Alt med måde

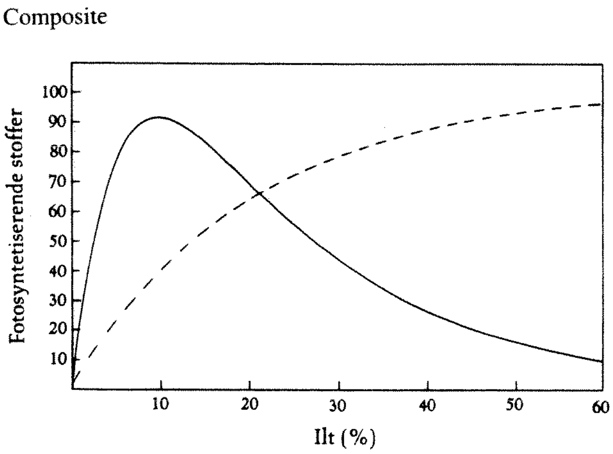
Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

Man kan undre sig over den enorme forskel på Jordens og dens nærmeste naboers livsbetingelser. Hvilket helt utroligt svineheld at vi har vand, ilt, kuldioxyd og salt, endda i så behagelige koncentrationer, for slet ikke at tale om den stabile temperatur; vi bliver hverken kogt som på Venus eller frosset ihjel som på Mars.

Hvordan bærer vi os ad med at efterleve Solons vejledning fra Apollotemplet i Delphi, μηδὲν 'ἀγαν, "aldrig for meget"? Er det et tilfælde, der ligner en tanke, eller der det omvendt?

Tænk på, at ved en iltkoncentration på 15% eller derunder er det umuligt at få ild på et stykke træ, mens skovene går op i luer ved selvantændelse eller lynnedslag som ingenting, så snart iltkoncentrationen når op på 25%.

I stedet for at tænke på for høj og for lav iltkoncentration som Skylla og Charybdis, må man forestille sig katastroferne som dele af en selvregulerende mekanisme. Når skovene brænder, bruges ilten, så koncentrationen falder. Og når skovene ikke brænder, vokser de og producerer ilt ved fotosyntese. De 21% er en ligevægtsværdi, som er i ligevægt med en vis mængde fotosyntetiserende planter.



Figur 1. Mængderne af fotosyntetiserende stoffer er angivet i procent af, hvad der overhovedet er plads til. Den fuldt optrukne linie angiver derfor, hvor stor udnyttelsesgrad den pågældende iltkoncentration fører til, mens den stiplede omvendt viser, hvilken iltkoncentration, der bliver resultatet af en sådan mængde fotosyntetiserende stoffers aktivitet.

Sådan har det været længe, men ikke altid. Der er en ligevægt uden ilt, men med en høj koncentration af metan og kuldioxyd og et liv af bakterier og lignende iltskyende organismer. De lever for resten endnu, beskyttet mod ilten f. eks. i et tarmsystem hos et dyr eller på bunden af oceanerne. Men denne ligevægt bliver i virkeligheden ustabil, så snart en organisme har opfundet fotosyntesen. Denne starter en iltproduktion, der først standser, når koncentrationen når et niveau, der giver mulighed for iltforbrugende brande.

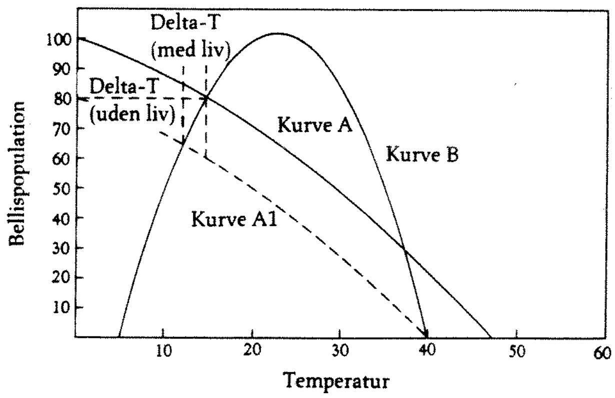
Den beskrevne dynamik illustreres i figur 1 med to kurver, den fuldt optrukne, der viser plantelivets omfang som funktion af iltkoncentrationen, mens den stiplede viser iltkoncentrationens afhængighed af omfanget af plantevækst. Der er ligevægt i de to skæringspunkter, i 0 er den ustabil, og ved en koncentration på 21% er ligevægten stabil.

Det afspejles af den (for–)historiske udvikling. I den første milliard år fra livets opståen befandt det sig i den ustabile ligevægtsstilling på 0% ilt. Fotosyntesens mulighed er, hvad der efter dens opfindelse gjorde ligevægten ustabil. En forbløffende hurtig vækst – under 100 millioner år – af de fotosyntetiserende organismer bragte koncentrationen op på de 21%, som den har holdt sig nær i 2,5 milliarder år.

Dette eksempel har inspireret til den opfattelse, at de levende organismer på vor klode selv regulerer de fysiske vilkår, vi lever under.

Det gælder muligvis også temperaturen, selv om varmen i stort omfang kommer fra solen. Det er jo muligt for de levende organismer at påvirke opsugning og frastødning af varmen ved valg af egen farve og ved styring af skydække.

Tænker man sig en sammenhæng som på nedenstående figur, der er tænkt som beskrivelse af en planet bevokset med bellis, så finder man en ustabil og en stabil ligevægtstemperatur.



Figur 2. Bellispopulationen er angivet i procent af, hvad der overhovedet er plads til. Kurven B angiver derfor, hvor stor udnyttelsesgrad den pågældende iltkoncentration fører til, mens kurverne A og A1, der svarer til 2 forskellige lysstyrker af stjernen, viser, hvilken iltkoncentration, der bliver resultatet af en sådan mængde af bellis.

