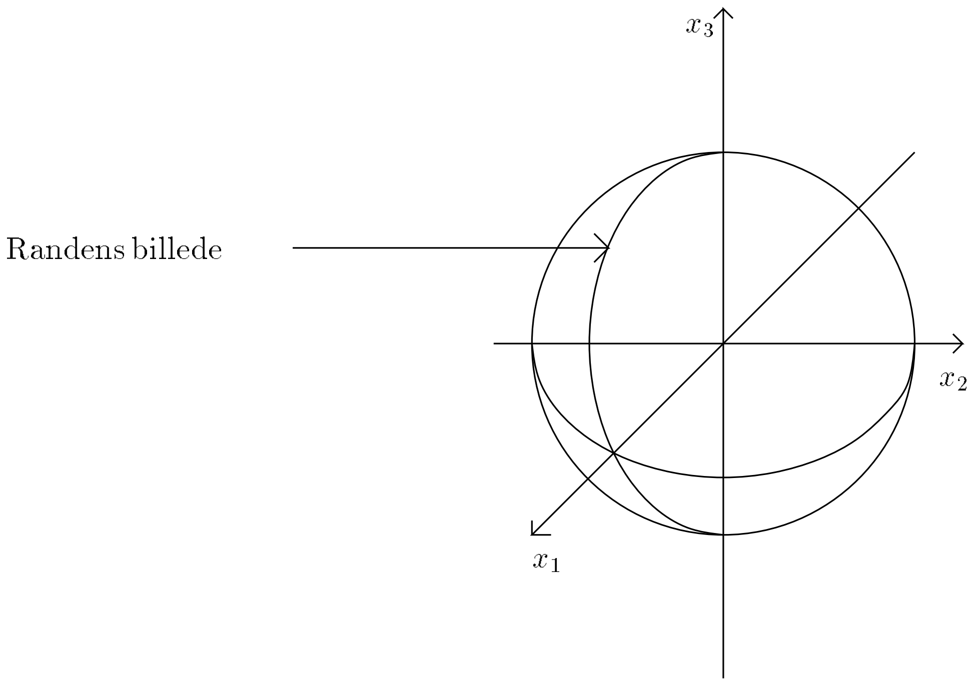
Et andet eksempel er en torus,

$$\phi : (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to (\cos v(2+\cos u), \sin v(2+\cos u), \sin u) \in \mathbb{R}^3$$

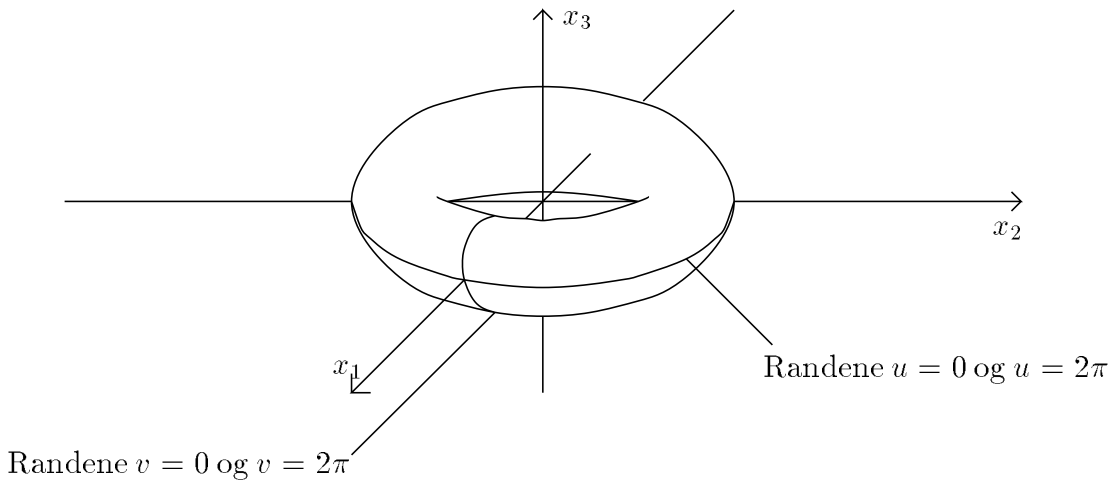




Disse eksempler viser flader uden rand. Men intervallerne har alle en rand. Hvor bliver randen af? I kugletilfældet afbildes de vandrette rande, $v = \frac{\pi}{2}$ og $v = -\frac{\pi}{2}$, i hhv. "nordpol" $(0,0,1)$ og "sydpol" $(0,0,-1)$, mens de lodrette, $u = 0$ og $u = 2\pi$, afbildes i den *samme* kurve: $v \to (\cos v, 0, \sin v)$.



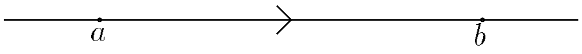
På torus afbildes de lodrette i den samme cirkel og de vandrette i den samme cirkel:



Randene kunne forsvinde ved at falde sammen eller ved at reduceres til et enkelt punkt.

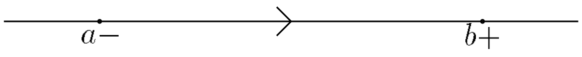
Da vi er interesserede i at beskrive kuglefladen med den anførte parameterfremstilling, må vi tillade randsammenfald. Men i det indre af intervallet er sammenfald ikke så interessant.

Vi indfører også en *orientering* af flader. Først orienterer vi intervallerne. Et interval i $\mathbb{R}$ fra a til b har dermed en gennemløbsretning, nemlig *fra a til b*:

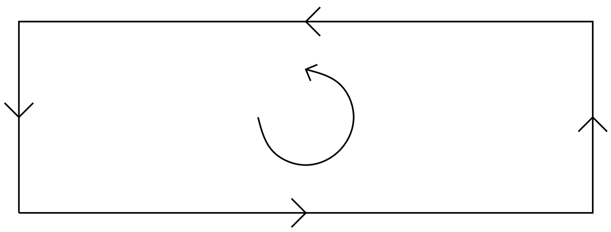


Den modsatte orientering er gennemløbsretningen fra b til a.

I tilfældet fra a til b vil vi endvidere orientere endepunkterne med $+$ for b og $-$ for a:

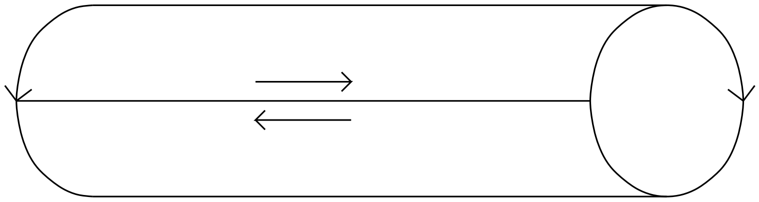


Dernæst orienterer vi et rektangel ved et omløb ad randen:

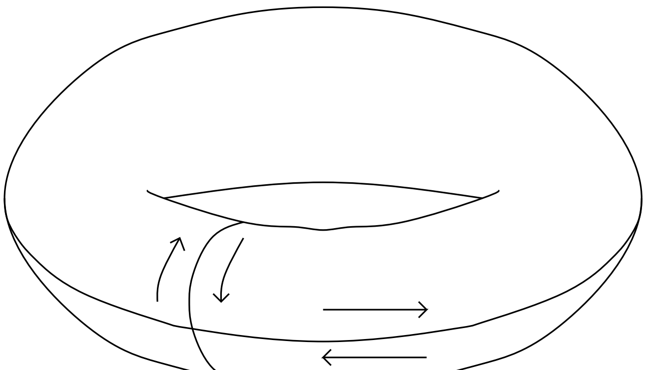


Ved et omløb langs randen i pilenes retning har vi det indre af rektanglet på venstre side.

Afbildes det orienterede rektangel på en torus, bliver de modstående sider limet sammen på den måde, at pilene på siderne går i modsat retning:

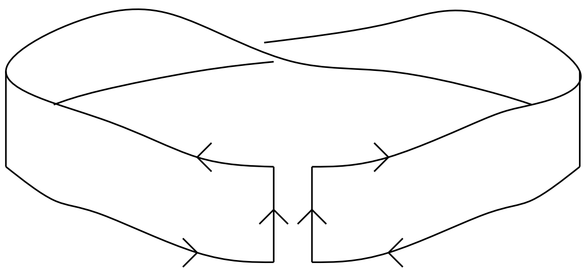


Cylinder



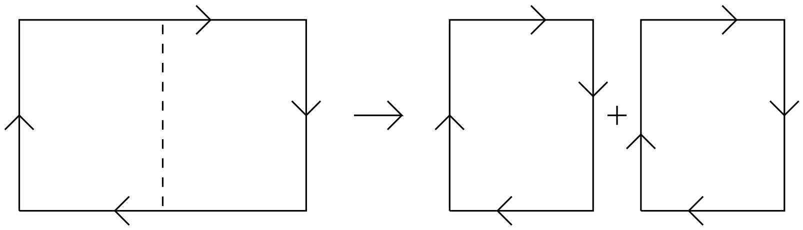
Torus

En flade, der er dannet ved at lime dele sammen med samme orientering, kan ikke selv orienteres. Et eksempel er Möbius båndet, hvor man ikke kan skelne mellem op og ned.



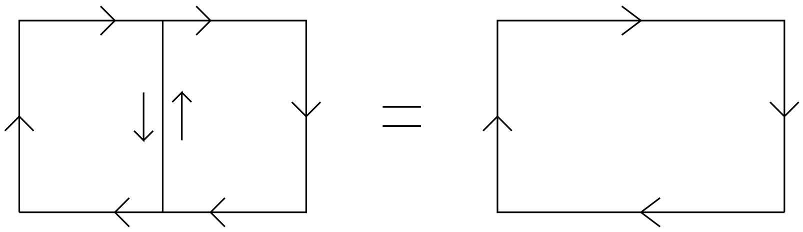
Möbius bånd

Ved deling af et rektangel i to rektangler ses, at de to nye sider naturligt får modsat orientering:



Deling af et rektangel

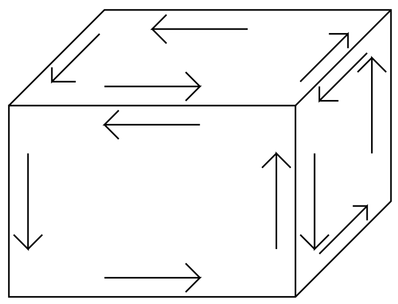
Vi indfører derfor den regel, at *ved sammenfald af to modsat orienterede sider hæver de hinanden.*



Sammenlimning af to rektangler

Derved bliver sfæren og torus til flader uden rand.

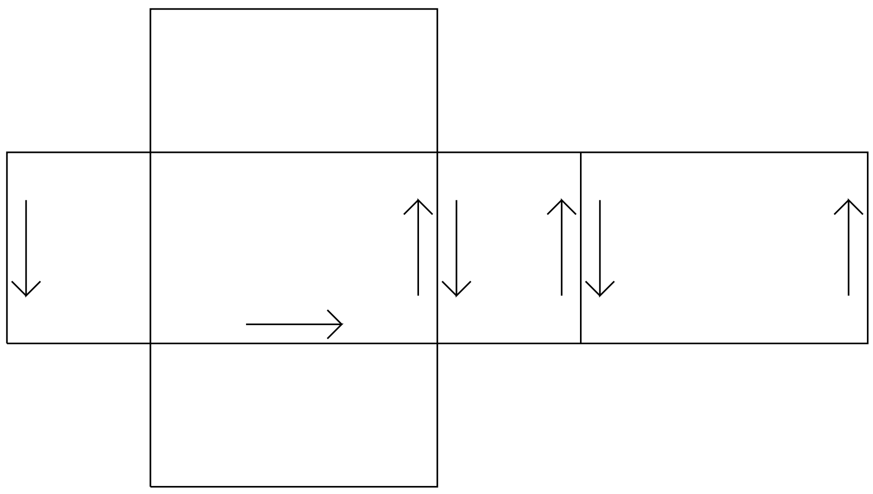
Vi orienterer tilsvarende en kasse:



Orienteret kasse

Hvert rektangel på siderne orienteres således, at kanterne får modsatte orienteringer, som kræves, for at de kan hæve hinanden.

Kassens overflade er derfor uden rand; alle kanter er med 2 gange, men modsat orienteret:



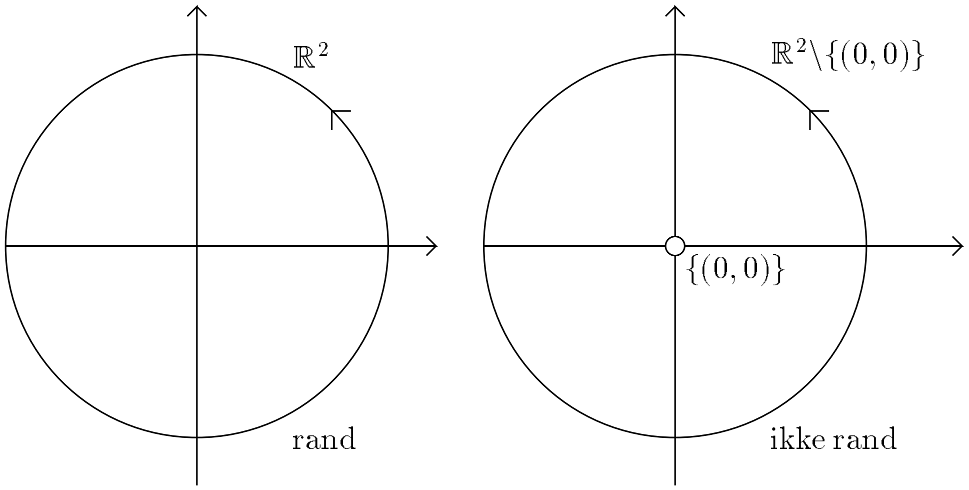
Vi definerer nu en *kæde* af kurver eller flader som et sæt af kurvestykker eller fladestykker med orientering, hvor sammenfaldende dele med modsat orientering hæver hinanden.

