FYSISK MATEMATIK?

Mogens Esrom Larsen
18. september 2007

Institut for Matematiske Fag
Københavns Universitet

Matematikken blev fordrevet fra fysikken i nyere tid, så vi nu ser de to fag som parallelle. Matematikeren laver sine modeller, som fysikeren sammenligner med sin virkelighed, – så må den ligne eller ej! Men sådan har det ikke altid været. Fagene var engang flettet tæt sammen.

Lertavler og talsystemer

I begyndelsen var iagttagelsen. De ældste overleverede matematiske tekster er assyriske fra et par tusind år før vor tidsregning. I de samtidige kulturer i Ægypten og Kina benyttede man brændbare materialer, mens man i Assyrien lavede aftryk i våd ler med små kiler. Selv om en tavle kunne genbruges og ofte blev det, så var dette materiale arkæologernes held. Hver gang et hus brændte, blev de tilfældige optegnelser forevigede. Assyreren måtte så skaffe sig nye lertavler til sin ærgrelse og vores fordel.

Assyrien var et regnfattigt land, tænk bare på Hammurapis' (1792–50) berømte love om reglerne for brug og misbrug af vandingsanlæg. Men til gengæld var og er klimaet gunstigt for iagttagelse af himmellegemernes færd. Man opdagede korte og lange perioder, og at de fleste stjerner bevæger sig i parallelle baner i en døgnrytme, der langsomt ændres med årstiderne. Det kunne ligefrem være praktisk nyttigt; vi læser, at når Plejaderne ses om foråret første gang, så er tiden inde til at så korn. Men syv himmellegemer skiller sig ud, sol og måne og de fem "vagabonder" – planeterne. De sidste følger ikke fixstjernerne, men løber somme tider i forvejen, og snart efter tilbage igen i modsat retning. Man anså disse syv for virkelige guder og deres løben frem og tilbage som varsler. Planeterne bærer stadig gudenavne, men nu romerske, Venus, Mars, Jupiter osv.

På den tid tænkte man ikke i modellen "årsag–virkning", men snarere "varsel–begivenhed". Hændelser var forudbestemt af guderne, men efter advarslen kunne de påvirkes efter anmodning.

Perioderne tillod de lærde at forudse visse begivenheder som f. eks. måneformørkelser, hvilket nok har virket imponerende. Når kongen efter en heldig forudsigelse så spurgte de lærde om andre varsler, så havde de et problem. Hvad enten de nægtede eller tog fejl, var resultatet det samme: umiddelbar henrettelse. Intet nyt

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

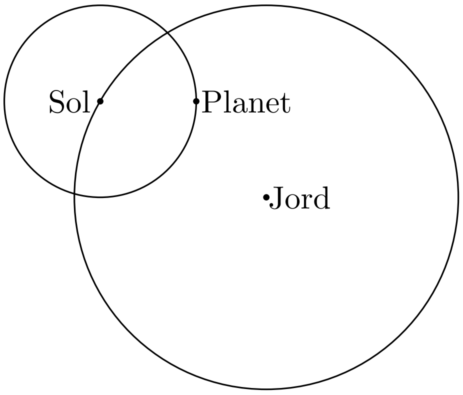
under solen, var der ikke for nylig et forslag i et åndeligt u–land (Rusland) om at straffe meteorologerne for forkerte vejrudsigter?

Blandt lertavlerne finder vi regnestykker med længder, arealer, rumfang, vægt, priser og lønninger. Og også tavler med den lille tabel, – i 60–talsystemet er der 1711 produkter fra 2 til 59, – (i 10–talsystemet er der kun 36 produkter fra 2 til 9), – og pythagoræiske talsæt, 3 4 5, 5 12 13, osv. De har kendt disse retvinklede trekanter.

Assyrerne brugte også tal til at notere stjerners og planeters positioner, de opfandt positionssystemet med grundtal 60, delte omkredsen i 360 grader, og angav positionerne med en nøjagtighed på to hexagesimaler, så en grad deltes i (vore dages) 60 bueminutter (de små) og hver af dem i 60 buesekunder (de anden små). Da disse tabeller nåede grækerne, som ikke brugte et positionssystem, blev disse små enheder bevaret, men blot skrevet med græske hele tal. Positionen af en stjerne blev altså angivet med tre heltal, grader, minutter og sekunder, de sidste to mellem 0 og 59. Da de ikke havde et symbol for nul, valgte Ptolemaios (2. årh.) for ikke at forveksle sekunder med minutter i tilfælde af 0 minutter, at skrive det meningsløse tal 70 for minutterne. Da grækerne brugt alphabetet til tal også, α=1, β=2, osv. var symbolet for 70 tilfældigvis *omikron,* o.

