FISKERNE

Mogens Esrom Larsen

Matematisk Institut
Københavns Universitet

11. april 2005

Det, der i sig selv kan bevises og vides, kan antages som trosgenstand også af dem, der ikke forstår beviset.

Thomas Aquinas
1225–74

Orakler kan være nyttige. Over porten til oraklet i Delphi står den manende indskrift, $\gamma\nu\omega\vartheta\iota\ \sigma\varepsilon\alpha\upsilon\tau o\nu$ (kend dig selv), som Sokrates gjorde til sit valgsprog. Og det er utvivlsomt en nyttig opfordring.

Men orakler og for den sags skyld også astrologer og andre spåmænd og –koner kan opfylde et behov på en hensigtsmæssig måde, samtidig med at de fritager kunden for at forstå, hvad der foregår. Kunden holder sig til Thomas og forventer at få en sandhed, selv om det er ubegribeligt, hvor den kommer fra. Men det er ikke tilfældet, der stikker noget helt andet under!

Når man træffer beslutninger med vinding for øje i politik, forretning, i et spil eller i kampen for tilværelsen, så er man i den situation, at man skal vælge i uvidenhed om, hvad modstanderne eller naturen finder på af modtræk.

For at få et overblik over, hvilke konsekvenser valgene kan have, skriver man gerne mulighederne op i en matrix. Lad os f. eks. tænke på et spil mellem Rikke og Søren, der hver har valget mellem fire muligheder, som vi i denne sammenhæng kalder "strategier." Hvis vi yderligere tænker os, at udfaldet af et par af valgte strategier består i, at den ene betaler et beløb til den anden, så er det nok at anføre, f. eks. Rikkes gevinst, regnet med fortegn. Det kan f. eks. se sådan ud:

		Søren			
		A	*B*	*C*	*D*
	A	12	−1	1	0
Rikke	B	5	1	7	−20
	C	3	2	4	3
	D	−16	0	0	16

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

I dette tilfælde er det ikke svært at vælge en god strategi. Søren skal vælge B, mens Rikke skal vælge C. Begrundelsen er den simple, som er fælles for de to, at ethvert andet valg tillader modstanderen at opnå en større gevinst. Endda så simpelt, at uanset hvilken anden strategi, Søren vælger, vil Rikke få en lidt større gevinst blot ved at fastholde sin strategi, C. Og omvendt. Men hvis Søren vælger først og Rikke bagefter, har hun naturligvis mulighed for at få mere ud af det. Punktet (B,C) kaldes et *sadelpunkt,* fordi værdierne vokser i den ene retning og aftager i den anden.

Hvis et spil har et sadelpunkt, er det bedst at vælge den strategi, som sadelpunktet ligger i. Et spil kan godt have flere sadelpunkter, men da giver de altid samme gevinst. Så det betyder blot, at der er flere lige gode optimale strategier.

Hvis et sadelpunkt eksisterer, er det let at finde. Søren bestemmer for hver af sine strategier det dårligste resultat, altså $A : 12$, $B : 2$, $C : 7$ og $D : 16$. Det bedste af dem er 2 i punktet (B,C). Dette punkt kaldes *minimax* punktet. Derefter bestemmer Rikke tilsvarende $A : -1$, $B : -20$, $C : 2$ og $D : -16$. Det bedste er 2 i punktet (B,C). Dette punkt kaldes *maximin* punktet. Når de to punkter, minimax og maximin, falder sammen, er det et sadelpunkt.

Men der findes ikke altid noget sadelpunkt. Selv med blot to strategier til hver, kan det gå galt.

		Søren	
		A	B
Rikke	A	2	-3
	B	0	3

I dette spil er minimax (A,A), mens maximin er (A,B). Man risikerer altid at fortryde sin strategi. Søren vælger A i håb om tabet 0, men når Rikke vælger A, taber han 2. Derfor ændrer han til B og vinder 3, men så vælger Rikke B og vinder 3. Derfor vil Søren vælge A, men så foretrækker Rikke også A. Osv.

Men hvis Rikke vælger sin strategi A med sandsynligheden p, og strategi B med sandsynligheden $1 - p$, så kan hun ophæve forskellen mellem gevinsterne for Søren. For nu er Sørens gevinst ved strategien A jo $2p$, mens gevinsten ved strategien B er $-3p+3(1-p)$. Hvis Rikke derfor vælger p, så $2p = -3p+3(1-p)$, dvs. $p = \frac{3}{8}$, så kan Søren gøre, hvad han vil, uden at det gør nogen forskel. I det lange løb vinder Rikke $\frac{3}{4}$ pr. spil. Tilsvarende kan Søren vælge strategien A med sandsynligheden q og B med sandsynligheden $1 - q$, hvorved Rikkes forventede gevinster bliver hhv. $2q - 3(1 - q)$ for A og $3(1 - q)$ for B. Disse størrelser er ens for $q = \frac{3}{4}$. Med dette valg kan Rikke gøre, hvad hun vil, og i det lange løb kun vinde $\frac{3}{4}$ pr. spil.

Metoden kaldes at bruge en *blandet strategi,* og den fælles gevinst siges at være spillets *værdi.*

Lad os tage et mere indviklet eksempel. Søren har fem strategier at vælge mellem, mens Rikke har to. Matricen ser sådan ud:

		Søren				
		A	*B*	*C*	*D*	*E*
Rikke	A	−2	5	1	0	4
	B	3	−3	−1	3	8

For hver af Sørens strategier afbildes Rikkes forventede gevinst ved at vælge den blandede strategi, x B og $1 - x$ A. Det gælder nu for Rikke om at vælge x, så at Søren ikke kan få noget ud af et selv nok så snedigt valg af strategi.