F. eks. er randen af rektanglet en kæde af 4 kurver, hvis endepunkter parvis hæver hinanden. Når rektanglet afbildes på en cylinder, hæver de to af siderne hinanden, så cylinderens rand kommer til at bestå af billederne af de to andre sider, altså af 2 cirkler.

Hvis en kurve eller flade er uden rand, kaldes den *lukket.* Eksempler er cirkel, sfære og torus.

Hvis en flade har en rand, så er denne rand lukket.

Spørgsmålet om, hvornår en lukket kurve eller flade er en rand, er emnet for den algebraiske topologi. Det drejer sig om, hvorvidt rummet har huller. I planen er en lukket kurve uden selvgennemskæringer rand af et område, men i en hullet plan som f. eks. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gælder det ikke:



Vi definerer nu ∂ som den funktion, der til en flade lader svare dens rand, som er en kæde af flader af lavere dimension med den nedarvede orientering.

Sætning 1. *En rand er altid lukket.*

$$\partial\partial = \vee$$

2. Differentialformer og kurveintegraler.

Differentialet af en differentiabel funktion af 2 variable, $f(x,y)$, er som bekendt en funktion af 4 variable, x, y, dx, dy, som er lineær i de to sidste,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

Det er naturligt at spørge om, hvorvidt et tilsvarende udtryk

$$(*) \qquad P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

hvor P og Q er funktioner af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$, er differential af en funktion, $f(x,y)$.

Et udtryk af formen $(*)$ kaldes en *differentialform.* Hvis der findes en funktion, f, med $(*)$ som differential, kaldes $(*)$ et *totalt differential.*

Som bekendt gælder, at hvis f er kontinuert differentiabel, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Med andre ord, en nødvendig betingelse for, at $(*)$ er et totalt differential, er, at der gælder:

$$(\times) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Betingelsen $(\times)$ er tilstrækkelig, hvis funktionerne P og Q er definerede overalt. Thi vi kan da definere f som

$$f(x,y) = \int_a^x P(t,b)dt + \int_b^y Q(x,s)ds$$

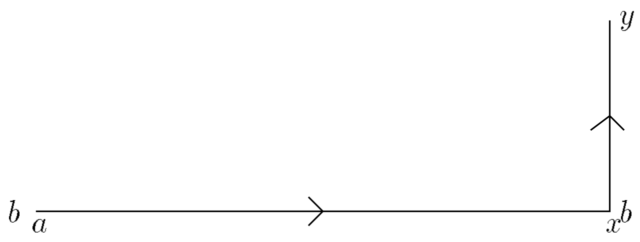
Bevis. Vi regner således:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= P(x,b) + \int_b^y \frac{\partial Q(x,s)}{\partial x} ds \\ &= P(x,b) + \int_b^y \frac{\partial P(x,s)}{\partial y} ds \\ &= P(x,b) + P(x,y) - P(x,b) = P(x,y)\end{aligned}$$

og umiddelbart

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

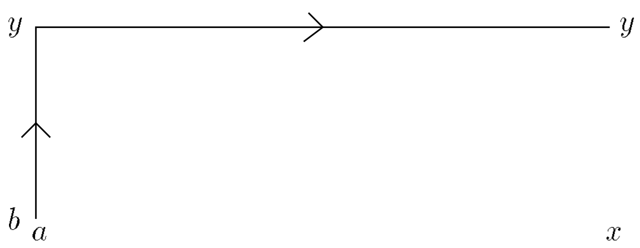
Ved definitionen af f har vi kun benyttet funktionerne P og Q langs kurven



Vi kunne lige så godt have defineret

$$f(x,y) = \int_b^y Q(a,s)ds + \int_a^x P(t,y)dt +$$

altså integralet langs kurven

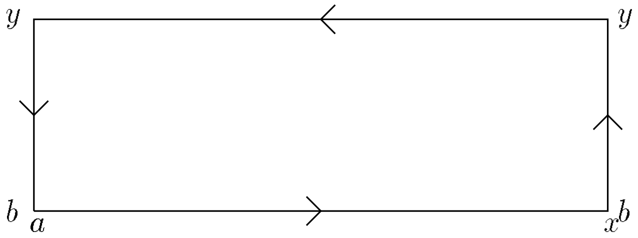


Det viser sig, at $f(x,y) = g(x,y)$, når P og Q er *definerede overalt* på og inden i rektanglet og er kontinuert differentiable der.

Vi udtrykker dette forhold ved at sige, at

$$\int_a^x P(t,b)dt + \int_b^y Q(x,s)ds + \int_x^a P(t,y)dt + \int_y^b Q(a,s)ds = 0$$

altså, at integralet er $= 0$ langs kurven

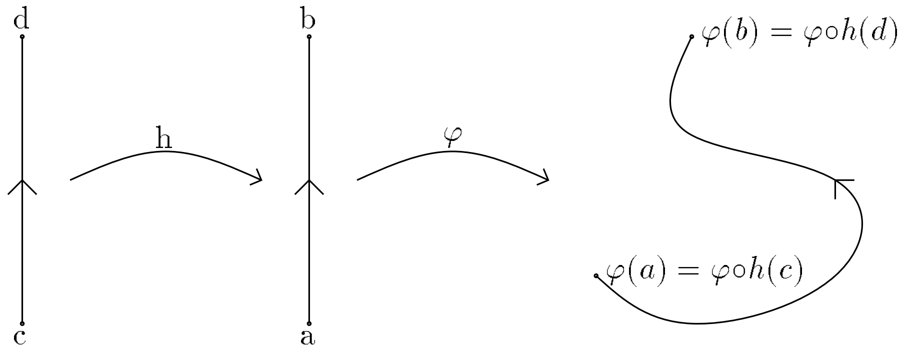


Lad $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ være en differentiabel kurve. Vi definerer nu *kurveintegralet* af *differentialformen* $(*)$ ved

$$\oint_\varphi (*) = \int_a^b \left(P(\varphi(t)) \frac{d\varphi_x}{dt} + Q(\varphi(t)) \frac{d\varphi_y}{dt} \right) dt$$

Bemærkninger:

1) Kurveintegralet afhænger ikke af den valgte parameterfremstilling, kun af dens retning. Lad nemlig $t = h(s)$ være en orienteringsbevarende kontinuert differentiabel funktion, $h : [c,d] \to [a,b]$, fx. $h' > 0$, så er $\varphi \circ h : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ en parameterfremstilling af den samme kurve:



Kurveintegralet er per definition

$$\begin{aligned}\oint_{\varphi\circ h} (*) &= \int_c^d \left(P(\varphi(h(s))) \frac{d(\varphi_x(h(s)))}{ds} + Q(\varphi(h(s))) \frac{d(\varphi_y(h(s)))}{ds} \right) ds \\ &= \int_c^d \left[P(\varphi(t)) \frac{d(\varphi_x(t))}{dt} + Q(\varphi(t)) \frac{d(\varphi_y(t))}{dt} \right]_{t=h(s)} h'(s) ds \\ &= \int_{h(c)}^{h(d)} \left(P(\varphi(t)) \frac{d(\varphi_x(t))}{dt} + Q(\varphi(t)) \frac{d(\varphi_y(t))}{dt} \right) dt = \oint_\varphi (*)\end{aligned}$$

2) Kurveintegralet af et totalt differential er givet ved værdierne i endepunkterne af kurven.

$$\begin{aligned}\oint_\varphi (*) &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \frac{d(\varphi_x(t))}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \frac{d(\varphi_y(t))}{ds} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d(f \circ \varphi)}{dt} dt = [f \circ \varphi]_a^b = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))\end{aligned}$$

3) Hvis kurven er lukket, så er integralet 0. Thi da er $f(\varphi(b)) = f(\varphi(a))$.

Sætning 2. *Integralet af et totalt differential langs en lukket kurve er 0.*

Omvendt gælder:

Sætning 3. *En differentialform $\omega = Pdx + Qdy$ som opfylder, at integralet langs enhver lukket kurve, φ, er 0, altså*

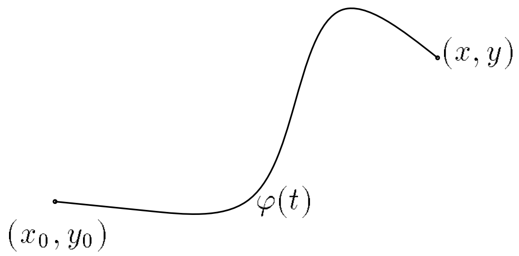
$$\oint_\varphi \omega = 0$$

er et totalt differential.

Bevis. Vi vælger et punkt (x_0, y_0) og definerer i (x, y) funktionen

$$f(x,y) = \oint_\varphi \omega$$

hvor $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ er en kurve, så $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ og $\varphi(1) = (x, y)$. (Betingelsen sikrer, at $f(x,y)$ er uafhængig af valget af kurve, φ, mellem endepunkterne.)



Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,y) - f(x,y)}{dx}$$

hvor

$$f(x+dx,y) - f(x,y) = \oint_\psi \omega = \int_0^1 (P(x+tdx,y)dx)dt$$

hvor $\psi(t) = (x + tdx, y)$ for $t \in [0,1]$. Altså er ifølge middelværdisætningen

$$\frac{f(x+dx,y) - f(x,y)}{dx} = \frac{1}{dx}\int_0^1 P(x+tdx,y)dt = P(x+\tau dx, y)$$

for et $\tau \in [0,1]$. Da P er kontinuert, fås

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{dx \to 0} P(x+\tau dx, y) = P(x,y)$$

Et grimt eksempel:

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Denne form er ikke defineret overalt, nemlig ikke i $(0,0)$. Selv om den opfylder $(\times)$, sikrer det os ikke, at den er et totalt differential.

$$(\times) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

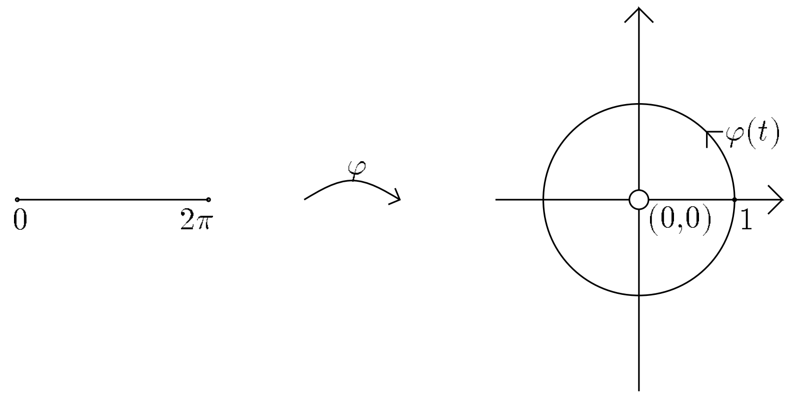
Hvis den var et totalt differential, så skulle

$$\oint_\varphi \omega = 0$$

for enhvar lukket kurve, φ. Lad os sætte

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

altså den lukkede kurve, enhedscirklen. Bemærk, at kurven løber rundt om hullet, $(0,0)$.



Vi finder efter definitionen

$$\oint_\varphi \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cdot(-\sin t) + \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cdot(\cos t)\right) dt = -2\pi$$

Altså kan ω ikke være et totalt differential.

3. Anvendelser på differentialligninger.

En differentialligning af formen

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

siges at have en løsning, $y = \varphi(x)$, hvis

$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

Med andre ord, ligningen identificeres for $Q(x,y) \neq 0$ med den sædvanlige ligning

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Hvis differentialformen,

$$\omega = Pdx + Qdy$$

er et totalt differential, altså

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

så vil ligningen

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

betyde for løsningen, $y = \varphi(x)$, at

$$\frac{df(x,\varphi(x))}{dx} = \frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial y}\varphi'(x) = 0$$

altså, at

$$f(x,\varphi(x)) = K$$

hvor K er en konstant.

Med andre ord, $y = \varphi(x)$, er bestemt implicit ved relationen,

$$f(x,y) = K$$

Eksempel.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$$

Løsningen findes ved at løse f. eks.