Astronomi

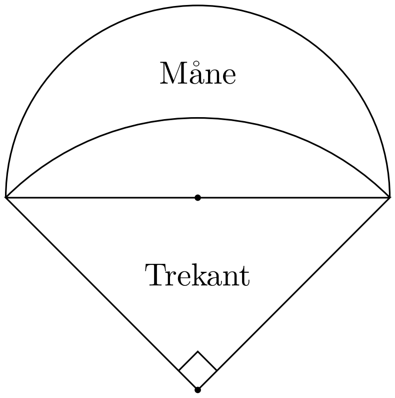
De græske astronomer var ikke tilfredse med gudernes viljer. De lavede en veritabel matematisk model for planeternes vagabondering. De forestillede sig jordkloden som en kugle, fixstjernerne som lys på en sfære langt uden om og planeternes baner givet som såkaldte epicykler, dvs. små cirkulære baner, hvis centrer bevæger sig i en større cirkel rundt om jorden. Aristarkos (3. årh. fvt.), med tilnavnet "mathematikos" – den alvidende – havde i sin model solen i centrum for alle planeternes små cirkler.



Geometri

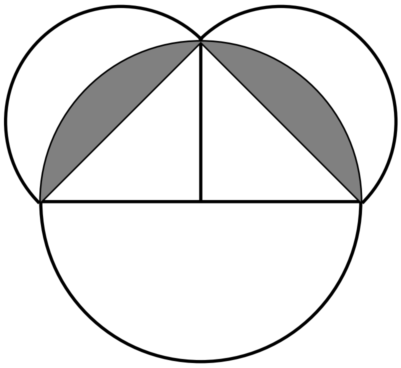
Pythagoras (6. årh. fvt.) var lige så glad for tallene som Assyrerne. Men han gjorde den iagttagelse, at hypotenusen i en ligebenet retvinklet trekant med kateterne 1 ikke kan måles med rationale tal. Eller om man vil, diagonalen i et kvadrat med siden 1 er $\sqrt{2}$, der ikke er rational. Disse iagttagelser fik grækerne til udvikle geometrien til beskrivelse rummet uafhængigt af tallene. De arbejdede direkte med figurerne, 1, 2 eller 3 dimensioner.

Det lykkedes at definere et lighedsbegreb, der udtrykte at figurer havde samme areal eller samme rumfang, uden at disse størrelser blev udregnet som tal. De kunne f. eks. bevise, at Hippokrates' (5. årh. fvt.) måne er lige så stor som en vis ligebenet og retvinklet trekant.



Har trekanten katete 1 og dermed efter vores mening hypotenuse $\sqrt{2}$ og areal $\frac{1}{2}$, så er månen tegnet af to cirkelbuer med radierne 1 og $\frac{\sqrt{2}}{2}$ og centrum i trekantens toppunkt og hypotenusens midtpunkt hhv. Denne måne har altså også arealet $\frac{1}{2}$.

Beviset for denne identitet er forbløffende simpelt. Se på figuren:



Da cirklers arealer er proportionale med diagonalernes kvadraters arealer med samme faktor, gælder Pythagoras også for halvcirkler. Så arealet af halvcirklen over hypotenusen er lig med summen af arealerne af de to halvcirkler over kateterne. Men så er trekantens areal lig med den store halvcirkel minus de to skraverede omsåder og dermed lig med summen af de to små halvcirkler minus de to skraverede. Halvdelen af trekanten har derfor samme areal som månen.

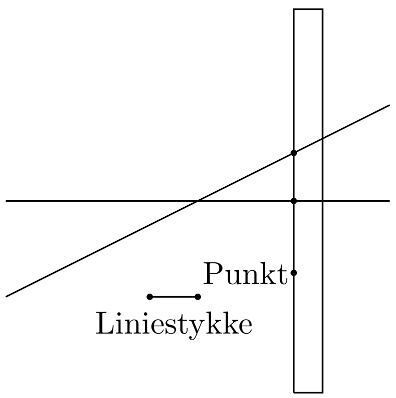
Grækernes geometri sammenlignede figurer med figurer og undgik tal. De stillede visse krav – på græsk axiom, – som skulle afspejle den geometriske praksis, at tegne med passer og lineal. F. eks. axiomerne, at gennem to punkter går der en ret linie, og givet to punkter, så er der en cirkel gennem det ene og med det andet som centrum.

