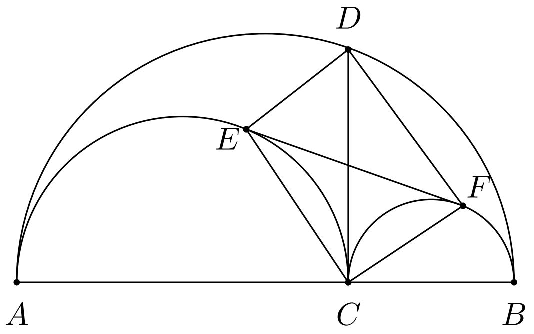
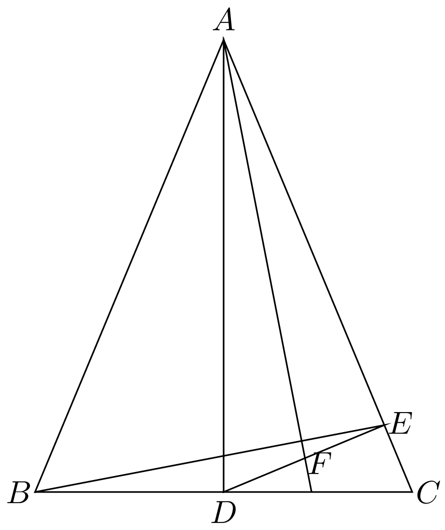
Opgave – Firkantet



Lad C være et vilkårligt punkt på liniestykket AB mellem A og B, og tegn halvcirkler til samme side over diametrene AB, AC og CB. Lad D være det punkt på halvcirklen AB, der har CD vinkelret på AB, og lad EF være fællestangenten til de to små halvcirkler.

Vis, at $ECFD$ er et rektangel.

Opgave – Trekantet



Trekanten $\triangle ABC$ er ligebenet med $AB = AC$, D er midtpunktet på BC, E på AC er det punkt, hvor ED er vinkelret på AC og F er midtpunktet af DE.

Vis, at AF står vinkelret på BE.

Opgave – Kvadratisk

n er et helt tal, så $2n + 1$ er et kvadrattal. Vis, $n + 1$ er sum af to sukcessive kvadrattal.

Svar – Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n+1}{n^2}$ er et helt tal.

Det er klart, at tallet $n = 3$ har egenskaben (1). Jeg påstår, at det er det eneste tal $n > 1$ med denne egenskab.

Beviset består af følgende trin:

(i) Hvis n har egenskaben (1), er n ulige.

(ii) Hvis n har egenskaben (1), har n også egenskaben

$$n | 2^n + 1 \tag{2}$$

(iii) Hvis n har egenskaben (2), og p er den største primtalsdivisor i n, gælder

$$n | 2^{n/p} + 1.$$

(iv) Hvis n har egenskaben (2), og p er den største primtalsdivisor i n, har tallet n/p egenskaben (2).

(v) Hvis n har egenskaben (2), er n delelig med 3, og hvis $n > 3$, er n deleligt med 3^2. item(vi) Hvis n er delelig med 3^2, har n ikke egenskaben (1).

Påstanden følger let af (i)–(vi).

Bevis for (i):. Da $2^n + 1$ er ulige, må n være ulige.

Bevis for (ii):. Klart.

Bevis for (iii):. Betragt den multiplikative gruppe G bestående af de restklasser modulo n, som er primiske med n. Hvis n har primfaktoropløsningen

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k},$$

hvor $2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, er G's orden

$$\phi(n) = (p_1 - 1)p_1^{e_1-1}(p_2 - 1)p_2^{e_2-1} \cdots (p_k - 1)p_k^{e_k-1},$$

og altså har vi

$$2^{\phi(n)} = 1 \text{ i } G.$$

Ifølge (2) er $2^n = -1$ i G, og altså $2^{2n} = 1$ i G.

Lad o betegne ordenen af 2's restklasse i gruppen G. Så er o divisor i såvel $\phi(n)$ som $2n$. Da p_k kun forekommer i potensen $e_k - 1$, forekommer p_k højst i potensen $e_k - 1$ i o's primfaktoropløsning, og da o er divisor i $2n$, er o divisor i $2p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}$.