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y^2}dy = 0$$

Nu er $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ og $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{y^2}\right) = 0$, så for $(x,y) \neq (0,0)$ er formen måske et totalt differential af en funktion,

$$f(x,y) = g(x) + h(y)$$

Vi finder, at

$$f(x,y) = \ln|x| + \frac{1}{y}$$

dur. Altså er løsningen $y = \varphi(x)$ givet implicit af ligningen

$$\ln|x| + \frac{1}{y} = k$$

Denne ligning løses umiddelbart i y til

$$y = \frac{1}{k - \ln|x|} \quad \text{for} \quad |x| \neq e^k$$

Prøve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(k - \ln|x|)^2} \cdot \left(-\frac{1}{|x|}\right) \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{y^2}{x}$$

Eksempel.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

eller evt.

$$(x-y)dx + (x+y)dy = 0$$

Nu er

$$\frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1$$

så vi har ikke et totalt differential. Men ligningen kan erstattes af

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{y+x}{x^2+y^2}dy = 0$$

Denne form er det totale differential af

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + \arctan\frac{y}{x} \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

så ligningen

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + \arctan\frac{y}{x} = k$$

bestemmer implicit løsningen til den oprindelige differentialligning. Men her er der ikke tale om et totalt differential i hele området; kurveintegralet langs enhedscirklen er 2π.

4. Green's sætning.

Lad der være givet et rektangel, R, i planen og en differentialform, som ikke nødvendigvis er et totalt differential,

$$(*) \qquad \omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Det er altså ikke givet, at $(\times)$ er opfyldt. Vi kan derfor betragte afvigelsen fra $(\times)$ som funktionen

$$f(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

Altså, $(\times)$ betyder nu, at $f \equiv 0$.

Lad φ være en parameterfremstilling af rektanglet. Sætning 3 generaliseres til:

Green's formel.

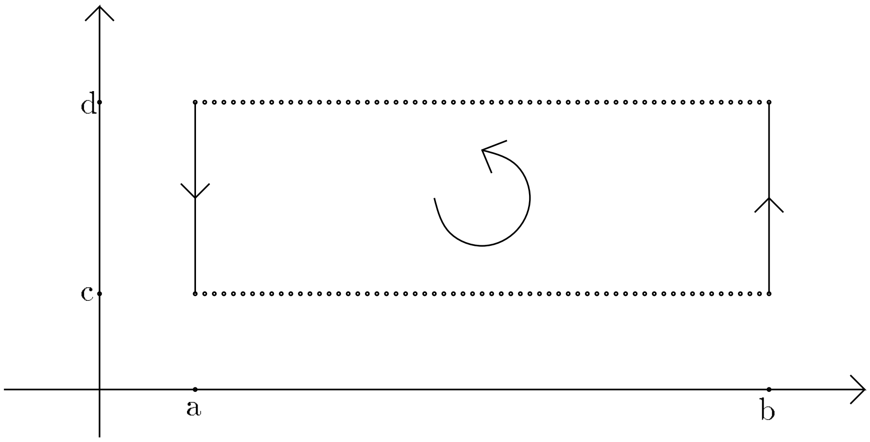
$$\oint_\varphi \omega = \int_R f(x,y)dxdy$$

(Hvor R og φ har tilsvarende orienteringer.)

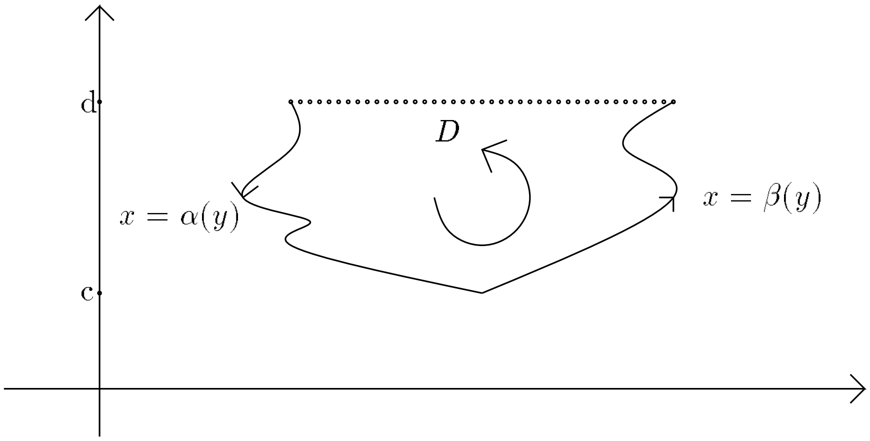
Bevis. Lad $R = [a,b] \times [c,d]$.

$$\int_R \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)dy =$$

$$= \int_c^d [Q(x,y)]_a^b\, dy = \int_c^d Q(b,y)dy - \int_c^d Q(a,y)dy = \oint_\varphi Q(x,y)dy$$



Green's sætning generaliseres uden videre til et vilkårligt område. Thi et område kan deles i stykker af formen:



som kan beskrives ved

$$D = \{(x, y) | \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \wedge c \leq y \leq d\}$$

Regnestykket bliver så det samme med a og b erstattet af $\alpha(y)$ og $\beta(y)$. Vi har derfor *Green's sætning:*

Sætning 4. *Lad D være et område i planen med orientering, og lad ∂D være den tilsvarende orienterede rand. Lad endvidere $\omega = Pdx + Qdy$ være en kontinuert differentialform på $\bar{D}$. Da gælder*

$$\oint_{\partial D} \omega = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Eksempel.
Arealet af et område, D, er jo

$$\int_D 1 dxdy$$

Nu søger vi en form, ω, med 1 som partiel afledet. F. eks. vil $\omega = xdy$, $\omega = -ydx$ eller

$$\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

kunne bruges. Green's sætning siger nu, at

$$Areal(D) = \int_D 1dxdy = \oint_{\partial D} \omega = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(xdy - ydx) = \oint_{\partial D} xdy = -\oint_{\partial D} ydx$$

Er D enhedscirklen, fås altså

$$\pi = \oint_{\partial D} xdy = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = 0 + \pi$$

eller

$$\pi = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1d\varphi = \pi$$

5. Differentialer af differentialformer.

I Green's sætning indgik processen:

$$Pdx + Qdy \to \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Denne proces er et eksempel på den relevante differentiation af differentialformen.

I $\mathbb{R}^n$ indføres følgende basisformer af graderne $0, \ldots, n$:

grad	form	antal
0	1	1
1	$dx_1, \ldots, dx_n$	n
2	$dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, \ldots, dx_{n-1} \wedge dx_n$	$\binom{n}{2}$
3	$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \ldots$	$\binom{n}{3}$
$\vdots$		$\vdots$
n	$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n$	1

I dimension $n = 2$ fås altså basisformerne:

$$1, \quad dx, \quad dy, \quad dx \wedge dy$$

I dimension $n = 3$ fås følgende $8 = 2^3$ basisformer:

$$1; \quad dx, \quad dy, \quad dz; \quad dy \wedge dz, \quad dz \wedge dx, \quad dx \wedge dy; \quad dx \wedge dy \wedge dz$$

For disse former indføres regneoperationen $\wedge$ med følgende spilleregler (formerne siges at *alternere*)

$$(1) \qquad dx \wedge dx = 0$$

$$(2) \qquad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

(Bemærk, at (2)$\Rightarrow$(1).) Produktet $\wedge$ kaldes *det ydre produkt* (af formerne).

Ved en *differentialform af grad p* forstås en sum af udtryk af form som en differentiabel funktion gange en basisform af grad p:

$$f(x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

F. eks. i planen af grad 1:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

eller i rummet af grad 2:

$$L(x,y,z)dy \wedge dz + M(x,y,z)dz \wedge dx + N(x,y,z)dx \wedge dy$$

Vi definerer nu en *differentiation*, d, af en form

$$fb = f(x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

som

$$d(fb) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge b = (df) \wedge b$$

I Green's sætning optræder netop

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) =& \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ =& \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

under anvendelse af (1) og (2). Vi kan derfor formulere Green's sætning som formlen:

$$\oint_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Differentiation af former opfylder

Sætning 5.

$$dd = 0$$

Bevis. $d(d(fb)) = d((df) \wedge b) = (d(d(f)) \wedge b$ og

$$\begin{aligned} d(df) =& d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) = \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 \wedge dx_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n \wedge dx_1 + \cdots \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 \wedge dx_n + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n \wedge dx_n \end{aligned}$$

Nu er $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ og $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Altså er $d(df) = 0$.

Bemærk, at er $\omega = df$, så gælder:

$$\oint_{\partial D} df = \int_D d(df)) = 0$$

Lad nu

$$\varphi : (u,v) \in E \to (x,y) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \in D$$

være en kontinuert differentiabel homeomorfi af E på D. Da er jo

$$\begin{aligned} dx \wedge dy =& \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \\ =& \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}du \wedge du + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}du \wedge dv + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}dv \wedge du + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}dv \wedge dv \\ =& \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du \wedge dv \end{aligned}$$

Derfor fås

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_E f \circ \varphi(u,v) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv$$

Faktoren i formlen skrives ofte som determinanten

$$J\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

kaldet *Jacobi–determinanten.*

Vi definerer endvidere $\wedge$–produktet af to former

$$\begin{aligned} \omega &= f(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ \pi &= g(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \end{aligned}$$

som $(p+q)$–formen

$$\omega \wedge \pi = f(x)g(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$$

Da gælder regnereglen

$$d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi$$

Thi,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \pi) &= d(fg)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\ &= d(f)g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} + (fdg)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\ &= (df) \wedge dx_{i1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\ &+ \sum_{k=1}^{n} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\ = (d\omega) \wedge \pi &+ (-1)^p \sum_{k=1}^{n} f(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge \frac{\partial g}{\partial x_k}dx_k \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\ &= (d\omega) \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge (d\pi) \end{aligned}$$

6. Fladeintegraler af differentialformer.

Er der givet en flade, F, af dimension p ved

$$\phi : I \to \mathbb{R}^n, \quad I \subseteq \mathbb{R}^p$$

og en differentialform af grad p

$$\omega = f_{1\ldots p} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p + \cdots + f_{n-p+1\ldots n} dx_{n-p+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

defineres *integralet af formen ω over fladen,* F, ved

$$\int_F \omega = \int_I (f_{1\ldots p}(\varphi(y)) d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_p + \cdots + \cdots +)$$

F. eks. kurveintegralet

$$\oint_K (P dx + Q dy) = \int_I (P(\varphi(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi(t))\varphi_2'(t))\, dt$$

idet $d\varphi_1 = \varphi_1'(t)dt$ og $d\varphi_2 = \varphi_2'(t)dt$. F. eks. koordinattransformationen

$$\int_F f(x,y) dx \wedge dy = \int_I f(x(u,v), y(u,v)) J(x,y) du \wedge dv$$

For fladeintegraler gælder analogt til Green's sætning følgende hovedsætning, der benævnes efter Newton, Leibniz, Gauß, Green, Ostrogradskij, Stokes, Poincaré og evt. de Rham:

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega$$

Til at bevise hovedsætningen bruges følgende lemma af Poincaré:

Lemma.

$$d(\omega \circ \varphi) = (d\omega) \circ \varphi$$

Bevis. Hvis ω er en 0–form, så er $\omega = f(x)$. Altså

$$d(\omega \circ \varphi) = d(f(\varphi(u))) = \nabla f D\varphi du$$

ifølge kædereglen for differentiation. Men da

$$d\omega = df = \nabla f dx$$

er pr. definition

$$(d\omega) \circ \varphi = \nabla f \circ \varphi d\varphi = \nabla f D\varphi du$$

Hvis formlen gælder for former af lavere grad, ω og π, så gælder den for $\omega \wedge \pi$. Thi ifølge regnereglen er

$$\begin{aligned}(d(\omega \wedge \pi)) \circ \varphi &= (d\omega \wedge \pi) + (-1)^p \omega \wedge d\pi) \circ \varphi \\ &= ((d\omega) \circ \varphi) \wedge (\pi \circ \varphi) + (-1)^p (\omega \circ \varphi) \wedge ((d\pi) \circ \varphi) \\ &= (d\omega \circ \varphi) \wedge (\pi \circ \varphi) + (-1)^p (\omega \circ \varphi) \wedge (d(\pi \circ \varphi)) \\ &= d((\omega \circ \varphi) \wedge (\pi \circ \varphi)) = d((\omega \wedge \pi) \circ \varphi)\end{aligned}$$

Det er nu nok at vise formlen for formen dx_1. Men

$$(d(dx_1)) \circ \varphi = 0 \circ \varphi = 0$$
$$d((dx_1) \circ \varphi) = d(d\varphi_1) = 0$$

Hovedsætning.

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega$$

Bevis. Da der findes et p–interval, I, så

$$\int_F d\omega = \int_I (d\omega) \circ \varphi \text{ og } \int_{\partial F} \omega = \int_{\partial I} \omega \circ \varphi$$

følger af lemmaet, at det er nok at vise sætningen for intervaller.

