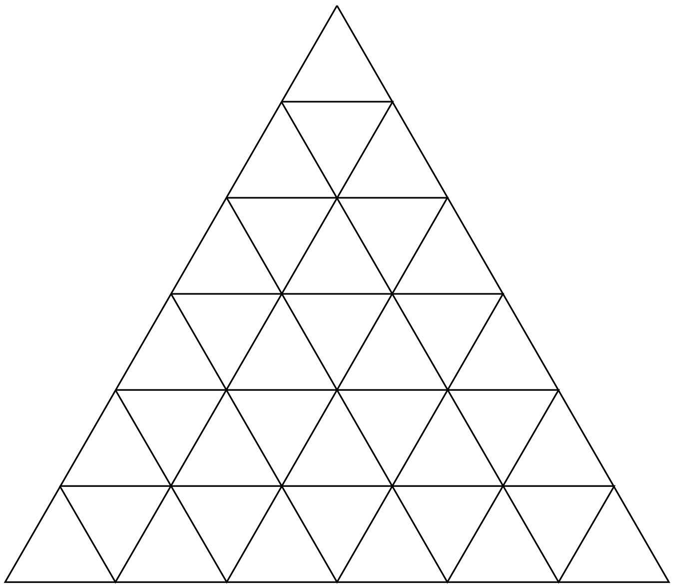
DEN EVIGE TREKANT – ELLER KUNSTEN AT TÆLLE
19. februar 2007

Mogens Esrom Larsen

Indledning.

Når man har bygget et korthus, melder det helt naturlige spørsmål sig nærmest af sig selv, “hvor mange trekanter er der i korthuset?”



Figur 1

Når familien har talt trekanterne i dette seksetagers korthus kommer det næste problem: Hvem har talt rigtigt, hvis nogen overhovedet har det? (Der er 78, så i praksis kan enkelte være smuttet.)

Det er faktisk nemmere at svare på det generelle spørgsmål, “hvor mange trekanter er der i et trekantet korthus på n etager?”

Men hvordan skal opgaven gribes an? Man kan tælle trekanter af samme størrelse, trekanter, der er retvendte og trekanter, der står på spidsen. Man kan forsøge sig med en rekursionsformel, og man kan prøve med en snedig korrespondance til en kendt mængde.

Hver eneste tænkelig metode har faktisk været forsøgt med held i løbet af de sidste 30 år, så en gennemgang af problemets historie giver samtidig en oversigt over den kombinatoriske tælleteknik.

Løsning.

Den simpleste form, løsningen kan gives, er som den hele del af brøken:

$$\left[\frac{n(n+2)(2n+1)}{8}\right] \tag{1}$$

hvor n er antallet af etager i korthuset, og de kantede parenteser, $[x]$, betyder det nærmeste hele tal, $n \leq x$. (Det er kun for ulige værdier af n, at afrundingen er nødvendig.) Det ses, at for $n = 6$ fås $\frac{6 \cdot 8 \cdot 13}{8} = 78$.

Historie.

De ældste kendte korthuse optræder hos A. Cyril Pearson i 1907, [14], og som "King Solomon's Seal" hos Sam Loyd i 1914, [10], der spørger om antallet af ligesidede trekanter i et korthus på 4 etager. (Der er 27.) Der er iøvrigt kun ligesidede trekanter.

Den første, der stiller spørgsmålet i den generelle form, er J. Halsall, der i 1962 i [7] finder formlen, men ikke beviser den. Denne notits forblev temmelig upåagtet på grund af sin intetsigende titel, "An interesting series". Den refereres kun af N. J. A. Sloane i [16], (1973). Opgaven stilles igen i 1966 af J. E. Brider, [1], hvor formlen gives, men heller ikke denne gang bliver den bevist. Det første bevis skyldes C. L. Hamberg og T. M. Green, [8], i 1967, og denne gang blev der lagt mærke til det. Men ikke af alle. Uden at kende disse publikationer stillede og løste F. Gerrish opgaven i 1970, [6], men løsningen var kompliceret, så den gav anledning til flere simplifikationer fra D. G. Mastrantione, [12], B. W. Martin, [11], og C. Wells, [17], alle i 1971. Endelig i 1973 gav J. W. Moon og N. J. Pullman i [13] et elegant bevis med brug af frembringende rækker.

Trods alle disse artikler stillede R. E. Edwards spørgsmålet i Mathematics Magazine i 1974, [4]. Dette blev besvare af B. Prielipp og N. J. Kuenzi i [15] samme år med henvisningerne [6, 11, 12, 13], mens mange andre henviste til [8]. Samtidig gav L. Carlitz og R. Scoville et nyt bevis i [2]. Senere, i 1976, gav R. J. Cormier og R. B. Eggleton i [3] endnu et bevis med henvisning til Edward's spørgsmål i [4].

Nu var problem og løsning kendt, men gik i glemmebogen. I 1986 stillede og løste R. H. Garstang opgaven i [5] uden henvisninger til litteraturen, endda i Mathematical Gazette, som tidligere havde bragt [6, 7, 11, 12]. Endelig blev alle beviserne samlet i 1989 i [9], hvor et enkelt bevis blev tilføjet.