Med disse forudsætninger udledte man alle de logiske konsekvenser, man havde fantasi til og udviklede på denne måde det første eksempel på en matematik, –

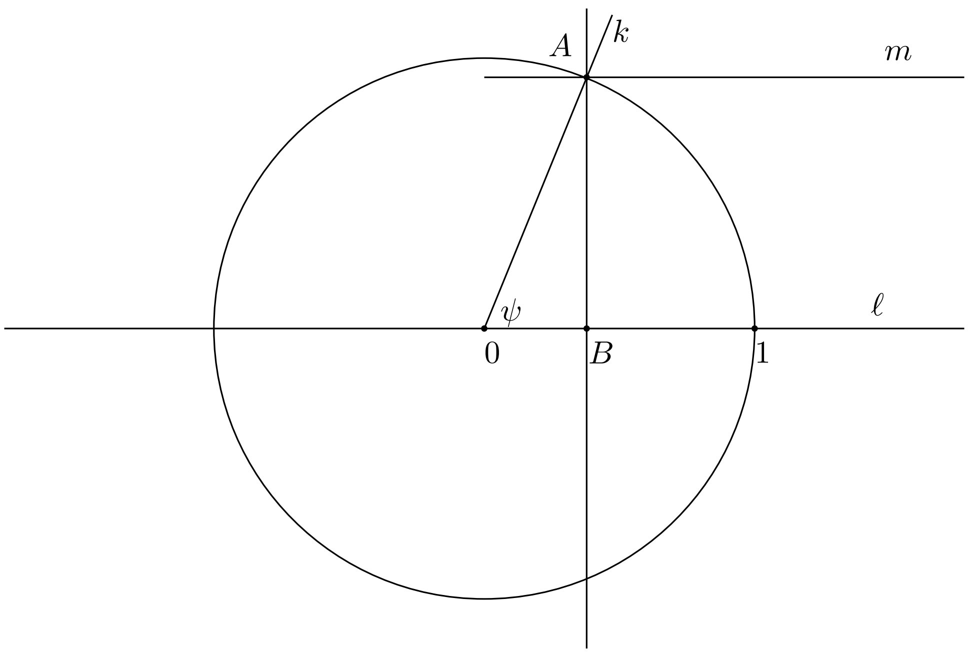
dvs. en teori, der er logisk konsistent. Verdens første matematiske model af et fysisk fænomen, det rum vi lever i.

Indskydning

Når vi taler om konstruktion med passer og lineal, er det en tilsnigelse. Vi mener byggende på Euklids (3. årh. fvt.) axiomer. Ud fra hans axiomer kan vi kun klare irrationale forhold, der kan udtrykkes med kvadratrødder. To opgaver, man betragtede, var vinklens tredeling og terningens fordobling. Begge kræver tredierødder, som man ikke kunne ud fra Euklids axiomer. Men allerede i oldtiden kunne man godt klare problemerne. Hvis vi opfatter en lineal som et redskab i den fysiske verden – allerede et problem: Hvor får man den første korrekte rette linie fra? – man kunne måske vælge en lodret lavet af en snor og en sten – ren fysik! – så kan vi afsætte et liniestykke på linealen. Er der så givet to skærende rette linier og et punkt uden for dem, kan man let tegne en linie gennem punktet, så de to linier afskærer et stykke af den foreskrevne længde på linien.