Vi kan da antage, at formerne er hhv:

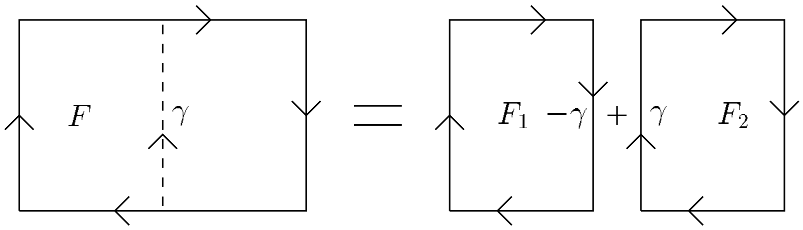
$$\begin{aligned} \omega &= f\,(x_1, \cdots, x_p)\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p \\ d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\,(x_1, \cdots, x_p)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p \end{aligned}$$

Da er integralet af ω over de sider af intervallet, der er parallele med x_1–aksen lig med 0. Altså er med $I = [a, b] \times J$

$$\begin{aligned} \int_{\partial I} \omega &= \int_J f(b, x_2, \cdots, x_p) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p - \int_J f(a, x_2, \cdots, x_p) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p \\ &= \int_J (f(b, x) - f(a, x)) dx = \int_J \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, x) d\xi \wedge dx = \int_I d\omega \end{aligned}$$

Læg marke til harmonien mellem hovedsætningen og konventionen om ophævelse af modsat orienterede sammenfaldende dele af randen.

Er. f.eks. $\omega = Pdx + Qdy$ og $F = F_1 + F_2$:



er jo åbenbart

$$\int_F d\omega = \int_{F_1} d\omega + \int_{F_2} d\omega$$

og derfor

$$\int_{\partial F} \omega = \int_{\partial F_1} \omega + \int_{\partial F_2} \omega$$

men det gælder da kun, når det for delelinien, γ, gælder, at

$$\int_\gamma \omega + \int_{-\gamma} \omega = 0$$

hvad der imidlertid er klart efter definitionen.

Anvendes hovedsætningen på regnereglen, fås

$$\int_{\partial F} \omega \wedge \pi = \int_F d(\omega \wedge \pi) = \int_F d\omega \wedge \pi + \int_F (-1)^p \omega \wedge d\pi$$

Det viser, at der gælder generalisationen af reglen om delvis integration, i denne form kaldet *Green's formler,*

Green's formler. *For en P–form, ω, gælder:*

$$\int_F d\omega \wedge \pi = \int_{\partial F} \omega \wedge \pi - \int_F (-1)^p \omega \wedge d\pi$$

Lad os som et eksempel beregne rumfanget af en ellipsoide

$$E = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Ifølge hovedsætningen er

$$Rmf(E) = \int_E 1 dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial E} z dx \wedge dy$$

Nu er ∂E beskrevet af (φ, θ), $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} x &= a \cos\varphi \cos\theta \\ y &= b \sin\varphi \cos\theta \\ z &= c \sin\theta \end{aligned}$$

Vi finder

$$\begin{aligned} dx &= -a \sin\varphi \cos\theta d\varphi - a \cos\varphi \sin\theta d\theta \\ dy &= b \cos\varphi \cos\theta d\varphi - b \sin\varphi \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

hvoraf

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= ab \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta d\varphi \wedge d\theta - ab \cos^2\varphi \cos\theta \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= ab \cos\theta \sin\theta \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \right) d\varphi \wedge d\theta = ab \cos\theta \sin\theta d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

Indsættes i integralet, fås med $R = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} z dx \wedge dy &= \int_R abc \cos\theta \sin^2\theta d\varphi \wedge d\theta \\ &= abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin^2\theta d\varphi \wedge d\theta \\ &= 2\pi abc \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{4\pi}{3} abc \end{aligned}$$

Rumfanget eller evt. arealet af en vilkårlig p–flade i et n–dimensionalt rum kan findes af nedenstående formel. Lad F være p–fladen defineret for $I \subseteq \mathbb{R}^p$ ved

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$$

Vi har funktionalmatricen for $x_1(u_1, \cdots, u_p), \cdots, x_n(u_1, \cdots, u_p)$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

som er en $n \times p$–matrix.

Vi definerer nu de $\binom{n}{p}$ Jacobi–underdeterminanter som determinanterne

$$J_{i_1 \dots i_p} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{i_p}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{i_p}}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

for ethvert sæt, $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$.

Volumenet af F er nu

$$\begin{aligned} V(F) &= \int_F \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \left(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right)^2} \\ &= \int_I \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} J^2_{i_1 \cdots i_p} du_1 \wedge \cdots \wedge du_p} \end{aligned}$$

For en kurve, K, givet ved $x_1(t), \cdots, x_n(t), \quad t \in I$, får vi længden

$$L(K) = \int_K \sqrt{(dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2} = \int_I \sqrt{\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2} dt$$

For en flade, F, i $\mathbb{R}^3$ får vi arealet, idet $(x, y, z) = f(u, v)$:

$$\begin{aligned} A(F) &= \int_F \sqrt{(dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2 + (dx \wedge dy)^2} \\ &= \int_I \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} du \wedge dv \\ &= \int_I ||f_u \times f_v|| du \wedge dv \end{aligned}$$

hvor jo

$$f_u \times f_v = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right)$$

F. eks. overfladen af ellipsoiden. Vi fortsætter fra eksemplet ovenfor med at finde

$$\begin{aligned} dz &= c \cos\theta d\theta \\ dz \wedge dx &= ac \sin\varphi \cos^2\theta d\varphi \wedge d\theta \\ dy \wedge dz &= bc \cos\varphi \cos^2\theta d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

Herefter fås arealet

$$\begin{aligned}A(E) &= \int_E \sqrt{(dy\wedge dz)^2+(dz\wedge dx)^2+(dx\wedge dy)^2}\\ &= \int_R \sqrt{b^2c^2\cos^2\varphi\cos^4\theta + a^2c^2\sin^2\varphi\cos^4\theta + a^2b^2\cos^2\theta\sin^2\theta d\varphi\wedge d\theta}\end{aligned}$$

Dette integral kan ikke udregnes i almindelighed. Men for omdrejningsellipsoiden går det. Vi sætter derfor $a = b$ og finder

$$\begin{aligned}&= \int_R \sqrt{a^2c^2\cos^4\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+a^4\cos^2\theta\sin^2\theta d\varphi\wedge d\theta}\\ &=2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\sqrt{c^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta d\theta}\\ &=4\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sqrt{c^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta d\theta}\\ &=4\pi a\int_0^1 \sqrt{c^2+\left(a^2-c^2\right)x^2 dx}\\ &=4\pi ac\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(\frac{a}{c}\right)^2-1\right)x^2dx}\end{aligned}$$

Nu går det forskelligt, eftersom $a > c$, $a = c$ eller $a < c$. $a = c$ er en kugleflade, så det ser vi bort fra.

$a > c$. Vi substituerer $y = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1x} = \alpha x$ i integralet, som derved bliver

$$= \frac{4\pi ac}{\alpha}\int_0^\alpha \sqrt{1+y^2dy}$$

Nu substituerer vi $y = \sinh u$ og får i grænsen $\beta = \operatorname{Arsinh}\alpha$.

$$\begin{aligned}&= \frac{4\pi ac}{\alpha}\int_0^\beta \cosh^2 u du = \frac{4\pi ac}{\alpha}\int_0^\beta \frac{\cosh 2u+1}{2}du = \frac{4\pi ac}{\alpha}\left(\frac{\sinh 2\beta}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\\ &= \frac{\pi ac}{\alpha}2\sinh\beta\sqrt{1+\sinh^2\beta}+\frac{2\pi ac}{\alpha}\beta = 2\pi ac\sqrt{1+\left(\frac{a}{c}\right)^2-1}+\frac{2\pi ac}{\alpha}\beta\\ &= 2\pi a^2+\frac{2\pi ac^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{Arsinh}\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2-1}\end{aligned}$$

(Formlen for overfladen af en diskos.)

$a < c$. Vi substituerer $y = \sqrt{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2 x} = \alpha x$ i integralet, som derved bliver

$$= \frac{4\pi ac}{\alpha}\int_0^\alpha \sqrt{1-y^2dy}$$

Nu substituerer vi $y = \sin u$ og får i grænsen $\beta = \arcsin\alpha$.

$$\begin{aligned}&= \frac{4\pi ac}{\alpha}\int_0^\beta \cos^2 u du = \frac{4\pi ac}{\alpha}\int_0^\beta \frac{\cos 2u+1}{2}du = \frac{4\pi ac}{\alpha}\left(\frac{\sin 2\beta}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\\ &= \frac{\pi ac}{\alpha}2\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}+\frac{2\pi ac}{\alpha}\beta = 2\pi ac\sqrt{1-\left(1-\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)}+\frac{2\pi ac}{\alpha}\beta\\ &= 2\pi a^2+\frac{2\pi ac^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2}\end{aligned}$$

(Formlen for overfladen af en cigar.)

7. Eksakte og lukkede differentialformer.

For at bruge hovedsætningen på et problem som beregningen af

$$\int_F \omega$$

er det nærliggende at se efter to løsninger:

1) Find G, så $\partial G = F$, thi så er:

$$\int_F \omega = \int_G d\omega$$

2) Find π, så $d\pi = \omega$, thi så er:

$$\int_F \omega = \int_{\partial F} \pi$$

I § 1 fandt vi den nødvendige betingelse for 1), at

$$\partial F = \partial\partial G = \emptyset$$

Analogt fandt vi i § 5 den nødvendige betingelse for 2), at

$$d\omega = 0$$

Vi definerer følgende begreber:

En form, ω, kaldes *lukket,* hvis $d\omega = 0$.

En form, ω, kaldes *eksakt,*, hvis der findes en form, π, så $\omega = d\pi$.

Sætning. *Enhver eksakt form er lukket.*

Spørgsmålet er, hvornår en lukket form er eksakt.

Svaret afhænger – ligesom svaret på det tilsvarende spørgsmål for fladerne – af det område, hvorpå formen betragtes.

Hovedreslutatet er, at på et "pænt" område er enhver lukket form eksakt. Et "pænt" område er uden huller, jvf. eksemplet i § 3.

Poincaré's lemma. *På et interval, I, er enhver lukket p–form, ω, hvor $p \geq 1$, tillige eksakt.*

Bevis:. Lad

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

og lad $x_0 \in I$ være et punkt, $x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n})$. Vi betragter nu de led, hvor dx_1 forekommer, typisk

$$f_{1 i_2 \ldots i_p} dx_1 \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Vi danner funktionerne for hver af dem,

$$g_{1 i_2 \ldots i_p}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{x_{01}}^{x_1} f_{1 i_2 \ldots i_p}(t, x_2, \cdots, x_n)\, dt$$

Da er

$$\frac{\partial g_{1i_2\dots i_p}}{\partial x_1} = f_{1i_2\dots i_p}$$

Derfor vil

$$d\left(g_{1i_2\dots i_p} dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) = f_{1i_2\dots i_p} dx_1 \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} + \cdots$$

flere led, der ikke indeholder dx_1.

Vi definerer nu formen

$$\pi_1 = \sum_{1 \le i_2 < \cdots < i_p \le n} g_{1i_2\dots i_p} dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Da vil formen

$$\omega_1 = \omega - d\pi_1$$

kun indeholde led uden dx_1. Samtidig gælder stadig, at

$$d\omega_1 = d\omega - dd\pi_1 = 0$$

Vi kan nu skrive formen

$$\omega_1 = \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} f^1_{i_1\dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Heraf findes, at $d\omega_1$ indeholder led af formen

$$\frac{\partial f^1_{i_1\dots i_p}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Men da $d\omega_1 = 0$ og dx_1 ikke forekommer blandt $dx_{i_1}, \cdots, dx_{i_p}$, må koefficientern være 0. Det vil sige, at $f^1_{i_1\dots i_p}$ er uafhængig af x_1.

Vi kan derfor finde en form, π_2, så

$$\omega_2 = \omega_1 - d\pi_2$$

og ω_2 er lukket og uafhængig af x_2. Vi fortsætter sådan og ender med

$$\omega_{n-p+1} = \sum_{n-p+1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} f^{n-p+1}_{i_1\dots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = 0$$

da der må være gentagelser blandt $dx_{i_1}, \cdots, dx_{i_p}$. Altså er

$$\omega = d\pi_1 + d\pi_2 + \cdots + d\pi_{n-p+1}$$

Eksempel.

Lad os betragte formen i $\mathbb{R}^3$

$$\omega = z^3 dy \wedge dz + y dx \wedge dz + \left(\frac{1}{y} + z\right) dx \wedge dy$$

som opfylder $d\omega = 0$. Vi integrerer de to udtryk, der indeholder dx:

$$\int y dx = yx \quad \text{og} \quad \int \left(\frac{1}{y} + z\right) dx = x\left(\frac{1}{y} + z\right)$$

Så dannes formen

$$\pi_1 = yxdz + x\left(\frac{1}{y} + z\right) dy$$

Nu er

$$d\pi_1 = xdy \wedge dz + ydx \wedge dz + \left(\frac{1}{y} + z\right) dx \wedge dy + xdz \wedge dy = ydx \wedge dz + \left(\frac{1}{y} + z\right) dx \wedge dy$$

da $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$.