Den generelle opgave er stillet mindst 6 gange uafhængigt af hinanden, nemlig i 1962 i [7], 1966 i [1], 1967 i [8], 1970 i [6], 1974 i [4] og i 1986 i [5].

Beviserne.

Beviserne benytter de fleste af de metoder, man finder i en lærebog i kombinatorisk tælleteknik. Differensskemaer, del op og tæl, korrespondancer, differensligninger med og uden frembringende funktioner, rekursion og induktion og til sidst: Den relevante reference.

I det følgende vil jeg gennemgå samtlige beviser så detaljeret, at det skal være muligt for læseren at forstå dem uden at skulle søge til anden litteratur.

Differensskemaer.

Denne metode er benyttet i [1, 7, 8, 11, 15] til at bestemme formlen (1). Hvis nemlig løsningen er et polynomium, så vil det afsløres ved, at den n–te differens er 0. Vi danner derfor håbefuldt et differensskema, så langt som nødvendigt. Vi kalder antallet af trekanter i et korthus med n etager for $f(n)$, og tæller disse for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vi danner derefter sukcessivt differenserne $\Delta^1(n.5) = f(n+1) - f(n)$, $\Delta^2(n) = \Delta^1(n.5) - \Delta^1((n-1).5)$, osv. Vi får følgende tabel:

n	1		2		3		4		5		6		7	
$f(n)$	1		5		13		27		48		78		118	
Δ^1		4		8		14		21		30		40		52
Δ^2			4		6		7		9		10		12	
Δ^3				2		1		2		1		2		1

Det ses umiddelbart, at vi ikke kan nå en konstant differensrække. Funktionen er ikke noget polynomium. Men da Δ^3 har periode 2, kan det måske hjælpe at dele problemet op i de lige og de ulige.

De ulige etageantal giver

m	0		1		2		3		4		5
$n = 2m+1$	1		3		5		7		9		11
$f(n)$	1		13		48		118		235		411
Δ^1		12		35		70		117		176	
Δ^2			23		35		47		59		
Δ^3				12		12		12			

Og de lige giver

m	1		2		3		4		5		6
$n = 2m$	2		4		6		8		10		12
$f(n)$	5		27		78		170		315		525
Δ^1		22		51		92		145		210	
Δ^2			29		41		53		65		
Δ^3				12		12		12			

Hvert af disse mønstre ender med en konstant trediedifferens. Vi kan derfor finde to trediegradspolynomier i n, der frembringer $f(n)$, i hvert fald så langt vi har orket at beregne $f(n)$. Den ene funktion må antage formen

$$f(2m+1) = am^3 + bm^2 + cm + d \tag{2}$$

Samtidig ved vi, at den antager værdierne 1, 13, 48, 118 for $m = 0, 1, 2, 3$.

Vi skal derfor blot løse ligningerne

$$\begin{aligned} d &= 1 \\ a + b + c + d &= 13 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 48 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 118 \end{aligned}$$

Det er en simpel rutine at finde $(a,b,c,d) = (2, \frac{11}{2}, \frac{9}{2}, 1)$. Vi gætter derfor på formlen for ulige værdier af n:

$$f(2m+1) = \frac{1}{2}(4m^3 + 11m^2 + 9m + 2). \tag{3}$$

Denne form findes i [1, 7].

Man kan naturligvis også finde polynomiet ved en interpolation. Bruger vi Lagranges interpolationsformel for n lige, får vi direkte:

$$\begin{aligned} f(2m) = {} & 5\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ & + 27\frac{(m-1)(m-3)(m-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ & + 78\frac{(m-1)(m-2)(m-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\ & + 170\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ & = \frac{1}{2}(4m^3 + 5m^2 + m). \end{aligned} \tag{4}$$

Denne form findes også i [1, 7].

For at bringe disse to formler, (3) og (4), på en fælles form, indsætter vi $n = 2m+1$ i (3) og $n = 2m$ i (4). Vi får så formlerne, også i [1, 7]:

$$f(n) = \frac{2n^3 + 5n^2 + 2n - 1}{8} \quad \text{for } n \text{ ulige}, \tag{5}$$

$$f(n) = \frac{2n^3 + 5n^2 + 2n}{8} \quad \text{for } n \text{ lige}. \tag{6}$$

Kun tælleren i (6) kan faktoriseres. Men tælleren i (5) kan jo faktoriseres, når vi ser væk fra konstanten, -1. Vi indfører derfor paritetsfunktionen $\delta(n)$, defineret ved

$$\delta(n) = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ 1 & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases} \tag{7}$$