Da p_k er ulige, følger heraf, at o er divisor i $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}$, og altså at

$$2^{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}(p_k-1)} = 1 \text{ i } G.$$

Da

$$\begin{aligned} n/p_k &= p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1} \qquad\qquad , \\ &= n - p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k-1}(p_k - 1) \end{aligned}$$

er

$$2^{n/p_k} = 2^n 2^{-p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k - 1}(p_k - 1)} = -1 \text{ i } G,$$

som påståaet.

Bevis for (iv):. En umiddelbar følge af (iii).

Bevis for (v):. Ved brug af (iv) kan vi successivt fjerne primfaktorer i n, indtil vi ender med en divisor d af formen $d = p(= p_1)$, og med egenskaben (2).

Ved at bruge (iii) med n erstattet af p fås

$$p | 2^{p/p} + 1 = 3,$$

og altså $p = 3$.

Hvis $n > 3$, udfører vi den samme proces (at fjerne primfaktorer), men nu standser vi, når der er to primfaktorer i d, altså ved en divisor d i n af formen $3d$, og med egenskaben (2).

Nu bruger vi (iii) med n erstattet af d, og får

$$3p | 2^{3p/p} + 1 = 9,$$

og altså $d = 3^2$.

Bevis for (vi):. Vi viser først, at der for ethvert positivt helt tal k gælder, at $2^{3^k} + 1$ kan skrives

$$2^{3^k} + 1 = (3m + 1)3^{k+1},$$

hvor m er et helt tal.

Beviset føres ved induktion. Påstanden er opfyldt for $k = 1$ med $m = 0$, så lad os antage, at den er opfyldt for k, og lad os se på

$$2^{3^{k+1}} + 1 = ((3m + 1)3^{k+1} - 1)^3 + 1,$$

som udregnes til

$$\begin{aligned} &((3m + 1)3^{k+1})^3 - 3((3m + 1)3^{k+1})^2 \\ &+ 3(3m + 1)3^{k+1}, \end{aligned}$$

der har den ønskede form.

Lad nu n være et ulige tal, som er deleligt med 3^2 (tilfældet n lige er uinteressant ifølge (i)), og lad os skrive n på formen $n = 3^k u$, hvor $k \geq 2$ og u er et ulige tal, som ikke er deleligt med 3.

Så er

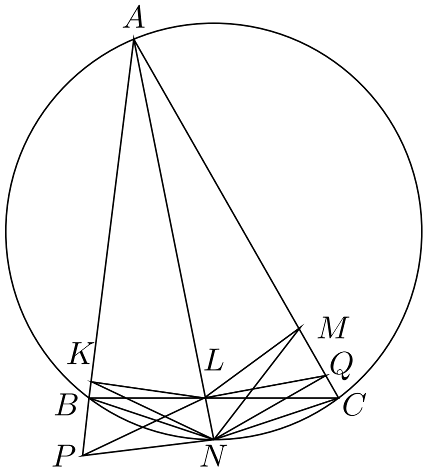
$$\begin{aligned} 2^n + 1 &= ((3m + 1)3^{k+1} - 1)^u + 1 \\ &= \sum_{j=1}^{u} \binom{u}{j} (-1)^{u-j} ((3m + 1)3^{k+1})^j. \end{aligned}$$

Her er alle led undtagen leddet svarende til $j = 1$ delelige med 3^{2k}, men så er $2^n + 1$ ikke deleligt med 3^{2k}, og derfor heller ikke med n^2.

Svar – Trekantet

I en spidsvinklet trekant $\triangle ABC$ skærer vinkelhalveringslinien fra A siden BC i punktet L og den omskrevne cirkel i punktet N. Fra punktet L nedfældes de vinkelrette på AB og AC, fodpunkterne kaldes hhv. K og M.

Vis, at firkanten $AKNM$ har samme areal som trekanten $\triangle ABC$.



Længden af et linjestykke, fx BN, betegnes $|BN|$ og arealet af en polygon, fx AKNM, betegnes $|AKNM|$.