Altså er

$$\omega_1 = \omega - d\pi_1 = z^3 dy \wedge dz$$

Vi finder $\int z^3 dy = z^3 y$, så vi får $\omega_1 = d\pi_2$, hvor $\pi_2 = z^3 ydz$. Men så er

$$\begin{aligned}\omega =& d(\pi_1 + \pi_2) = d\left(z^3 ydz + x\left(\frac{1}{y} + z\right) dy + yxdz\right) \\ =& d\left(x\left(\frac{1}{y} + z\right) dy + y\left(z^3 + x\right) dz\right)\end{aligned}$$

Lad nu F være en halvkugleflade med centrum i $(0, 2, 1)$, radius 1 og defineret ved, at $x \geq 0$. Så er randen, ∂F, en cirkel, C, med centrum i $(2, 1)$ i (y, z)–planen og radius 1.

$$\int_F \omega = \int_C (\pi_1 + \pi_2) = \int_C \left(x\left(\frac{1}{y} + z\right) dy + y\left(z^3 + x\right) dz\right) = \int_C yz^3 dz$$

Men C er tillige rand af cirkelskiven, D, så vi får videre

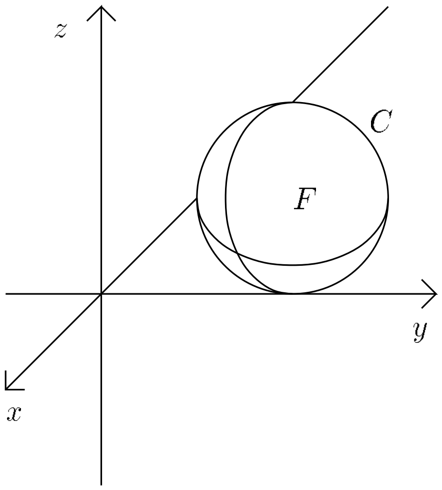
$$\int_F \omega = \int_D z^3 dy \wedge dz$$

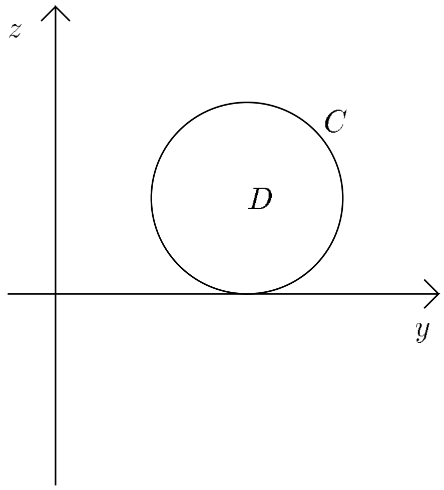
Skifter vi til polære koordinater,

$$\begin{aligned} z &= 1 + r\cos\theta \\ y &= 2 + r\sin\theta \end{aligned}$$

med Jacobi–determinanten, r, får vi videre

$$\begin{aligned}\int_F \omega =& \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r\cos\theta)^3 \, r dr d\theta \\ =& \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r + 3r^2\cos\theta + 3r^3\cos^2\theta + r^4\cos^3\theta\right) dr d\theta \\ =& \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos\theta + \frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{5}\cos^3\theta\right) d\theta \\ =& \pi + 0 + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta + 0 = \pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi\end{aligned}$$





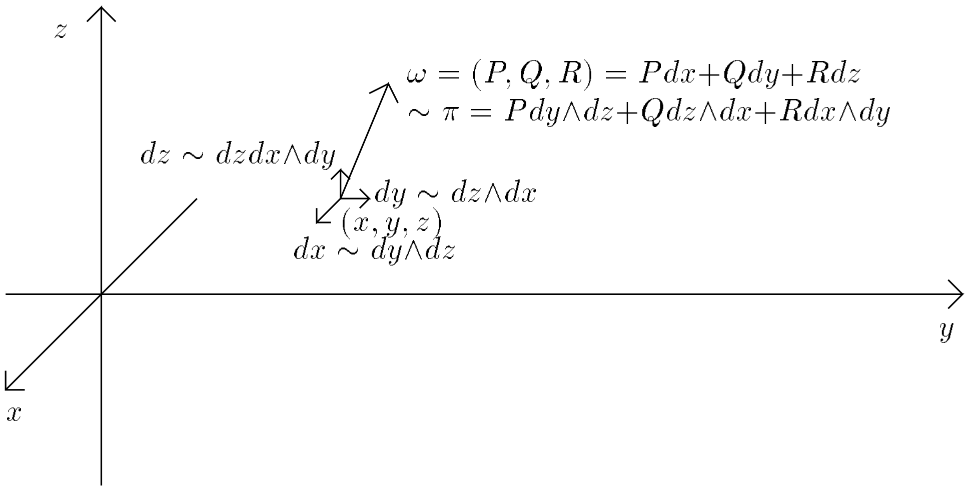
8. Fysikkens rum.

Rummet $\mathbb{R}^3$ betragtes i fysik som model for det rum, vi lever i. De fire typer af differentialformer opfattes som hhv. funktioner af $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, nemlig 0–former og 3–former, og som vektorfelter på $\mathbb{R}^3$, nemlig 1–former og 2–former.

Lader vi for kortheds skyld $\mathbb{C} = \mathbb{C}^2\left[\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right]$ betegne mængden af kontinuert differentiable funktioner af tre reelle variable ind i de reelle tal, så identificeres

$\mathbb{C} = \mathbb{C}_0\,,$	mængden	af 0–former
$\mathbb{C} = \mathbb{C}_3\,,$	–	af 3–former
$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}_1\,,$	–	af 1–former
$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}_2\,,$	–	af 2–former

idet vi opfatter basis i $\mathbb{C}_1$, dx, dy, dz, som lokale koordinater til feltvektoren i punktet, og tilsvarende basis i $\mathbb{C}_2$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$, som de samme koordinater.



Funktionen d har i fysikken 3 navne efter sit definitionsrum og sit dispositionsrum.

$$C_0 \xrightarrow[\nabla]{d} C_1 \xrightarrow[rot]{d} C_2 \xrightarrow[div]{d} C_3$$

kaldet hhv. "gradient" "rotation" "divergens"

Sætningen $dd = 0$ har derfor to former i fysik:

1) Rotationen af et gradientfelt er nul: $rot \circ \nabla = 0$.
2) Divergensen af et rotationsfelt er nul: $div \circ rot = 0$.

Poincaré's lemma siger, at i et interval er ethvert rotationsfrit vektorfelt et gradientfelt og ethvert divergensfrit vektorfelt et rotationsfelt.

Med brug af identifikationerne $dx \sim dy \wedge dz$ etc. taler man i fysikken om divergensen af et gradientfelt. Vi starter altså med en funktion, f, og får

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &\xrightarrow{\nabla} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \xrightarrow{\text{“id”}} \frac{\partial f}{\partial x}dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dx \wedge dy \\ &\xrightarrow{div} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dx \wedge dy \wedge dz \xrightarrow{\text{“id”}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Operatoren kaldes *Laplace* operatoren og skrives

$$\Delta = div \circ \nabla = div \circ grad$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En funktion, f, der opfylder

$$\Delta f = 0$$

kaldes *harmonisk.* Spørger vi, hvilke harmoniske funktioner, der findes, som er 0 på randen af en flade, bliver svaret, “kun 0”.

Thi vi betragter formen

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dx \wedge dy$$

Da er

$$\Delta f = d\omega$$

Tillige betragtes

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Det ses, at

$$df \wedge \omega = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Nu bruger vi Green's formel, hvor $p = 1$:

$$\int_F df \wedge \omega = \int_{\partial F} f \wedge \omega + \int_F f \wedge d\omega = 0 + 0$$

da $f = 0$ på ∂F og $d\omega = 0$ på F. Men da

$$g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \geq 0$$

kan vi af

$$\int_F g\,dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

slutte, at $g = 0$ på F. Altså er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

overalt, så f er konstant. Da $f = 0$ på ∂F, er denne konstant åbenbart 0.

Heraf følger, at i det indre af et område er en harmonisk funktion entydig bestemt ved sine værdier på randen. Thi differensen mellem to sådanne funktioner er harmonisk og 0 på randen.

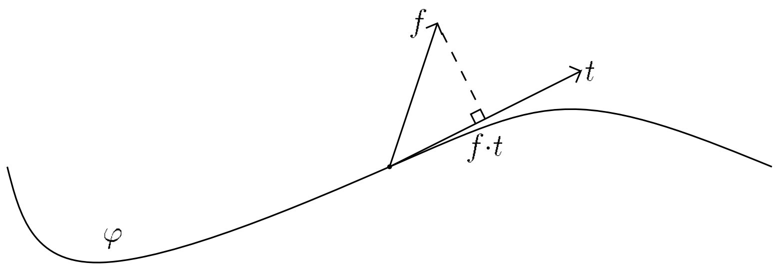
9. Strømme.

Lad der være givet et vektorfelt, $f = (f_x, f_y, f_z)$ i $\mathbb{R}^3$, samt en kurve, $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$.

Vi skal nu definere vektorfeltets *strøm langs kurven.* I et punkt af kurven findes tangenten,

$$t = \frac{\nabla\varphi}{||\nabla\varphi||}$$

Påvirkningen af feltet, f, i et punkt fås som projektionen af f på tangenten, $f \cdot t$:



Har kurven længde, ℓ, og vælger vi den kanoniske parameterfremstilling, $\psi(s)$, med $||\psi'(s)|| = 1$, defineres *strømmen* som

$$\int_0^\ell (f \cdot \nabla\psi) ds$$

Nu er det jo

$$= \int_0^\ell \left(f_x\psi_x' + f_y\psi_y' + f_z\psi_z'\right) ds = \int_K \omega, \text{ hvor } \omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Hvis feltet er et kraftfelt, kaldes strømmen langs kurven for feltets *arbejde* på en partikel, der bevæger sig ad kurven. Kraftfeltet kaldes *konservativt,* hvis dette arbejde kun afhænger af kurvens endepunkter, altså er uafhængigt af den valgte bane.

Hvis feltet er konservativt, så gælder åbenbart, at arbejdet eller strømmen langs en lukket kurve er $= 0$. Ser vi specielt på en kurve, der er rand af en flade, så siger hovedsætningen, at integralet af feltets rotation over fladen også er $= 0$. Da dette gælder for enhver begrænset flade, må feltets rotation selv være $= 0$:

$$d\omega = 0$$

Poincaré's lemma siger nu, at feltet må være et gradientfelt, altså at der findes en funktion (skalarfelt, 0–form), $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, så

$$\begin{aligned} &d\varphi = \omega \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_z. \end{aligned}$$

Funktionen φ kaldes *potentialet* af kraftfeltet, og kraftfeltet kaldes et *potentialfelt,* når der findes et potential.

F. eks. et tyngdefelt fra en "sol" i (0,0,0):

$$f = -\frac{(x, y, z)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

den tilsvarende 1–form (med $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) er

$$\omega = -\frac{x}{r^3}dx - \frac{y}{r^3}dy - \frac{z}{r^3}dz$$

Vi finder rotationen

$$rot f = d\omega = 3\frac{xy}{r^5}dy \wedge dx + 3\frac{yx}{r^5}dx \wedge dy + \cdots = 0$$

Altså er tyngdefeltet konservativt. Vi søger

$$-\int \frac{x}{r^3}dx$$

Vi substituerer $v = x^2 + y^2 + z^2$, $dv = 2xdx$:

$$= -\frac{1}{2}\int v^{\frac{3}{2}}dv = v^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Det ses, at

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

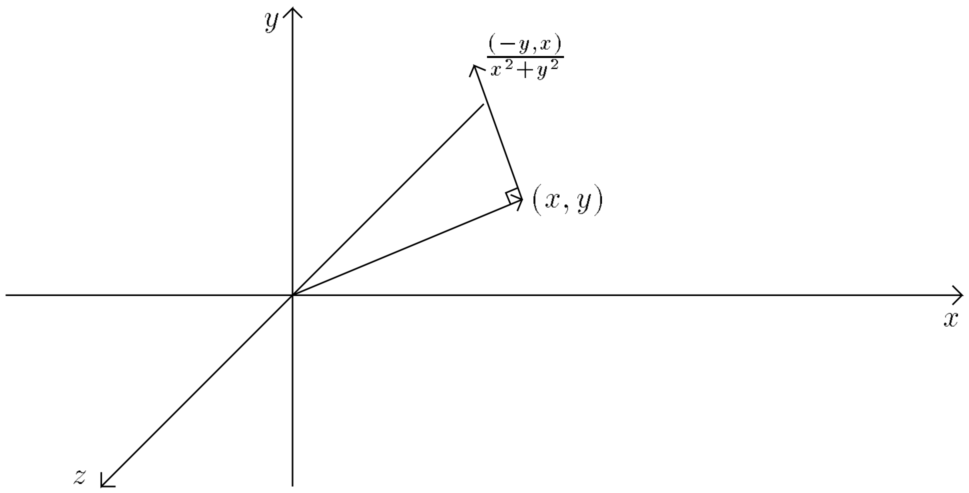
er potentialet af tyngdefeltet, $d\varphi = \omega$.

Solen udfører altså intet arbejde på Jorden, når denne gennemløber et årsomløb.

I almindelighed kaldes strømmen af et felt langs en lukket kurve for feltets *cirkulation* langs kurven. Et felt er altså konservatlivt, hvis og kun hvis dets cirkulation langs enhver lukket kurve er nul.