så vi kan sammenfatte (5) og (6) til

$$f(n) = \frac{n(n+2)(2n+1) - \delta(n)}{8}, \tag{8}$$

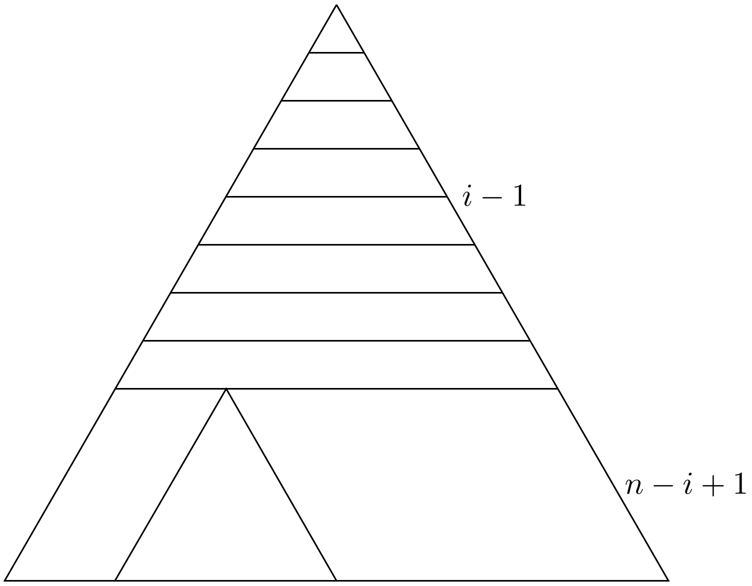
som naturligvis er ækvivalent med (1).

Del og tæl.

Den nærliggende ideé at tælle de retvendte trekanter for sig og trekanterne på spidsen for sig er ret udbredt. Lad os betegne de to funktioner med henholdsvis $\triangle(n)$ og $\nabla(n)$. Så har vi

$$f(n) = \triangle(n) + \nabla(n). \tag{9}$$

Yderligere opdeling foretages i [5, 6, 8, og 15]. Mens [6, 8] deler så meget op, at den endelige optælling bliver besværlig, er [5, 15] tilfreds med den naturlige opdeling efter størrelse.



Figur 2

Toppunktet af en $\triangle$–trekant af størrelse $n-i+1$ må ligge i den skraverede del af trekanten i figur 3. Derfor er antallet af trekanter af denne størrelse lig med antallet af punkter i den skraverede trekant, altså $1+2+...+i = \frac{i(i+1)}{2}$. Bruger vi Eulers sumsymbol,

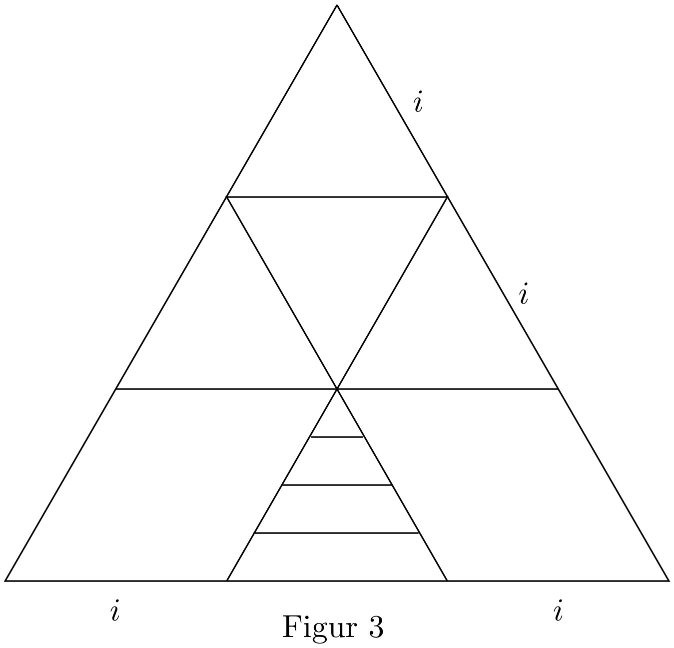
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{10}$$

kan vi skrive resultatet som:

$$\triangle\ (n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \binom{n+2}{3} \tag{11}$$

hvor vi har betegnet binomialkoefficienten med

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{12}$$



Figur 3

Tilsvarende må spidserne af ∇−trekanterne af størrelse i ligge i det skraverede område af figur 4. Derfor bliver antallet af ∇−trekanter af størrelse i lig med antallet af punkter i den skraverede trekant, altså $1+2+...+(n+1-2i) = \frac{(n+1-2i)(n+2-2i)}{2}$. Altså er deres samlede antal

$$
\begin{aligned}
\nabla(n) &= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n+1-2i)(n+2-2i)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\left[\frac{n}{2}\right] - (2n+1)\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i + 2\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i(i-1) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{2n+1}{2}\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right) \\
&\quad + \frac{2}{3}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right) \\
&= \left[\frac{n}{2}\right]\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\left(\frac{2}{3}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right) - \frac{2n+1}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