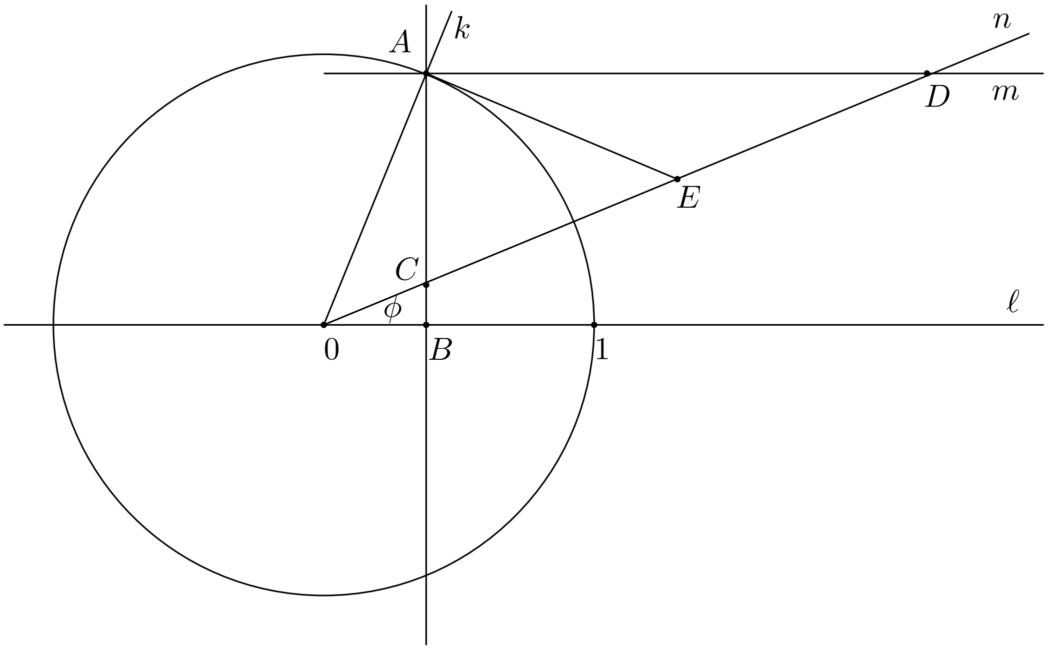


Vi antyder hvordan denne metode udfører vinkels tredeling.



Vi ønsker at tredele vinklen $\angle\psi$ mellem linierne ℓ og k. Vi tegner cirklen med centrum i 0 og radius 1 på ℓ, den skærer linien k i punktet A. Derefter tegnes AB vinkelret på ℓ. Endelig tegnes linien m gennem A parallel med ℓ.

Vi foretager nu i henhold til metoden ovenfor en indskydning, dvs. vi tegner gennem 0 linien n, der skærer AB i C og m i D, så afstanden $CD = 2$.



E afsættes som midtpunktet af liniestykket CD. Da $\triangle ACD$ er retvinklet med $\angle A$ som den rette, ser vi, at en cirkel med centrum i E og radius 1 vil gå gennem A, C og D. Altså er $AE = CE = DE = 1$ og derfor $\triangle AED$ ligebenet, så vi ser, at $\angle DAE = \angle ADE = \angle COB = \phi$. Da $\triangle OAE$ også er ligebenet, er $\angle AOC = \angle AEC = \angle EAD + \angle ADE = 2\phi$. Vi har tredelt vinkelen $\angle AOB = \psi$.

Denne metode har være kendt siden det 5. århundrede fvt.

Euclides Danicus

Man kan også indskrænke sine axiomer. Georg Mohr (1640–97) – "den danske Euklid" – beviste, at alle punkter, der kan konstrueres med passer og lineal (i Euklids forstand) kan konstueres med passeren alene. Smukt! Vi behøver altså ikke den givne rette linie!

Størrelseslæren

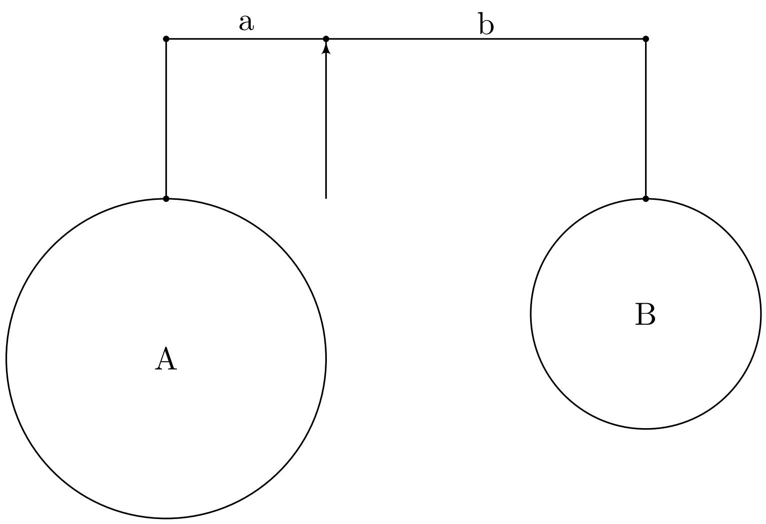
Det vigtigste hjælpemiddel i ræsonnementerne var den såkaldte størrelseslære – Euklids 5. bog – der definerer, hvad det vil sige, at om fire størrelser af samme art (dimension), A, B, C og D, kan A forholde sig til B som C forholder sig til D. Månen og trekanten ovenfor forholder sig som et par af to ens. Man kunne så om $\sqrt{2}$ sige, at siden forholder sig til diagonalen i et kvadrat som de samme i et hvilket som helst andet kvadrat.