En elektrisk strøm ad z–aksen skaber et magnetfelt i (x, y)–planen,

$$f = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$$



Den tilsvarende 1–form, ω, er

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Men her er

$$d\omega = 2 \frac{y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy$$

så formen er ikke lukket eller eksakt. Cirkulationen langs en cirkel med radius, r, og positiv omløbsretning er

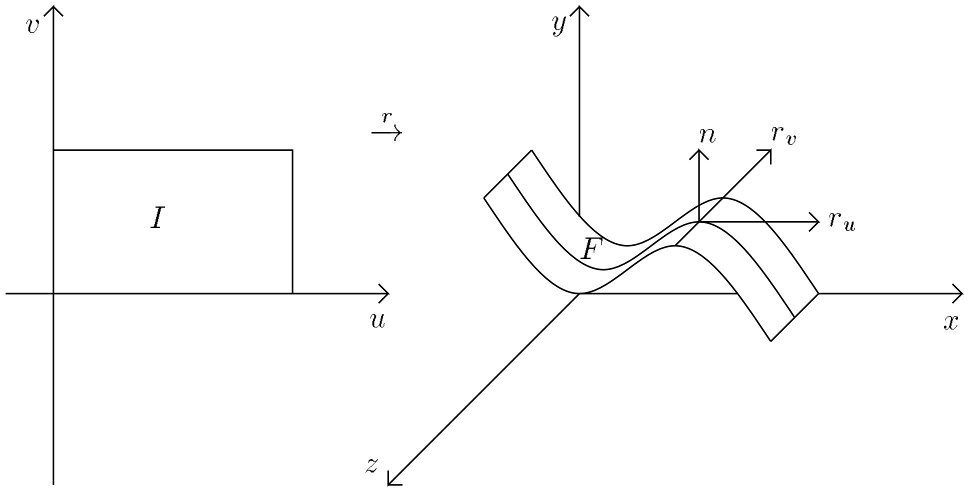
$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin\theta}{r^2} (-r \sin\theta) + \frac{r \cos\theta}{r^2} (r \cos\theta) \right) d\theta = 2\pi$$

Bemærk, at cirkulationen er uafhængig af radius, r.

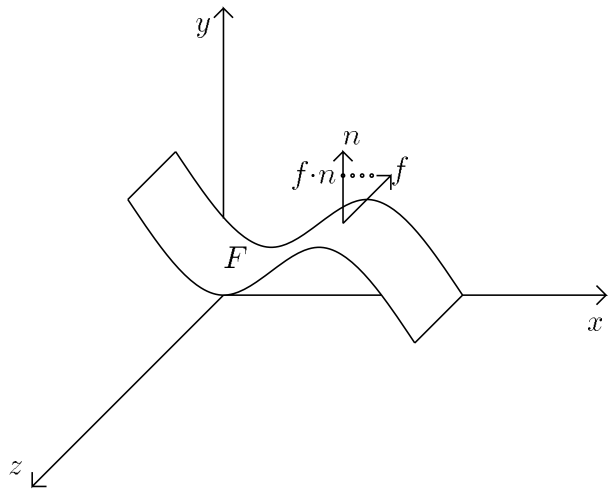
Strøm gennem en flade. Vi har et vektorfelt, f, i $\mathbb{R}^3$, samt en flade, F: $r : (u, v) \in I \to r(u, v) \in \mathbb{R}^3$, hvor I er et interval.

Vi skal nu definere vektorfeltets *strøm gennem fladen.* I et punkt på fladen findes normalen som

$$n = \frac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}$$



Strømmen i punktet fås som projektionen af feltvektoren, f, på fladenormalen, n, altså som $f \cdot n$



Den samlede strøm gennem fladen, F, defineres som

$$\int_F (f \cdot n) ds$$

hvor ds står for fladearealet.

Dette integral kan også opfattes som integralet af en 2–form over fladen, nemlig formen

$$\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$

hvor $f = (f_1, f_2, f_3)$. Thi

$$\int_F \omega =$$

$$\int_I \left(f_1 \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + f_2 \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) + f_3 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right) du \wedge dv$$

$$= \int_I f \cdot (r_u \times r_v) \, du \wedge dv$$

som jo kan tolkes som (idet $ds = ||r_u \times r_v||\, du \wedge dv$)

$$\int_I \frac{f \cdot (r_u \times r_v)}{||r_u \times r_v||} ||r_u \times r_v||\, du \wedge dv = \int_F f \cdot n ds$$

Er f specielt et *rotationsfelt,* dvs. der findes et felt, g, med tilsvarende 1–form

$$\pi = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$$

så f er feltet svarende til 2–formen

$$d\pi = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

da gælder jo

$$\int_{\partial F} \pi = \int_F d\pi$$

Altså: Cirkulationen af et felt, f, langs randen af fladen, F, er lig med strømmen af feltets rotation, $rot f$, gennem fladen, F.

Er fladen, F, selv rand af et legeme, V, så siger hovedsætningen, at med $\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$ er

$$\int_F \omega = \int_V d\omega = \int_V div f$$

Altså: Strømmen af et felt gennem randen af et legeme er lig med integralet af feltets divergens over legemet.

Eksempel. Tyngdefeltets strøm gennem en kugleflade, S, med radius, R. Feltet giver 2–formen

$$\omega = -\frac{1}{r^3}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$$

Kuglefladen har parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= R \cos\varphi \cos\theta \\ y &= R \sin\varphi \cos\theta \\ z &= R \sin\theta \end{aligned}$$

hvor (φ, θ), $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Derfor er

$$\int_S \omega = \int_I (-\cos\theta) d\varphi \wedge \theta = -2\pi \cdot 2 = -4\pi$$

Strømmen gennem kuglefladen er rettet mod centrum og af størrelse $\frac{1}{r^2}$. Den samlede strøm gennem en kugleflade med arealet $4\pi r^2$ er 4π, uafhængig af kuglens radius.

10. Eksempler.

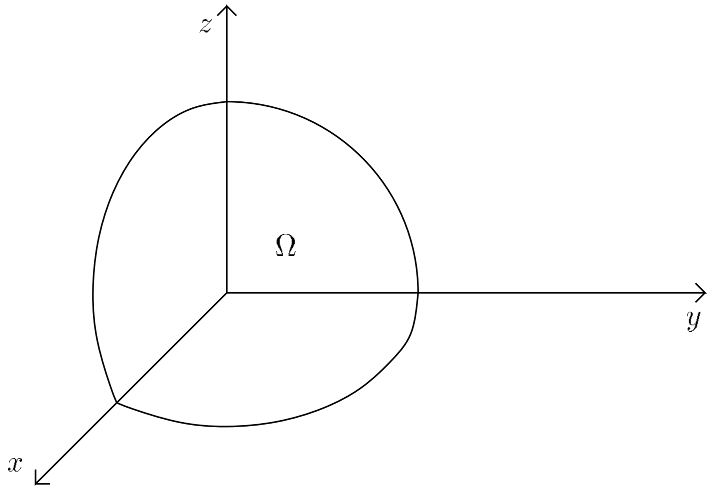
1. Lad som et eksempel være givet en flade, S, som randen af området

$$\Omega = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$$

Desuden er der givet et vektorfelt

$$\omega = 3x^2y dy \wedge dz + 3xy^2 dz \wedge dx + 3xyz dx \wedge dy$$

Vi skal beregne strømmen af vektorfeltet ud gennem fladen.



Ω kan parameterfremstilles som

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\cos\theta \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

hvor (r,φ,θ), $\quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Vi kan beregne strømmen direkte. Vi betragter hver af fladerne (der er 4) for sig. På fladerne, hvor $x = 0$ eller $y = 0$, er $\omega = 0$, så der er ingen strøm. På fladen, hvor $z = 0$, er $\omega = 3x^2y dy \wedge dz + 3xy^2 dz \wedge dx$, men her er $dz = 0$, så $\omega = 0$ alligevel. Tilbage er blot kuglefladestykket. Her er $r = 1$. Vi får først

$$\begin{aligned} dx &= -\sin\varphi\cos\theta d\varphi - \cos\varphi\sin\theta d\theta \\ dy &= \cos\varphi\cos\theta d\varphi - \sin\varphi\sin\theta d\theta \\ dz &= \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

Dernæst findes

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= \cos\varphi\cos^2\theta d\varphi \wedge d\theta \\ dz \wedge dx &= \sin\varphi\cos^2\theta d\varphi \wedge d\theta \\ dx \wedge dy &= \cos\theta\sin\theta d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

Altså er strømmen pr. definition (idet $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$):

$$\begin{aligned}\int_S \omega =& 3 \int_I \left(\cos^2\varphi \cos^2\theta \sin\varphi \cos\theta \cos\varphi \cos^2\theta + \cos\varphi \cos\theta \sin^2\varphi \cos^2\theta \sin\varphi \cos^2\theta \right.\\ &\left. + \cos\varphi \cos\theta \sin\varphi \cos\theta \sin\theta \cos\theta \sin\theta\right) d\varphi \wedge d\theta \\ =& 3 \int_I \left(\left(\cos^3\varphi \sin\varphi + \sin^3\varphi \cos\varphi\right) \cos^5\theta + \cos\varphi \sin\varphi \cos^3\theta \sin^2\theta\right) d\varphi \wedge d\theta \\ =& 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{3}{2} \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = 1\end{aligned}$$

Men vi kunne slippe billigere ved hjælp af hovedsætningen (med $K = [0,1] \times I$):

$$\begin{aligned}\int_S \omega = \int_\Omega d\omega =& \int_\Omega 15xydx \wedge dy \wedge dz \\ =& 15 \int_K r\cos\varphi \cos\theta r \sin\varphi \cos\theta r^2 \cos\theta dr \wedge d\varphi \wedge d\theta \\ =& 15 \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \\ =& 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_O^1 \left(1 - x^2\right) dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1\end{aligned}$$

2. Et andet eksempel er en flade, S, der er rand af et område, Ω, hvor

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 1\right\}$$

Lad ω være differentialformen

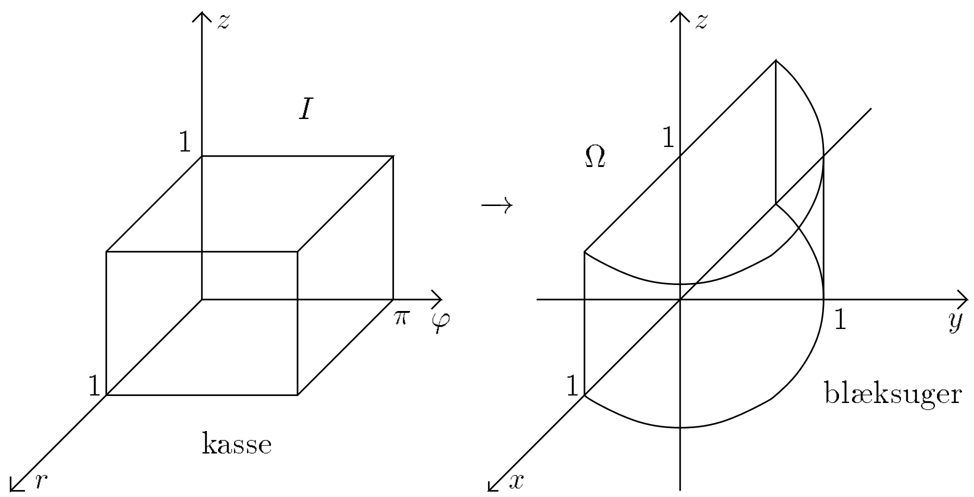
$$\omega = xydy \wedge dz + (xyz)^2 dz \wedge dx + dx \wedge dy$$

Beregn strømmen af ω gennem S.

Vi giver Ω en parameterfremstilling

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

hvor (r, φ, z), $\quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 1.$



Vi kan beregne strømmen direkte. Nu er S delt i 4 flader, svarende til hhv. $r=1$, $y=0$, $z=0$ og $z=1$. (Blæksugerens trækpapir, håndtagsside og to sider.)

På siderne $z=0$ og $z=1$ er $dz=0$, så formen reduceres til

$$\omega = dx \wedge dy$$

Da denne form er den samme på de to sider, og siderne har modsat orientering, må de to integraler gå ud mod hinanden.

På siden $y=0$ er $dy=0$, så formen reduceres til

$$\omega = (x \cdot 0 \cdot z)^2 dz \wedge dx = 0$$

Dette integral er altså $= 0$.

Tilbage er trækpapirsiden, $r=1$. Parameterfremstillingen er heraf

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi \\ y &= \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

hvor $(1,\varphi,z)$, $\quad 0 \le \varphi \le \pi$, $\quad 0 \le z \le 1$.

de tre former er hhv.