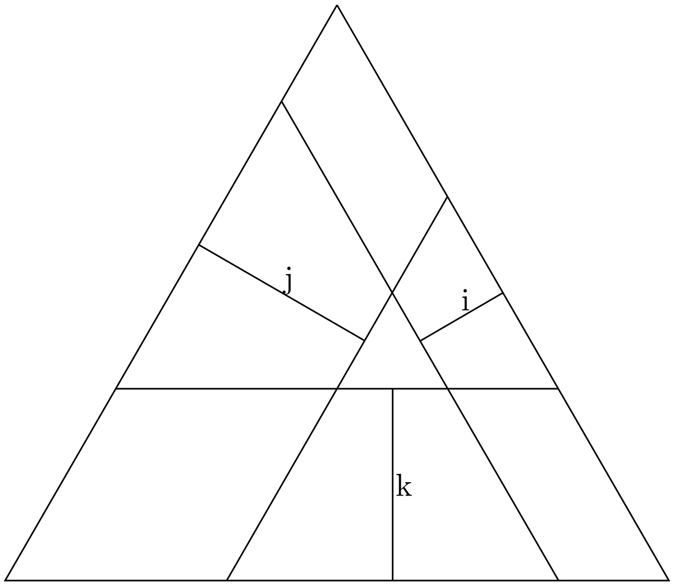
Dette udtryk kan forenkles ved hjælp af funktionen $\delta(n)$ defineret i (7), idet vi bruger formlen $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-\delta(n)}{2}$. Vi får så

$$
\begin{aligned}
\nabla(n) &= \frac{n-\delta(n)}{2}\cdot \\
&\quad \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n+2-\delta(n)}{2}\left(\frac{n-2-\delta(n)}{3} - \frac{2n+1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{n-\delta(n)}{2}\cdot\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+2)(4n+7)-(2n+5)\delta(n)}{12}\right) \\
&= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} - \frac{\delta(n)}{8}, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

hvor vi har brugt den simple kendsgerning, at $\delta(n)^2 = \delta(n)$. Formlen (8) følger nu ved addition af (11) og (13) i henhold til (9).

Korrespondance.

Dette princip benyttes i [3] på følgende måde. Hver trekant er karakteriseret af tre "koordinater," et tripel af hele tal, i, j, k med $0 \leq i, j, k \leq n$ hvor i, j, k er "højderne" af de tre sider. Se figur 5.



Figur 4

Hvert tripel definerer en trekant, med mindre denne udarter til et punkt. Det er tilfældet, netop når $i + j + k = n$. Men for at trekanten skal befinde sig inden i korthuset, T_n, skal

$$i + j \leq n, \tag{14}$$
$$i + k \leq n, \tag{15}$$
$$j + k \leq n; \tag{16}$$

derfor svarer mængden af trekanter til mængden af tripler,

$$\mathfrak{A} = \{(i, j, k) \mid i + j \leq n \wedge j + k \leq n \wedge k + i \leq n \wedge i + j + k \neq n\}$$

Et tripel fra $\mathfrak{A}$ svarer til en $\triangle$–trekant, netop når $i + j + k < n$. Så for at finde $\triangle\ (n)$ skal vi tælle

$$\mathfrak{B} = \{(i, j, k) \in A \mid i + j + k < n\},$$

og for at finde $\nabla(n)$ skal vi tælle resten,

$$\mathfrak{C} = \{(i, j, k) \in A \mid i + j + k > n\}. \tag{17}$$

Før vi tæller $\mathfrak{B}$, bemærker vi, at betingelserne (14–16) er overflødige, da de følger af $i+j+k<n$. Vi definerer følgende funktion på $\mathfrak{B}$:

$$(i,j,k) \longrightarrow (i+1, i+j+2, i+j+k+3).$$

Dette er en bijektiv korrespondance mellem mængden $\mathfrak{B}$ og mængden

$$\mathfrak{D} = \{(a,b,c) \mid 1 \le a < b < c \le n+2\}.$$

Men hvert tripel i $\mathfrak{D}$ svarer til en delmængde på tre elementer blandt tallene $1, ..., n+2$, så deres antal er den velkendte binomialkoefficient

$$\triangle\,(n) = \binom{n+2}{3}.$$

At tælle $\mathfrak{C}$ er derimod ikke så let. Vi definerer funktionen på $\mathfrak{C}$

$$(i,j,k) \longrightarrow (i+j+k-n, i+1, i+j+2). \tag{18}$$

Ifølge definitionen af $\mathfrak{C}$, (17), gælder

$$0 < i+j+k-n$$

og af (16) fås

$$i+j+k-n < i+1$$

mens $0 \le j$ medfører

$$i+1 < i+j+2$$

og (14) giver os

$$i+j+2 \le n+2$$

Endelig giver (15) os betingelsen

$$(i+j+k-n) + (i+1) < (i+j+2),$$

Derfor er funktionen (18) en bijektiv korrespondance mellem $\mathfrak{C}$ og mængden

$$\mathfrak{E} = \{(a,b,c) \mid 1 \le a < b < c \le n+2 \quad \wedge \quad a+b < c\}$$