For endimensionale størrelser, kan man gange overkors og sige, at de to forhold er ens, hvis $a \times d = b \times c$, idet der her er tale om lighed i størrelse mellem to rektangler. Men grækerne var ikke villige til at danne produktet af to plane figurer, der også havde krævet et 4–dimensionalt volumen. For endimensionale størrelser er det trivielt, at under forudsætning af ligheden mellem de to forhold, så vil også a forholde sig til c som b til d. Men ombytningen af mellemleddene for plane eller rumlige figurer, krævede mange overvejelser og kommer derfor først som sætning 16 i Euklids 5. bog.

Archimedes

Archimedes (†212 fvt.) ser to veje videre fra Euklids størrelseslære. Den ene genistreg er at udvide sammenligningerne fra rette liniestykker til krumme kurver og fra plane figurer til krumme overflader af rumlige figurer. Han kræver "blot" at disse omslutter noget konvekst. Betragt f. eks. en polygon af korder i en cirkel. Af Euklids axiomer følger, at polygonens areal er mindre end cirklens. Archimedes' axiom siger, at polygonens omkreds er mindre end cirklens. Den anden er at sammenligne forhold mellem par af en dimension med forhold mellem par af en anden dimension. På denne måde viser han, at cirklens omkreds forholder sig til diameteren som arealet til kvadratet på radius. Med andre ord: Vi kan nøjes med ét π! Han viser også, at kuglens overflade er lige så stor som den cirkelskive, der har kuglens diameter som radius. Det er til denne opdagelse, han skriver de berømte ord: "Sådan har det altid været, men jeg er den første, der har vidst det!"

Har man to liniestykker, a og b, og to flader, A og B, så a forholder sig til b som A til B, kan man godt gange overkors og sige, at de to rumlige figurer $a \times B$ og $b \times A$ har samme rumfang. Men Archimedes har en anden og på en måde mere fysisk idé. Han forestiller sig en skålvægt med armene af længde hhv. a og b og så de to figurer A og B ophængt i enden af armene i omvendt orden. Med den definition af ligheden mellem forholdene, at skålvægten er i balance, får han også defineret en sådan lighed mellem forholdet mellem rumlige figurer A og B og forholdet mellem to liniestykker, a og b, hvor krydsproduktet ville blive 4–dimensionalt. Denne definition bruger han f. eks. til at bestemme arealet af et parabelafsnit.



Altså

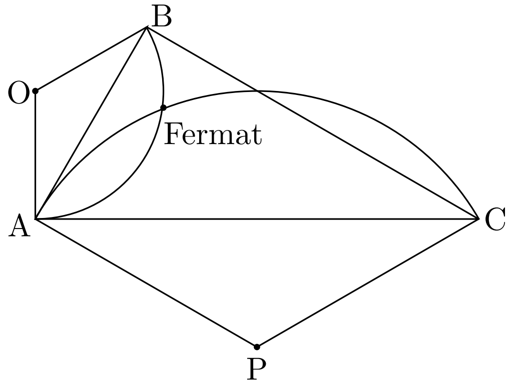
$$A : B = b : a$$

Analyse

Axiomerne som grundlag for en matematik er ikke grækernes eneste bidrag til tænkningens udvikling. En problemløsningsmetode kaldet "analyse" har også stor betydning både inden for og uden for matematikken. Givet et problem, tænker man sig at have fundet en løsning. Derefter ræsonnerer man sig frem til, hvilke begrænsninger den må opfylde. Finder man nu, at disse begrænsninger strider mod hinanden, har man fundet, at problemet er uløseligt. Metoden er blevet til det, vi kalder et indirekte bevis, "deductio ad absurdum." Er man mere heldig, finder man så mange begrænsninger, at der højst er én mulig løsning. Det er, hvad man typisk gør ved løsning af en eller flere ligninger. Man antager dem løst med en ukendt løsning, x mfl., manipulerer til man har fundet et entydigt forslag, og dermed har man så ikke løst problemet, men kun vist løsningens entydighed. Til sidst må man så sikre sig, at der er tale om en løsning og ikke blot et ufuldstændigt bevis for umuligheden. Man må "gøre prøve."