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= \cos\varphi d\varphi \wedge dz \\ dz \wedge dx &= \sin\varphi d\varphi \wedge dz \\ dx \wedge dy &= 0 \end{aligned}$$

Formen ω transformaeres til

$$\omega = \cos\varphi \sin\varphi z \cos\varphi d\varphi \wedge dz + (\cos\varphi \sin\varphi z)^2 \sin\varphi d\varphi \wedge dz$$

Integralet over fladen er derfor

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_0^1 z dz \cdot \int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi + \int_0^1 z^2 dz \cdot \int_0^\pi \cos^2\varphi \sin^3\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^1 x^2\left(1-x^2\right) dx = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

Også denne opgave kan løses med brug af hovedsætningen:

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_\Omega d\omega = \int_\Omega \left(yz + 2x^2yz^2\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_I \left(r\sin\varphi z + 2r^2\cos^2\varphi r \sin\varphi z^2\right) r dr \wedge d\varphi \wedge dz \\ &= \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 z dz + \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 z^2 dz \\ &= \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

11. Højere ordens ordinære differentialligninger.

Selv en 2. ordens differentialligning som

$$\varphi''(x) - a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = 0$$

kan ikke løses i almindelighed. Men der er et trick til at finde den anden løsning, hvis man kender den ene. Lad φ og ψ være to løsninger. Vi vil nu undersøge, om de er forskellige, dvs. ikke proportionale. Hvis de ikke er det, vil kvotienten ikke være konstant, så vi differentierer kvotienten:

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi\psi' - \psi\varphi'}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi^2}\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' \\ \psi & \psi' \end{vmatrix}$$

Den indgående determinant kaldes *Wronski determinanten,*

$$W(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' \\ \psi & \psi' \end{vmatrix}$$

som har den interessante afledede,

$$W'(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \varphi' & \varphi' \\ \psi' & \psi' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi & \varphi'' \\ \psi & \psi'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & \varphi'' \\ \psi & \psi'' \end{vmatrix}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} W'(\varphi, \psi) - a(x)W(\varphi, \psi) &= \begin{vmatrix} \varphi & \varphi'' \\ \psi & \psi'' \end{vmatrix} - a(x)\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' \\ \psi & \psi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & \varphi'' - a(x)\varphi' \\ \psi & \psi'' - a(x)\psi' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \varphi & -b(x)\varphi \\ \psi & -b(x)\psi \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Men så er enten $W \equiv 0$, og dermed de to løsninger proportionale, eller $W \neq 0$ overalt, og de to løsninger forskellige. Tilmed kan W findes af differentialligningen alene som

$$W = \alpha e^{\int a(x)dx}$$

Definitionen af W giver nu ψ for φ kendt som løsning til

$$\psi' - \frac{\varphi'}{\varphi}\psi = \frac{W}{\varphi}$$

altså

$$\psi = \varphi \int \frac{W}{\varphi^2} dx$$

Eksempel.

$$\varphi''(x) + 2\tan(x)\varphi'(x) - \varphi(x) = 0$$

W løser

$$W' + 2\tan W = 0$$

så vi finder

$$W(x) = e^{-\int 2\tan x\, dx} = e^{2\ln\cos x} = \cos^2 x$$

Har vi gættet løsningen $\varphi(x) = \sin x$, finder vi den anden løsning

$$\psi(x) = \sin x \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \sin x(-\cot x - x) = -x\sin x - \cos x$$

12. Højere ordens ordinære differentialligninger med konstante koefficienter.
Hvis koefficienterne er konstante, kan ligningerne principielt altid løses. Lad D betegne differentialoperatoren,

$$D\varphi = \varphi'$$

Så vil differentialoperatorer af formen

$$D - \alpha D^0$$

kommutere, og ved sammensætning af flere fås

$$\left(D - \alpha_1 D^0\right) \cdots \left(D - \alpha_n D^0\right) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 D^0$$

Med andre ord, operatoren til højre kan spaltes til operatorsammensætningen til venstre, hvor α_i er rødderne i polynomiet

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

regnet med multiplicitet. Dette polynomium kaldes derfor operatorens *karakteristiske polynomium.*
En differentialligning af formen

$$\left(D - \alpha_1 D^0\right) \cdots \left(D - \alpha_n D^0\right) \varphi = \psi$$

løses ved sukcessivt at løse de enkelte 1. ordens inhomogene ligninger. Den generelle løsning til den homogene ligning fås, hvis polynomiet spaltes som

$$(x - \alpha_1)^{\mu_1} \cdots (x - \alpha_m)^{\mu_m}$$

med $\sum_{j=1}^{m} \mu_j = n$, på formen

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(x) e^{\alpha_j x}$$

hvor $p_j(x)$ er et vilkårligt polynomium af grad højst $\mu_j - 1$.

13. Cayley–Hamilton's sætning.
Lad A være en $n \times n$–matrix, $A = (a_{ij})$. Så kan determinanten beregnes ved udvikling efter en søjle eller række, dvs.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A^{(i,j)}$$

hvor $A^{(i,j)}$ er det (i,j)–te komplement, dvs. matricen dannet ved udeladelse af den i–te række og den j–te søjle fra matricen A. Det betyder, at hvis vi definerer en matrix $B = (b_{jk})$ som

$$b_{jk} = (-1)^{k+j} \det A^{(k,j)}$$

så har vi fundet den inverse til matricen A, forudsat at den findes. I det mindste kan vi skrive

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik} \det A$$

eller, i matrix form,

$$AB = (\det A) E.$$

Vi har udledt diagonalen, men nullerne kommer fra den kendsgerning, at hvis $i \neq k$, så svarer det til erstatning af den k–te række med den i–te, i hvilket tilfælde matricen bliver singulær og derfor determinanten nul.

(I fald matricen A er regulær, kan vi finde den inverse ved at dividere med $\det A$.)

I formlen skal vi udnytte, at elementerne i matricen B findes som produkter af elementerne fra A.

Nu kan vi formulere og bevise

Cayley–Hamilton's sætning. *Hvis*

$$p(\xi) = \det(\xi E - A) = \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_0$$

er det karakteristske polynomium for matricen A, så er matricen $p(A)$ nulmatricen:

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 E = 0$$

Bevis. Vi anvender formlen ovenfor på matricen $\lambda E - A$ og får

$$p(\lambda)E = (\lambda E - A)\, B(\lambda)$$

hvor $B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$ er en matrix af polynomier i λ, defineret som det (i,j)–te komplement af matricen $\lambda E - A$. Derfor kan vi skrive

$$B(\lambda) = \lambda^{n-1} B_{n-1} + \cdots + \lambda B_1 + B_0$$

som et polynomium i λ med koefficienter, som er matricer, der er uafhængige af λ.

For et vilkårligt $k \geq 1$ kan vi skrive

$$A^k - \lambda^k E = (A - \lambda E)\left(A^{k-1} + \lambda A^{k-2} + \cdots + \lambda^{k-1} E\right)$$

Derfor kan vi skrive

$$\begin{aligned} p(A) - p(\lambda)E &= A^n - \lambda^n E + a_{n-1}\left(A^{n-1} - \lambda^{n-1}E\right) + \cdots + a_1\left(A^1 - \lambda^1 E\right) \\ &= (A - \lambda E)\, C(\lambda) = (A - \lambda E)\left(\lambda^{n-1}E + \lambda^{n-2}C_{n-2} + \cdots + C_0\right) \end{aligned}$$

hvor $C(\lambda)$ er et polynomium i λ med koefficienter, som er matricer, der er uafhængige af λ.

Lægger vi de to udtryk sammen, får vi

$$\begin{aligned} p(A) &= (A - \lambda E)(C(\lambda) - B(\lambda)) \\ &= (A - \lambda E)\left(\lambda^{n-1}(E - B_{n-1}) + \cdots + \lambda(C_1 - B_1) + C_0 - B_0\right) \\ &= \lambda^{k+1}(B_k - C_k) + \lambda^k (B \cdots \end{aligned}$$

hvor k er graden af den anden faktor til højre.

Men dette polynomium i λ kan kun være konstant, dvs. uafhængigt af λ, hvis den anden faktor er nul. Men så er det hele nul, altså $p(A) = 0$.

14. Systemer af lineære differentialligninger med konstante koefficienter.

Et system af lineære differentialligninger af 1. orden med konstante koefficienter kan skrives som

$$
\begin{aligned}
\varphi_1' &= a_{11}\varphi_1 + a_{21}\varphi_2 + \cdots + a_{n1}\varphi_n \\
\varphi_2' &= a_{12}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 + \cdots + a_{n2}\varphi_n \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\
\varphi_n' &= a_{1n}\varphi_1 + a_{2n}\varphi_2 + \cdots + a_{nn}\varphi_n
\end{aligned}
$$

Det bliver mere overskueligt på matrixform, idet vi sætter

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

og definerer søjlevektorfunktionen

$$
\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)^*
$$

kan vi skrive systemet på den bekvemme form

$$
\varphi' = A\varphi
$$

For $j = 0, \cdots n$ er jo $\varphi^{(j)} = A^j\varphi$, så hvis $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ er det karakteristiske polynomium for matricen A, så siger Cayley–Hamilton's sætning, at

$$
\varphi^{(n)} + a_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \cdots + a_0\varphi = p(A)\varphi = 0
$$

Med andre ord, hver af funktionerne i systemet tilfredsstiller den højere ordens differentialligning, der har samme karakteristiske polynomium som koefficientmatricen for systemet.

Eksempel.

Systemet

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y - z \\
\dot{y} &= z - x \\
\dot{z} &= x - y
\end{aligned}
$$

Man ser straks, at, da $(x + y + z)' = 0$, må summen af de 3 funktioner være en konstant, $x + y + z = k$. Efter et øjeblik, ser man også, at

$$
\left(x^2 + y^2 + z^2\right)' = 0
$$

så også $x^2 + y^2 + z^2 = h$ er konstant. Men hvad er løsningerne? Umiddelbart ses, at $x = y = z = k$, hvor k er en konstant, løser ligningerne.

På matrixform ser ligningerne sådan ud:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomium for matricen er $\xi^3 + 3\xi$ med rødderne 0 og $\pm i\sqrt{3}$. Roden 0 svarer til den konstante løsning. De andre reelle løsninger må være kombinationer af $\sin\sqrt{3}t$ og $\cos\sqrt{3}t$. Ikke enhver kombination dur, man må løse de 6 ligninger i de 6 koefficienter, man får ved at indsætte i systemet. En løsning er, – hvor k er en vilkårlig konstant:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(\sqrt{3}t) + 2\sin(\sqrt{3}t) + k \\ y(t) &= \left(\sqrt{3}-1\right)\cos(\sqrt{3}t) - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin(\sqrt{3}t) + k \\ z(t) &= -\left(\sqrt{3}+1\right)\cos(\sqrt{3}t) + \left(\sqrt{3}-1\right)\sin(\sqrt{3}t) + k \end{aligned}$$

15. To koblede lineære differentialligninger med konstante koefficienter.

Lad os betragte et system af 2 funktioner,

$$\begin{aligned} \varphi' &= a\varphi + b\psi \\ \psi' &= c\varphi + d\psi \end{aligned}$$

Da er det karakteristiske polynomium

$$p(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = (x-\alpha)(x-\beta)$$

hvor

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} = \Theta \pm \sqrt{\Delta}$$

med $\Theta = \frac{a+d}{2}$ og $\Delta = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc$.

Løsningerne er derfor linearkombinationer af $e^{\alpha x}$ og $e^{\beta x}$ evt. $xe^{\alpha x}$.

Løsningerne skrives bekvemt som summer af produkter af

$$\vartheta(x) = e^{\Theta x}$$

og enten

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sinh(\sqrt{\Delta}x) & \text{for } \Delta > 0, \\ x & \text{for } \Delta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\sin(\sqrt{-\Delta}x) & \text{for } \Delta < 0. \end{cases}$$

eller

$$\dot{\delta}(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{\Delta}x) & \text{for } \Delta > 0, \\ 1 & \text{for } \Delta = 0, \\ \cos(\sqrt{-\Delta}x) & \text{for } \Delta < 0. \end{cases}$$

Thi hvis startværdierne skal være $(\varphi(0), \psi(0)) = (u, v)$ vil vektoren

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \theta(x)\left(\dot{\delta}(x)E + \delta(x)(A - \Theta E)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

løse opgaven. Det ses umiddelbart, at værdien i 0 er korrekt, og ved differentiation fås

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}' = \\
&\left(\dot{\theta}(x)\left(\dot{\delta}(x)E + \delta(x)(A - \Theta E)\right) + \theta(x)\left(\ddot{\delta}(x)E + \dot{\delta}(x)(A - \Theta E)\right)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\
&\left(\theta(x)\left(\dot{\delta}(x)\Theta E + \delta(x)\left(\Theta A - \Theta^2 E\right)\right) + \theta(x)\left(\Delta\delta(x)E + \dot{\delta}(x)(A - \Theta E)\right)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&= \left(\theta(x)\left(\dot{\delta}(x)A + \delta(x)\left(\Theta A + \left(\Delta - \Theta^2\right)E\right)\right)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&= \left(\theta(x)\left(\dot{\delta}(x)A + \delta(x)A(A - \Theta E)\right)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&= A\left(\theta(x)\left(\dot{\delta}(x)E + \delta(x)(A - \Theta E)\right)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet Cayley–Hamilton, at

$$A^2 - 2\Theta A + (\Theta^2 - \Delta)E = 0$$

Spørgsmålet om stabilitet, dvs. at alle løsninger nærmer sig den stationære løsning $(\varphi(x), \psi(x)) = (0, 0)$ besvares af formerne $e^{\alpha x}$. Der er stabilitet, hvis og kun hvis alle realdele er negative.