For nu at tælle $\mathfrak{E}$ går vi frem som følger: For hvert valg af $a+b=d$, $d = 3, 4, \ldots, n+1$, kan vi vælge a, $1 \le a \le \left[\frac{d-1}{2}\right]$, og c, $d < c \le n+2$, mens b nødvendigvis bliver $b = d-a$. Derfor er antallet af tripler i $\mathfrak{E}$

$$\nabla(n) = \sum_{d=3}^{n+1} (n+2-d)\left[\frac{d-1}{2}\right].$$

En måde at komme videre på, vil være at betragte differensen

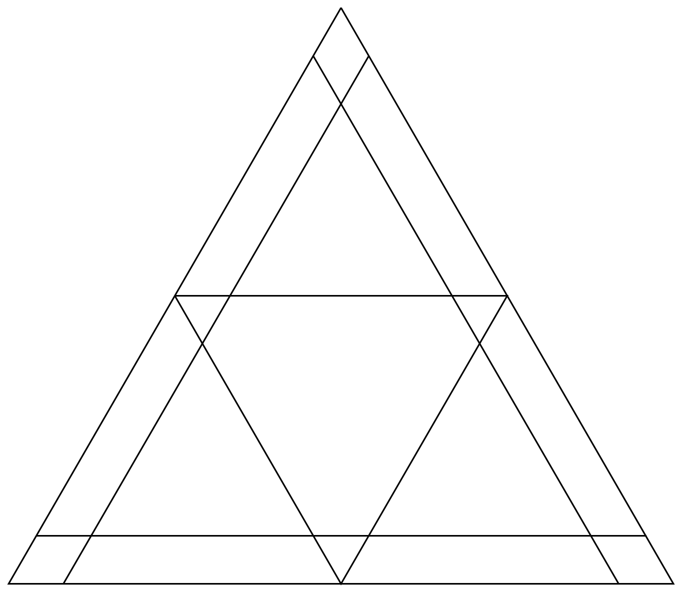
$$
\begin{aligned}
\nabla(n)-\nabla(n-1) &= \sum_{d=3}^{n+1}(n+2-d)\left[\frac{d-1}{2}\right]-\sum_{d=3}^{n}(n+1-d)\left[\frac{d-1}{2}\right] \\
&= \left[\frac{n}{2}\right]+\sum_{d=3}^{n}\left[\frac{d-1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\sum_{d=3}^{n}\frac{d-1-\delta(d-1)}{2} \\
&= \left[\frac{n}{2}\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}-1\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{n-2}{2}\right] \\
&= \frac{n^2}{4}-\frac{\delta(n)}{4}=\left[\frac{n^2}{4}\right].
\end{aligned}
$$

Ved hjælp heraf får vi

$$
\begin{aligned}
\nabla(n) &= \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\nu^2}{4}\right]=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu^2}{4}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\delta(\nu)}{4} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{4}\left[\frac{n+1}{2}\right] \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}-\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1-\delta(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}-\frac{\delta(n)}{8},
\end{aligned} \tag{19}
$$

som er det samme som (13).

Differensligningen.



Figur 5

Korthuset eller trekanten T_n af størrelse n indeholder præcis tre trekanter T_{n-1}^i $i=1,2,3$ af størrelse $n-1$. Fællesmængden af to trekanter, $T_{n-1}^i \cap T_{n-1}^j$

af størrelse $n-1$ er en trekant, T_{n-2}^{ij} af størrelse $n-2$, så de tre par danner tre sådanne trekanter. Heldigvis udgør fællesmængden af de tre – eller alle seks – én trekant af størrelse $n-3$, T_{n-3}. Deres indbyrdes forhold illustreres af diagram 1.

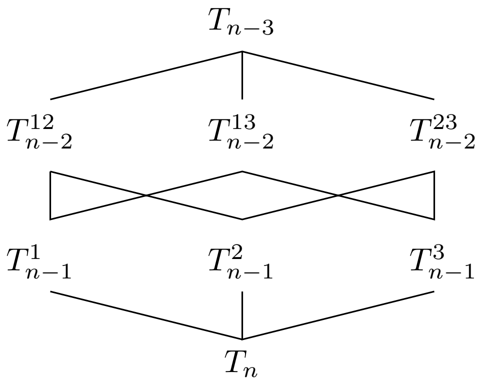


Diagram 1

Først tæller vi de trekanter i T_n, som tillige ligger i mindst én af trekanterne T_{n-1}^i. Nu var $f(n-1)$ antallet af trekanter i hver af trekanterne af størrelse $n-1$. Men $3f(n-1)$ tæller hver trekant, som tillige ligger i en af de tre trekanter, T_{n-2}^{ij}, med mindst to gange. Vi må derfor trække $f(n-2)$ fra tre gange. Men hver af de trekanter, der ligger i T_{n-3}, er blevet talt med 3 gange og trukket fra 3 gange, så de må lægges til til sidst. Derfor bliver antallet af trekanter, der tillige ligger i en mindre trekant, tallet

$$3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3)$$

For at få det samlede antal trekanter i T_n må vi tilføje dem, der ikke ligger i nogen af de mindre trekanter. Det drejer sig om selve trekanten, T_n, og, når n er lige, trekanten på spidsen af størrelse $\frac{n}{2}$, den stiplede trekant i figur 6. Differensligningen for funktionen $f(n)$ bliver derfor:

$$f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3) + 2 - \delta(n). \tag{20}$$

Denne formel findes i [13].

Ligningen kan løses på flere måder. J. W. Moon og N. J. Pullman bruger i [13] den elegante eksponentialfrembringerfunktion, som vi vender tilbage til, men man kan godt nøjes med den almindelige frembringerfunktion, som vi viser i næste paragraf. Endelig kan man jo løse ligningen ved simpelthen at spalte operatoren, som vi skal gøre nu.