Man beskriver dynamikken som herover ved hjælp af to simple funktioner, $y = f(x)$, der beskriver plantevæksten som funktion af temperaturen, og $x = g(y)$, der beskriver temperaturen som funktion af plantevæksten. Dynamikken består i en iteration, man begynder med en vis temperatur, x_0, beregner plantevæksten $y_0 = f(x_0)$, og derefter temperaturen, $x_1 = g(y_0)$, osv., og derved en følge af temperaturer, $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ Spørgsmålet er nu, om dette dynamiske system er stabilt forstået på den måde, at følgen (x_n) holder sig begrænset, evt. konvergerer mod en ligevægt, x^*.

Ligevægt er en reproducerende temperatur, det skal gælde, at hvis vi finder plantevæksten $y^* = f(x^*)$, så finder vi igen temperaturen $x^* = g(y^*)$. Temperaturfølgen forbliver i x^*. Spørgsmålet er nu, om talfølgen (x_n) konvergerer mod x^* eller ej.

Lad os definere $h(x) = g(f(x))$. Talfølgen er defineret ved

$$x_{n+1} = h(x_n)$$

og vi ved, at $x^* = h(x^*)$. Lad os studere forskellen, $x_n - x^*$. Det gælder, at

$$x_{n+1} - x^* = h(x_n) - h(x^*)$$

Hvis nu h er differentiabel, så vil der findes et punkt, x, mellem x^* og x_n, så at

$$h(x_n) - h(x^*) = h'(x)(x_n - x^*) \qquad (1)$$

Det skyldes simpelthen, at funktionen

$$k(x) = h(x) - h(x^*) - \frac{h(x_n) - h(x^*)}{x_n - x^*}(x - x^*)$$

antager værdien 0 i punkterne x^* og x_n, og i et indre punkt antager sin største eller mindste værdi. I begge disse punkter har k vandret tangent, altså $k'(x) = 0$. Heraf følger (1).

Hvis det nu gælder, at $|h'(x)| \leq q < 1$, så slutter vi, at

$$|h(x_n) - h(x^*)| = |h'(x)||x_n - x^*| \leq k|x_n - x^*|$$

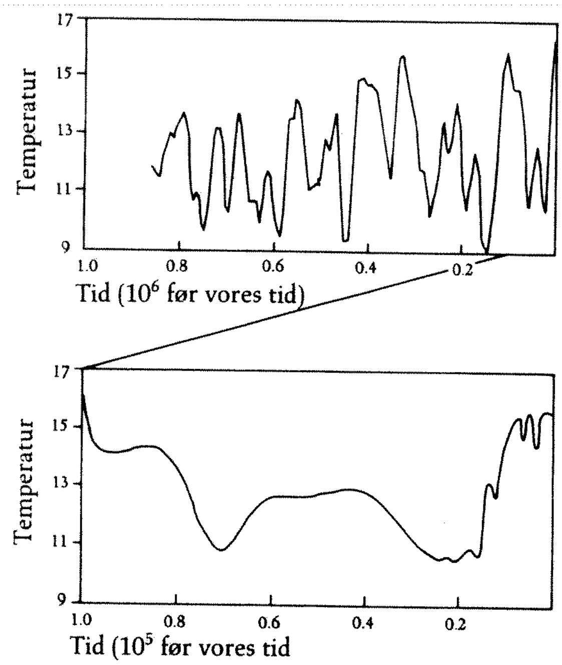
og ved gentagelse af argumentet, at

$$|x_n - x^*| \leq k^n|x_0 - x^*|$$

Noget kunne tyde på, at vi i virkeligheden har tilfældet $h'(x^*) > 1$. Temperaturen har jo svinget i tidens løb med en periode af størrelsesorden 100000 år mellem 11 °C og 17 °C. I perioder har vi istid, med lav gennemsnitstemperatur, lavt indhold af kuldioxyd og omfattende plantevækst. Man må huske, at når store vandmasser er bundet i indlandsis, så er kontinentalsoklerne tørlagt og de tropiske landområder derfor langt større end i mellemistiderne. Den nærmere mekanisme er ukendt, men det lykkes for planterne at starte en temperaturstigning, der først standser, når isen næsten er væk, de tropiske landområder decimeret og havene fortyndet til den lave saltkoncentration, vi har i øjeblikket. På et tidspunkt vil den høje temperatur, vi nyder, ændre refleksionen af sollyset, så vi får et temperaturfald, der forstærkes af den første oversomring af snedækket.

Men det kan vi også udlede af den nærmere beskrivelse af funktionen, h. Hvis der findes en periode, x_1^* og x_2^* med $x_1^* = h(x_2^*)$ og $x_2^* = h(x_1^*)$, så vil det afsløre sig som et par af fixpunkter for funktionen $h^2(x) = h(h(x))$. Og de vil være stabile, og dermed perioden stabil, hvis differentialkvotienten er numerisk mindre end 1, altså hvis

$$\left|\frac{dh^2(x_1^*)}{dx}\right| = |h'(x_2^*)h'(x_1^*)| < 1$$



Figur 3. Temperaturens historie under de sidste istider.

Med andre ord, sådanne simple dynamiske systemer, som her er omtalt, er sagtens i stand til at beskrive såvel et spring i iltkoncentrationen som en svingning mellem istider og mellemistider, som et samspil mellem den "døde" natur og det levende liv.

Måske er det ikke blot livsvisdom at undgå yderligheder, men en livsnødvendighed, som livet er indrettet til og umiddelbart indretter sin omverden efter.

Illustrationerne er hentet fra James E. Lovelock, *Jordens tider. En biografi om GAIA,* Hovedland, Randers 1989.

Mogens Esrom Larsen er redaktør af matematikken i KVANT. Han er lektor ved Københavns Universitet.