Det fremgår af figuren, at $x = \frac{3}{7}$ er det rigtige. Nu kan Søren ikke forhindre Rikke i at vinde $\frac{1}{7}$. Han kan endda kun sikre sig, at Rikke kun vinder $\frac{1}{7}$ ved selv kun at vælge mellem strategierne A og C. Men hvis han vælger mellem dem med frekvensforholdet 2:5, kan han sikre sig mod, at Rikke vinder mere end $\frac{1}{7}$. Denne gevinst til Rikke er derfor spillets værdi.

John von Neumann's berømte sætning fra 1928 siger, at ethvert matrix–spil har en sådan løsning med blandede strategier, altså en bedste strategi for hver af spillerne og en værdi af spillet.

Når man skal udnytte den optimale strategi, gælder det om at finde en metode til lodtrækning mellem strategierne, så de vælge med den rigtige relative hyppighed, men samtidig i et uforudsigeligt mønster. Skal man f. eks. bruge en bestemt strategi med hyppigheden $\frac{1}{3}$, kan man jo slå en terning og bruge 1 eller 2 som kriterium.

Nogle mennesker har måske ondt ved at akceptere, at dette er den bedste måde at handle på. Især hvis spillet er i forretningslivet, hvor man gerne vil kende den helt rigtige beslutning. Metoden kan så være at spørge en konsulent, der kan fungere som erstatning for en rigtig terning.

Et berømt eksempel om fiskeriet fra øen Jamaica skyldes W. C. Davenport (1960), der fortæller:

26 besætninger fisker i farvandet ved at sætte og hente ruser med udhulede kanoer, som vejret tillader, i tre dage hver uge. Fiskebankerne inddeles i ydre og indre banker i forhold til et rev. På grund af bundforholdene bliver de ydre banker jævnligt hjemsøgt af en kraftig strøm, som ødelægger de udsatte ruser. Det har ikke været muligt at forudsige strømmene ved tegn fra vejret eller på anden måde. De indre banker er fuldstændig beskyttet mod disse strømme.

Kaptajnen på den enkelte båd vælger mellem tre strategier: At sætte alle ruser på de indre banker, at sætte alle ruser på de ydre banker, og at sætte nogle ruser ude og nogle inde.

De forskellige strategier har forskellige fordele og ulemper. Sejler man langt, når man at sætte færre ruser. Kommer strømmen, går ruserne uden for revet tabt. Men fiskene fra de ydre banker er mere værd end de fisk, man kan fange på de indre banker. Men når der er en strøm, så får man jo ikke leverancerne udefra, derfor stiger priserne på de fisk, man fanger fra de indre banker.

Vi kan stille det op som et matrix–spil mod naturen, hvor naturen har strategierne, Strøm og Ikke strøm, mens fiskerne har de tre nævnte strategier. Gevinsten er i Ł pr. måned til kaptajnen.

		Fiskerne		
		Indre	Indre og ydre	Ydre
Strømmen	løber	17.3	5.2	−4.4
	løber ikke	11.5	17.0	20.6

Hvis dette er et spil mellem fiskerne og naturen, kan vi finde fiskernes optimale strategi ved at finde naturens optimale, formentlig blandede strategi. Vi laver et billede omtrent som for spillet ovenfor:

Det fremgår, at naturens optimale strategi er at vælge at lade strømmen løbe med sandsynligheden 31% med spillets værdi 13.3 Łpr. måned til kaptajnen. Men samtidig finder vi den optimale strategi for fiskerne, nemlig at vælge de indre banker 67% af tilfældene og både de indre og de ydre i 33% af tilfældene, men de ydre alene i 0% af tilfældene.

Det viser sig, at ingen af fiskerne vælger den ydre strategi, de siger, at den er for farlig. Og når fiskerne rådfører sig med den lokale woodoo heksedoktor, fører det til, at 69% af dem vælger den indre strategi, mens 31% vælger både og.

Men naturen er jo ligeglad, den lader strømmen løbe 25% af tiden. Man kunne derfor indvende, at når man nu har iagttaget denne frekvens, kunne man så ikke være så ufin at benytte sig af det? Med denne viden ser det ud til, at den ydre strategi vil give en forventet fortjeneste på 14.35 Ł, altså ca. 1 Ł mere.

Hvem er klogest, heksedoktoren eller statistikeren? Når heksedoktorens løsning er den, som århundredernes erfaringer har bekræftet som den bedste, skyldes det et simpelt statistisk fænomen, spredning. Det er ikke godt nok, at vi kender gennemsnittet, fordi strømmen kan vælge at løbe 35% i år og måske næste år. Det vil føre til for store tab, som vi ikke har råd til, selv om det giver gevinst i det meget lange løb. Når vi vælger den blandede strategi, som fiskerne faktisk gør, så er vi uafhængige af, om naturen gør som den plejer, eller hvad den nu finder på. Det er det, der er styrken ved den optimale strategi.

Denne løsning på problemet giver en forklaring på astrologiens eller oraklets nytte: Den giver os den ønskede frekvens, den ønskede uforudsigelighed, hvis den er påkrævet, og den fritager os for at forstå vores adfærd som grundlæggende tilfældig.

Matematisk Institut
Universitetsparken 5
DK–2100 København Ø
Denmark