Vi skriver ligningen (20) som

$$f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 2 - \delta(n). \tag{21}$$

Det karakteristiske polynomium for operatoren har den tredobbelte rod 1. Hvis vi derfor indfører den almindelige differensoperator

$$\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$$

kan vi skrive (21) som

$$\Delta^3 f(n) = 2 - \delta(n),$$

der f. eks. løses sukcessivt som

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(n) &= \alpha + \sum_{\nu=1}^{n}(2-\delta(\nu)) = \alpha + \frac{3n-\delta(n)}{2},\\
\Delta f(n) &= \beta + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\alpha + \frac{3\nu-\delta(\nu)}{2}\right) = \beta + \alpha\cdot n + \frac{3n^2+2n-\delta(n)}{4},\\
f(n) &= \sum_{\nu=1}^{n}\left(\beta + \alpha\cdot\nu + \frac{3\nu^2+2\nu-\delta(\nu)}{4}\right) \qquad (22)\\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{n+\delta(n)}{2} +\\
&\quad + \beta\cdot n + \alpha\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+2)(2n+1)-\delta(n)}{8} + \beta\cdot n + \alpha\cdot\frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Idet konstanten i tredie trin er 0, fordi $f(0) = 0$. Af $f(1) = 1$ og $f(2) = 5$ fås $\alpha = \beta = 0$. Herefter ses det umiddelbart, at (22) er det samme som (8).

Frembringerfunktionen.

Dette er blot en anden metode til løsning af (21). Vi definerer en formel potensrække, $F(x)$, med n–te koefficient lig med $f(n)$, hvor $f(n)$ antages at løse (21).

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n. \qquad (23)$$

Vi ganger nu (23) med x sukcessivt og får

$$\begin{aligned}
xF(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)x^n\\
x^2F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n-2)x^n\\
x^3F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n-3)x^n.
\end{aligned}$$

med definitionerne $f(0) = f(-1) = f(-2) = 0$, som passer i (21) for $n = 1, 2, 3$.

Ved brug af differensligningen (21) får vi derfor

$$
\begin{aligned}
&F(x)(1-3x+3x^2-x^3) = F(x) - 3xF(x) + 3x^2F(x) - x^3F(x) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3))x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(2-\delta(n))x^n \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \delta(n)x^n = 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\
&= \frac{2x}{1-x} - \frac{x}{1-x^2} = \frac{x+2x^2}{1-x^2} = \frac{x+2x^2}{(1-x)(1+x)}. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Ved at dividere med $1-3x+3x^2-x^3 = (1-x)^3$ får vi af (24) ved hjælp af en partialbrøksopspaltning

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2x+x^2}{(1-x)^3(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{\frac{3}{2}}{(1-x)^4} - \frac{\frac{7}{4}}{(1-x)^3} + \frac{\frac{1}{8}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{1-x} + \frac{\frac{1}{16}}{1+x}. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Hver af disse partialbrøker har en velkendt rækkeudvikling, der fås ved sukcessiv differentiation af en kvotientrække:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \qquad (26) \\
\frac{1}{(1-x)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n \\
\frac{1}{(1-x)^4} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}x^n.
\end{aligned}
$$

Substitution af udtrykkene fra (26) i (25) giver ved sammenligning af koefficienterne i denne række og (23)

$$
\begin{aligned}
f(n) = \frac{3}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - \frac{7}{4}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \\
+ \frac{1}{8}\cdot(n+1) + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cdot(-1)^n = \frac{2n^3+5n^2+2n-\delta(n)}{8},
\end{aligned}
$$

der let genkendes som (8).

Den eksponentielle frembringerfunktion.

I [13] løser J. W. Moon og N. J. Pullman (21) med den eksponentielle frembringerfunktion. Først forskyder vi $n \to n+3$ i (21) og får

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 1 + \delta(n). \tag{27}$$

Dernæst definerer vi en formel potensrække, $F(x)$ med n–te koefficient lig med $\frac{f(n)}{n!}$, hvor $f(n)$ antages at løse (27);

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n. \tag{28}$$

Ved sukcessiv differentiation af (28) får vi

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{n!} x^n, \\ F''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+2)}{n!} x^n, \\ F'''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+3)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Denne gang giver differensligningen (27) anledning til en differentialligning, nemlig

$$\begin{aligned} F'''(x) - 3F''(x) + 3F'(x) - F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\delta(n)}{n!} x^n \\ &= e^x + \sinh(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}. \end{aligned} \tag{29}$$

Den karakteristiske ligning har igen tredobbeltroden 1, så løsningen findes som

$$F(x) = \frac{1}{4}x^3e^x + \alpha x^2 e^x + \beta x e^x + \gamma e^x + \frac{1}{16}e^{-x}$$

hvor α, β og γ afhænger af begyndelsesværdierne. Vi indfører nu rækkeudviklingerne for e^x og e^{-x} i udtrykket og får

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}n(n-1)(n-2) + \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma + \frac{(-1)^n}{16} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

For at finde α, β og γ, sætter vi de kendte værdier ind for $f(n)$. Vi får ligningerne