Fermat–punktet

Et eksempel, der på nydeligste vis blander fysik og matematik, er løsningen på Pierre de Fermats (1601–65) problem: Givet en trekant. Find det punkt, hvorfra summen af afstandene til de tre hjørner er mindst. Nu foretager vi en analyse ved hjælp af et fysisk tankeeksperiment. Vi tænker os de tre punkter er afsat på en plade, og i hvert punkt har vi boret et hul. Pladen holdes vandret. Fra punktet trækker vi snore, der er bundet sammen, til hvert hul og ned gennem hullerne. I enden af hver snor fastgør vi et lod, de tre lodder med samme vægt. (Snorene har ingen vægt.) Dette system vil finde ro i en slags ligevægt, med tyngdepunktet lavest muligt, dvs. der hvor summen af afstandene er minimal. Samtidig er summen af de tre træk lig med 0, ellers ville knuden flytte sig. Men for at summen kan være 0, må de tre vinkler mellem trækretningerne være ens (120°). (Det kræver selvfølgelig, at alle vinkler i den oprindelig trekant er mindre end 120°.) Et sådant punkt eksisterer og kan findes ved at konstruere to af synsvinkelbuerne over to af trekantens sider. Tilfældigvis er det sådan, at disse buer for trekanten $\triangle ABC$ har centrene O og P og buelængderne også 120^o. Buerne skærer så hinanden i Fermat–punktet.



Ikke–Euklidisk geometri

Matematikkens fordrivelse fra fysikken begynder omkring år 1800. Indtil da anses den Euklidiske geometri som den perfekte matematiske model af det fysiske rum. Filosoffen Immanuel Kant (1724–1804) er eksponent for denne opfattelse, idet han anser den Euklidiske geometri for at indeholde den eneste erkendelse, som både er "a priori" – givet på forhånd, og "analytisk" – uafhængig af erfaring. Men samtidige matematikere begynder at tvivle. Problemet er, om parallelpostulatet er et axiom eller kan udledes af de andre – mere plausible – axiomer. Det siger, at givet en ret linie og et punkt uden for denne findes netop én ret linie gennem punktet parallel med den givne, (eller som ikke skærer den givne). Heraf slutter man f. eks., at vinkelsummen i en trekant er 180° (Euklid: "To rette.") Utallige forgæves forsøg har været gjort på at udlede denne påstand af de øvrige axiomer.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) må have haft sine tvivl, – eller rettere set postulatets uafhængighed af de øvrige axiomer. Han opfatter spørgsmålet som at spørgsmål om den relevante model for fysikken! Han foretog en geodætisk opmåling af vinklerne i en trekant mellem de tre tyske bjergtoppe, Brocken, Hohenhagen og Inselberg, for at se, om vinkelsummen også i virkeligheden var 180°. Det fandt han, at den var.

Men andre, Nicolai Ivanovitsch Lobatschevskij (1793–1856) og Johann Bolyai (1802–60) udviklede ikke–euklidiske geometrier med parallelpostulatet erstattet enten af det axiom, at to forskellige rette linier altid skærer hinanden ("elliptisk geometri"), eller at det axiom, at der til en ret linie og et punkt uden for denne gennem punktet findes evt. flere rette linier, der ikke skærer den givne ("hyperbolsk geometri").

Dermed kom matematikerne til at dyrke matematikker uden hensyn til deres eventuelle sammenhæng med fysikken. Samtidig begyndte man at betragte rum med et vilkårligt antal dimensioner.