Dvs. at $a + d < 0$ i tilfælde af negativ diskriminant, $\Delta < 0$, mens vi må have ulighederne

$$\Theta \pm \sqrt{\Delta} < 0$$

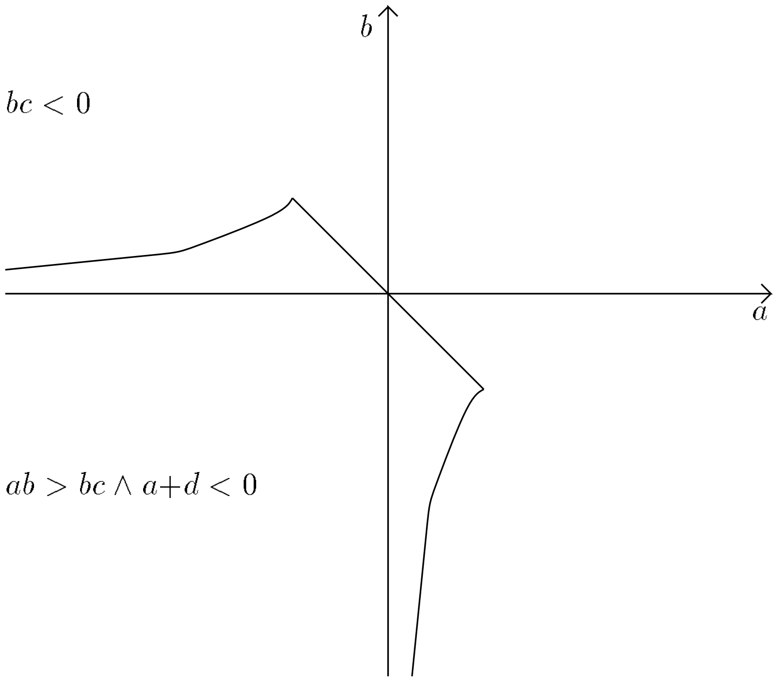
ellers. Dvs. både $a + d < 0$ og $\Delta < \Theta^2$. Indsættes værdierne fås

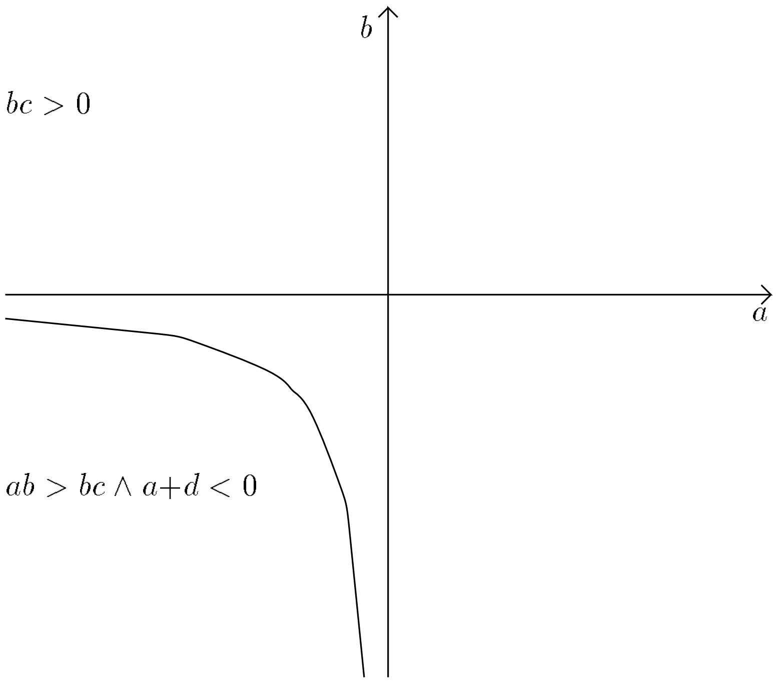
$$\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc < \left(\frac{a+d}{2}\right)^2$$

som reduceres til

$$bc < ad$$

Vi kan illustrere betingelserne grafisk i en (a, d)–plan:


b
bc < 0
a
ab > bc ∧ a+d < 0


b
bc > 0
a
ab > bc ∧ a+d < 0

16. Opgaver.

1. Bestem differentialerne, (divergens og rotation) af følgende differentialformer (vektorfelter)

a)

$$\left(x^2+yz\right)dy\wedge dz+\left(y^2+xz\right)dz\wedge dx+\left(z^2+xy\right)dx\wedge dy$$

hhv.

$$\left(x^2+yz\right)dx+\left(y^2+xz\right)dy+\left(z^2+xy\right)dz$$

b)

$$(x+\arctan y)dy\wedge dz+(3x-z)dz\wedge dx+2^{yz}dx\wedge dy$$

hhv.

$$(x+\arctan y)dx+(3x-z)dy+2^{yz}dz$$

c)

$$\ln(1+xz)dy\wedge dz+(y+\arcsin x)dz\wedge dx+(z-2x)dx\wedge dy$$

hhv.

$$\ln(1+xz)dx+(y+\arcsin x)dy+(z-2x)dz$$

2. Hvilke former i opgave 1 er lukkede hhv. eksakte? Find stamformer til de eksakte blandt formerne.

3. I $\mathbb{R}^2$ er 1–formen ω defineret ved

$$\omega=(x+y)dx+(y-x)dy$$

Beregn kurveintegralet

$$\oint_k \omega$$

når k er hver af kurverne

a) liniestykket fra $(0,0)$ til $(1,2)$,
b) parabelbuen $y=x^2,\ 0\le x\le 1$,
c) halvcirklen $x^2+y^2=1,\ y\ge 0$,
d) randen af trekanten med hjørnerne $(1,0),\ (2,0),\ (2,1)$. P.S. Fortegnet afhænger af gennemløbsretningen.

4. Beregn cirkulationen af

$$\omega=-ydx+xdy$$

langs enhedscirklen i positiv omløbsretning.

5. Givet 1–formen

$$\omega=(x+y)dx+\left(x-y^2\right)dy$$

Vis, at formen er eksakt og find potentialet. Beregn for enhver kurve, k, fra $(1,0)$ til $(0,1)$

$$\oint_k \omega$$

6. Lad $x+y>0$. Vis, at 1–formen

$$\omega=\frac{y}{(x+y)^2}dx-\frac{x}{(x+y)^2}dy$$

er eksakt og bestem potentialet.

7. Bestem tallet, a, således, at der findes en funktion, $f(x, y)$, med

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ax^2y + y^2 - 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2xy - 1$$

8. Lad k være cirklen $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Beregn

$$\oint_k (x + y)dx + (y - x)dy$$

direkte og med brug af hovedsætningen.

9. Beregn for en lukket kurve, k,

$$\oint_k y^2dx + xdy$$

hvor k er

a) randen af kvadratet med hjørner $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$,
b) cirklen med centrum $(0, 0)$ og radius 2,
c) randen af kvadratet med hjørner $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

10. Lad F betegne fladen $2x + 2y + 2z = 6$, der afskæres af koordinatplanerne, dvs. alle variable er positive. Beregn strømmen gennem fladen bort fra $(0, 0, 0)$ af vektorfeltet

$$\omega = xydy \wedge dz - x^2dz \wedge dx + (x + z)dx \wedge dy$$

11. Lad F betegne delfladen af cylinderen $x^2 + y^2 = 16$, der afskæres af $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$ og har alle koordinater positive. Beregn strømmen ud fra cylinderen gennem fladen af feltet

$$\omega = zdy \wedge dz + xdz \wedge dx - 3y^2zdx \wedge dy$$

12. Lad F betegne fladen $z = xy$ i $\mathbb{R}^3$. Lad k være kurven, som cylinderen $x^2 + y^2 = 1$ afskærer på F. Lad endvidere g være vektorfeltet

$$g(x, y, z) = \big(x + y, x - y, y^2 + z\big)$$

Find strømmen af g gennem den del af F, som afskæres af k. Find cirkulationen af g langs k.

13. Lad F være randen af

$$A = \big\{(x, y, z)\,\big|\,x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\big\}$$

og lad ω være 2–formen

$$\omega = \big(x^2 + y^2\big)\,dy \wedge dz + \big(y^2 + z^2\big)\,dz \wedge dx + \big(x^2 + z^2\big)\,dx \wedge dy$$

Beregn strømmen af feltet gennem fladen,

$$\int_F \omega$$

14. Lad F være kuglefladen med centrum i $(3,-1,2)$ og radius 3, og lad ω være formen

$$\omega = \left(2x + \sqrt[3]{y^2+z^2}\right) dy \wedge dz - (\cosh(xz)+y) dz \wedge dx + \left(y^2+2z\right) dx \wedge dy$$

Find strømmen af ω gennem F,

$$\int_F \omega$$

15. Lad F være randen af området, der begrænses af fladen

$$z = 4 - y^2$$

og planerne,

$$x = 0,\ \ x = 3,\ \ z = 0$$

og lad ω være formen

$$\omega = (\cos z - x) dy \wedge dz - xy dz \wedge dx + (e^y + 3z)\, dx \wedge dy$$

Find strømmen af ω gennem F,

$$\int_F \omega$$

16. Lad S være den lukkede flade, der begrænser området

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le 1 \wedge z \ge 0\right\}$$

Lad ω være formen

$$\omega = \left(2xy - xy^3 z\right) dy \wedge dz + \left(xyz - y^2\right) dz \wedge dx + \left(1 - \frac{xz^2}{2}\right) dx \wedge dy$$

Beregn strømmen af ω ud gennem S,

$$\int_S \omega$$

17. Lad k være liniestykket fra $(0,0)$ til $(\pi, 2\pi)$ i planen $\mathbb{R}^2$. Lad ω være formen

$$\omega = \left(\sin y + 2xy^3\right) dx + \left(x \cos y + 3x^2 y^2 + 1\right) dy$$

Beregn kurveintegralet

$$\oint_k \omega$$

18. En halv omdrejningsellipsoide, F, er givet ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta)$$

$(\varphi,\theta) \in [0,2\pi] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. En differentialform ω har fremstillingen

$$\omega = 3dy \wedge dz + 4dz \wedge dx + 2dx \wedge dy$$

Bestem

$$\int_F \omega$$

19. En flade, F, er defineret ved

$$F = \{(x,y,z)\,|2x + 3y + 6z = 6 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$$

En form ω er givet ved

$$\omega = e^{z-y} dz \wedge dx + e^{z-y} dx \wedge dy$$

Bestem strømmen af ω ud gennem F,

$$\int_F \omega$$

20. Lad k betegne kurven i $\mathbb{R}^2$ givet ved parameterfremstillingen

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = \sin t \cos t \\ y & = \sin t \end{array} \right\} \; t \in [0,\pi]$$

Det oplyses, at k er en lukket kurve uden selvgennemskæringer. Lad Ω betegne det begrænsede område af planen, der har k som rand. Lad ω betegne differentialformen

$$\omega = -ydx + xdy$$

1) Beregn

$$\oint_k \omega$$

2) Bestem arealet af Ω.

21. Løs differentialligningerne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt[3]{y}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 17y + 1$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3y^2 + 2}{6y}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = xy$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x}$$

22. Løs differentialligningen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{y}$$

23. Løs differentialligningerne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2y}{1+x}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{xy}{1+x^2}$$

24. Løs differentialligningerne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{-2y}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{y}$$

25. Antag $y = \varphi(x)$ tilfredsstiller ligningen

$$y^2 - x^3 y - 1$$

Angiv en differentialligning

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$$

som φ må løse.

26. Løs differentialligningerne

$$\left(D - \frac{\cos x}{1+\sin x} D^0\right) \varphi = \cos x$$
$$\left(D + \frac{1}{x} D^0\right) \varphi = -\,2x^2$$

27. Løs differentialligningen

$$\left(D + \cos x D^0\right) \varphi = \sin x \cos x$$

28. Løs differentialligningerne

$$\left(D^2 + D - 56D^0\right) \varphi = 0$$
$$\left(D^2 + 2D + D^0\right) \varphi = 0$$
$$\left(D^2 + 4D + 5D^0\right) \varphi = 0$$

29. Løs differentialligningen

$$\left(D^2 + (2+2i)D + 2iD^0\right) \varphi = 0$$

Har ligningen reelle løsninger?

30. Løs differentialligningen

$$\left(D^2 + D^0\right)\varphi = \sin(wx)$$

hvor w er en konstant.

31. Løs differentialligningen

$$\left(x^2 D^2 - 5xD + 9D^0\right)\varphi = 0$$

Vink. Gæt på $\varphi(x) = x^\alpha$.

32. Løs differentialligningen

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x^2}{y^3}$$

33. Løs differentialligningen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -e^x y^2$$

34. Løs differentialligningerne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2y}{xy + x}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2}{x + 1}$$

35. Løs differentialligningerne

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{16x}{y}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e^x}{e^y}$$

36. Løs differentialligningerne

$$\dot{x}_1 = ax_1 + 4x_2$$
$$\dot{x}_2 = -4x_1 - x_2$$

hvor $a = -11, -9, -6$ og x_1, x_2 er funktioner med initialværdier

$$x_1(0) = 2$$
$$x_2(0) = 1$$

37. Udregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Vink: Betragt kvadratet som dobbeltintegralet og skift til polære koordinater:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy$$