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad \gamma + \frac{1}{16} = f(0) = 0; \\ n = 1: &\quad \beta + \gamma - \frac{1}{16} = f(1) = 1; \\ n = 2: &\quad 2\alpha + 2\beta + \gamma + \frac{1}{16} = f(2) = 5. \end{aligned}$$

Altså er

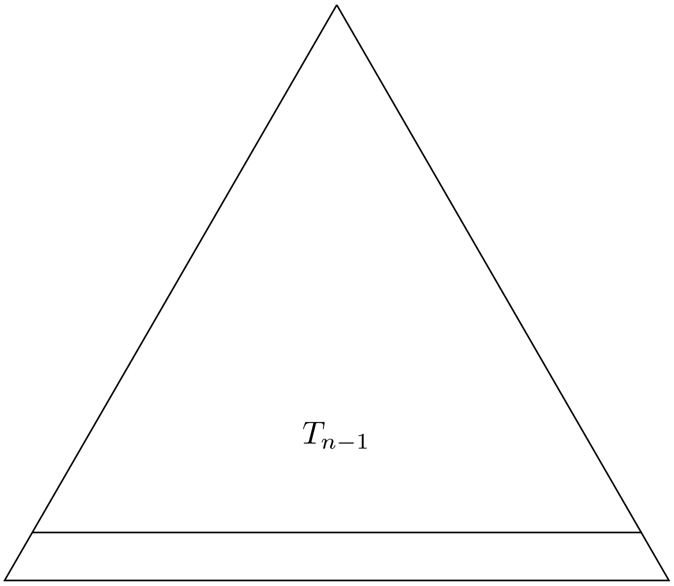
$$\gamma = -\frac{1}{16}, \quad \beta = \frac{9}{8}, \quad \alpha = \frac{11}{8};$$

så vi ender med at finde

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{2n(n-1)(n-2) + 11n(n-1) + 9n}{8} - \frac{1-(-1)^n}{16} \\ &= \frac{n(2n^2+5n+2)}{8} - \frac{\delta(n)}{8}, \end{aligned}$$

let at genkende som (8).

Induktion eller rekursion.



Figur 6

I dette afsnit skal vi bruge en første ordens differensligning til at finde $f(n)$. Sammenlignet med (21) sker simplifikationen af venstre side på bekostning af højresiden:

$$f(n) - f(n-1) = F(n)$$

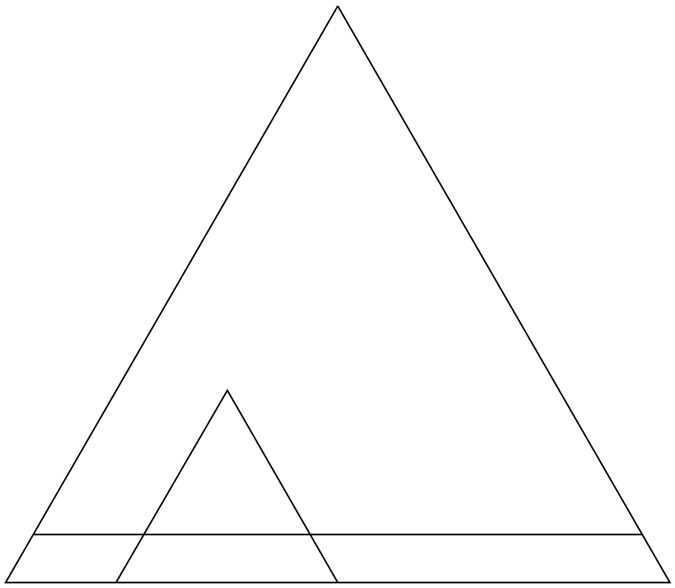
hvor $F(n)$ er en eller anden kompliceret funktion. Denne angrebsvinkel findes i [2].

Denne gang ser vi kun på et korthus, T_{n-1}, der er stueetagen mindre end T_n, se figur 7, og vi forsøger at beregne antallet af tilkomne, $F(n)$, som ligger i T_n, men ikke i T_{n-1}.

Det bliver lidt lettere at gøre dette, hvis vi deler op i retvendte trekanter og trekanter på spidsen:

$$\begin{aligned} \triangle(n) - \triangle(n-1) &= G(n), \\ \nabla(n) - \nabla(n-1) &= H(n), \end{aligned}$$

hvor vi søger G og H.