At disse verdensfjerne matematiske modeller kunne være fysisk relevante, var der dog nogen, der så. William Kingdon Clifford (1845–79) skrev et abstract til en afhandling, "On the Space Theory of Matter" i 1876, en forløber for den relativitetsteori, Albert Einstein (1879–1955) blev berømt for. At fysikere pludselig finder anvendelse for en i lang tid foreliggende matematik, er sket før. Det mest slående eksempel er Johannes Keplers (1571–1630) ellipse som model for Marsbanen. Der anvender han et keglesnit, som kendtes fra oldtidens matematik, fra Euklid og senere Apollonios (2. årh. fvt.).

Sådan er det vel for det meste nutildags. Kvantemekanikken finder til sin glæde flere foreliggende matematiske teorier. I første omgang Lie–grupper, Sophus Lie (1842–99), i anden von Neumann–algebra, John von Neumann (1903–57).

Mængdelæren

Samtidig har matematikerne forladt det fysiske indhold og vender sig mod en semantik byggende på Georg Cantors (1845–1918) "mængdelære," der er svær at holde styr på. Axiomerne for den synes at føre tanken til modstrid med det samme. Man kan vise, at for enhver mængde må mængden af delmængder være større end mængden selv. Det betyder, at der ikke kan eksistere en største mængde, f.

eks. ikke mængden af alle mængder, det såkaldte *Russell paradoks,* efter Bertrand Russell (1872–1970).

Bevis for Russell's paradoks

For endelige mængder gælder, at en mængde med n elementer har 2^n delmængder, og uligheden $n < 2^n$ gælder for alle n.

Det abstrakte bevis kan gå sådan: Lad A være en mængde og D mængden af dens delmængder. Hvis de var lige store, kunne vi finde en funktion, $f : A \to D$, så enhver delmængde, $d \in D$, var billedet af et af elementerne, $a \in A$. Men betragt specielt delmængden

$$b = \{x \in A | x \notin f(x)\}$$

Antag, at $b = f(y)$. Hvis nu $y \in b$, så slutter vi af definitionen, at $y \notin b = f(y)$. Og hvis $y \notin b = f(y)$, så slutter vi af definitionen, at $y \in b$. Altså er der altid delmængder, der ikke er billeder af elementer fra A, så der er altid flere delmængder end elementer i enhver mængde.

Banach–Tarskis paradoks

Dette berømte paradoks skyldes Felix Hausdorff (1868–1942), men nævnes efter Stefan Banach (1892–1945) og Alfred Tarski (1901–83), der skrev om det i 1924, med henvisning til Hausdorffs bog, *Grundzüge der Mengenlehre* fra 1914.

I al sin enkelhed går det ud på at dele en sfære uden sit centrum i 3 kongruente, disjunkte delmængder på en sådan måde, at de to af dem kan sættes således sammen, at de tilsammen fylder hele sfæren. Et sådant fænomen strider jo mod vores fysiske intuition. Men med de uendelige mængder in mente er det jo ikke så mærkeligt. Tager vi de naturlige tal, 1,2,3,... og fjerner halvdelen, f. eks. alle de ulige tal, er der tilbage de lige, 2,4,6,... som vi jo får af samtlige ved at gange hvert af dem med 2. Hvis man på snedig vis danner sådanne punktfølger i mystiske baner rundt på sfæren, kan princippet genbruges.

Matematisk set drejer sagen sig jo blot om, at hvis man definerer et rumfang, så alle mængder har et rumfang, så kan det ikke have den naturlige fysiske egenskabe, at foreningen af to disjunkte figurer har et rumfang, der er summen af delenes, Vi må konkludere, at Hausdorffs delmængder af sfæren ikke kan have et sådant fysisk fornuftigt rumfang. Vi siger, at de ikke er målelige. I fysikken indskrænker man sig til mængder, der er målelige.

Et rent logisk paradoks

Det er nu ikke mængdelæren alene, der giver paradokser. Allerede den rene logik er suspekt. Et morsomt eksempel:

På de to skuffer i en dragkiste står to tekster: Første skuffe: Ringen er i den anden skuffe. Anden skuffe: Kun én af sætningerne på skufferne er sand. Nu kan man tænke sig, at sætningerne er sande eller falske, det ved vi ikke. Falske sætninger findes. Men er den anden sætning sand, så er den første åbenbart falsk, så ringen må være i den første skuffe. Og er den anden sætning falsk, så er begge sætninger falske, og ringen må også i dette tilfælde være i den første skuffe.

Men i den fysiske verden er der intet til hinder for, at en eller anden logisk ignorant har lagt ringen i den anden skuffe.