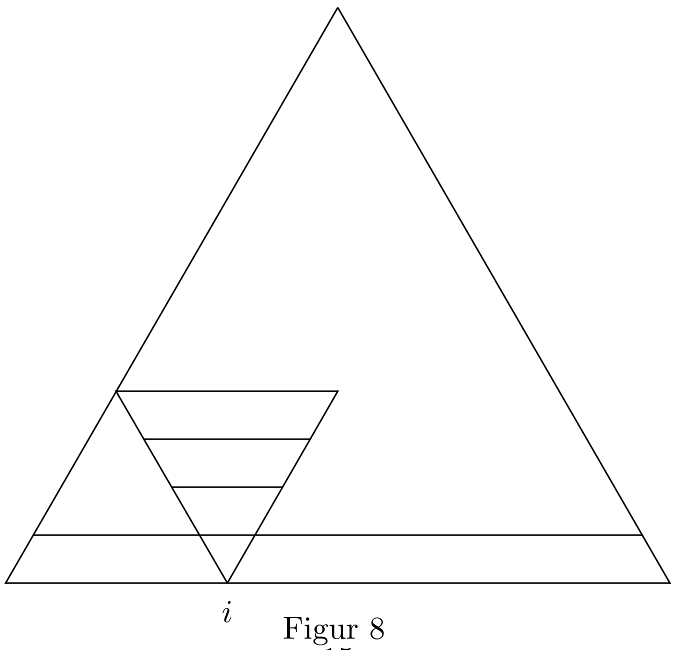
Figur 7

Der er én retvendt nytilkommen i T_n for hver prik i T_{n-1}, se figur 7, hvad der giver et samlet antal på

$$G(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

Heraf følger umiddelbart

$$\triangle\,(n) = \sum_{\nu=1}^{n} G(\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{\nu+1}{2} = \binom{n+2}{3}. \tag{30}$$



Figur 8

Funktionen $H(n)$ er som sædvanlig mere genstridig at beregne. Alle nytilkomne må have spidsen på grundlinien i T_n (figur 8). For hvert punkt, i, $i = 1, ..., \left[\frac{n}{2}\right]$, er der plads til i ny trekanter inden i T_n. Vi får derfor ved hjælp af figurens symmetri

$$H(n) = 2\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i - (1 - \delta(n))\frac{n}{2}$$

hvor vi omhyggeligt har undgået at tælle $i = \frac{n}{2}$ med to gange, når n er lige. Vi beregner nu

$$\begin{aligned} H(n) &= \left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) - (1 - \delta(n))\,\frac{n}{2} \\ &= \frac{n - \delta(n)}{2}\left(\frac{n - \delta(n)}{2} + 1\right) - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\delta(n) \\ &= \frac{n^2}{4} + \delta(n)\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{4} - \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{n^2}{4} - \frac{\delta(n)}{4}. \end{aligned}$$

Vi går nu frem som i (19) og får

$$\nabla(n) = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} - \frac{\delta(n)}{8},$$

igen det samme som (13).

Den gode reference.

Den sidste metode går ud på at spørge sig for. Da spørgsmålet, "How Many Triangles?" blev stillet i [4], kom der ca. 60 besvareler med formlen, de fleste med henvisning til [8]. I [2, 15] blev problemet karakteriseret som "velkendt", i [15] med henvisningerne [6, 11, 12, 13]. Herefter kan vi måske ændre karakteristiken til "vel–løst".

Slutning.

Dette er en historie om tælleteknikkernes sukces. Hver eneste kendt metode har vist sin evne til fange alle trekanterne uden at overse én eneste.

Samtidig tyder løsningerne på, at problemet ikke er helt oplagt. Ligegyldigt hvilket synspunkt, man har anlagt, har der været en hård nød, der skulle knækkes.

Henvisninger.

1. J. E. Brider, A mathematical adventure, *Mathematics Teaching* 37 (1966) 17–21.
2. L. Carlitz and R. Scoville, A well-known problem, solution, *Mathematics Magazine* 47 (1974) 290–291.
3. R. J. Cormier and R. B. Eggleton, Counting by correspondence, *Mathematics Magazine* 49 (1976) 181–186.
4. R. E. Edwards, Problem 889, *Mathematics Magazine* 47 (1974) 46–47.
5. R. H. Garstang, Triangles in a triangle, *Mathematical Gazette* 70 (1986) 288–289.
6. F. Gerrish, How many triangles?, *Mathematical Gazette* 54 (1970) 241–246.
7. J. Halsall, An interesting series, *Mathematical Gazette* 46 (1962) 55–56.
8. C. L. Hamberg and T. M. Green, An application of triangular numbers, *Mathematics Teacher* 60 (1967) 339–342.
9. Mogens Esrom Larsen, The Eternal Triangle – A History of a Counting Problem, *Coll. J. Math.* 20, No. 5 November (1989) 370–384.
10. Sam Loyd, *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks & Conundrums,* Pinnacle Books, New York, 1976 (1. ed. 1914), p. 284.
11. B. W. Martin, How many triangles?, *Mathematical Gazette* 55 (1971) 440–441.
12. B. D. Mastrantone, How many triangles?, *Mathematical Gazette* 55 (1971) 438–440.
13. J. W. Moon and N. J. Pullman, The number of triangles in a triangular lattice, *Delta* 3 (1973) 28–31.
14. A. Cyril Pearson, *The Twentieth Century Standard Puzzle Book Part II,* Routledge, London, 1907, 74–75.
15. B. Prielipp and N. J. Kuenzi, A well–known problem, comment, *Mathematics Magazine* 47 (1974) 290.
16. N. J. A. Sloane, *A Handbook of Integer Sequences,* Academic Press, New York, 1973, Sequence #1569.
17. Celia Wells, Numbers of triangles, *Mathematics Teaching* 54 (1971) 27–29.