Da $\angle BAN = \angle NAC$, er $\smile BN = \smile NC$, og altså $|BN| = |CN|$.

Fra punktet N nedfældes de vinkelrette på AB og AC; fodpunkterne kaldes hhv. P og Q. Af symmetrigrunde er $|KL| = |LM|$ og $|PN| = |NQ|$.

I de retvinklede trekanter $\triangle PBN$ og $\triangle QCN$ er $|PN| = |QN|$ og $|BN| = |CN|$, og altså har vi også $|PB| = |QC|$.

I de to trekanter $\triangle LBP$ og $\triangle LCQ$ er grundlinierne BP og CQ lige lange, og da højderne LK og LM også er lige lange, er $|LBP| = |LCQ|$.

Da linjerne KL og PN er parallelle er $|KPL| = |KNL|$, og analogt er $|LQM| = |LNM|$ (iøvrigt er trekanterne $\triangle KPL$ og $\triangle MQL$ kongruente, og det samme gælder $\triangle KNL$ og $\triangle MNL$, men det får vi ikke brug for).

Af antagelsen om, at $\triangle ABC$ er spidsvinklet, følger let, at punkterne K og M ligger i det indre af siderne AB og AC. For bestemtheds skyld antages det, at $\angle B > \angle C$ (tilfældet $\angle B = \angle C$ er let).

Da

$$\begin{aligned}\angle NBA = \angle NBC + \angle B &= \frac{\angle A}{2} + \angle B \\ &> \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

ligger fodpunktet P på AB's forlængelse, og på den anden side ses Q at ligge på liniestykket AC mellem M og C.

Vi har så

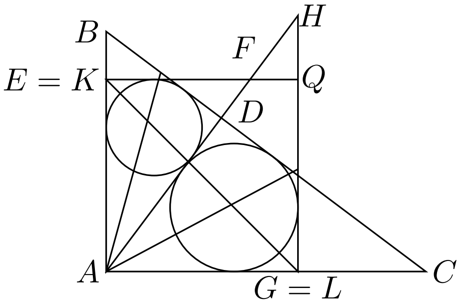
$$\begin{aligned}|ABC| &= |AKL| + |KBL| + |ALM| + |LCM| \\ &= |AKL| + |KPL| - |BPL| \\ &+ |ALM| + |LQM| - |LCQ| \\ &= |AKL| + |KNL| + |ALM| + |LNM| \\ &= |AKNM|\end{aligned}$$

QED.

Svar – Retvinklet

$\triangle ABC$ er retvinklet med den rette vinkel i A. Lad D være fodpunktet for højden fra A. Linien gennem centrene for de indskrevne cirkler i trekanterne $\triangle ABD$ og $\triangle ACD$ skærer siderne AB og AC i hhv. K og L.

Vis at arealet af $\triangle AKL$ er højst halvt så meget som arealet af $\triangle ABC$.



Lad $\triangle AFE$ være billedet af $\triangle ABD$ ved spejlingen i halveringslinjen for $\angle BAD$, og lad $\triangle AHG$ Af symmetrigrunde er den indskrevne cirkel for $\triangle ABD$ også indskrevet i $\triangle AFE$, og den indskrevne cirkel for $\triangle ACD$ også indskrevet i $\triangle AHG$.

Da $|AE| = |AG|$, er AE og AG sider i et kvadrat $AEQG$, hvis fjerde vinkelspids Q er skæringspunktet mellem de to linjer, der indeholder linjestykkerne EF og GH.

Da diagonalen EG halverer vinklerne $\angle AEF$ og $\angle AGH$, ligger centrene for begge de betragtede indskrevne cirkler på EG, og altså er $E = K$ og $G = L$. Da kvadratet $AEQG$ er indeholdt i polygonen $AEFHG$, er

$$|ABC| = |AEF| + |AGH| \geq |AEQG| = 2|AEG|,$$

som påstået. Det ses, lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis $|AB| = |AC|$.

Svar – Begge dele

Lad D være et punkt inden i en spidsvinklet trekant, $\triangle ABC$, sådan at

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^o \text{ og } AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

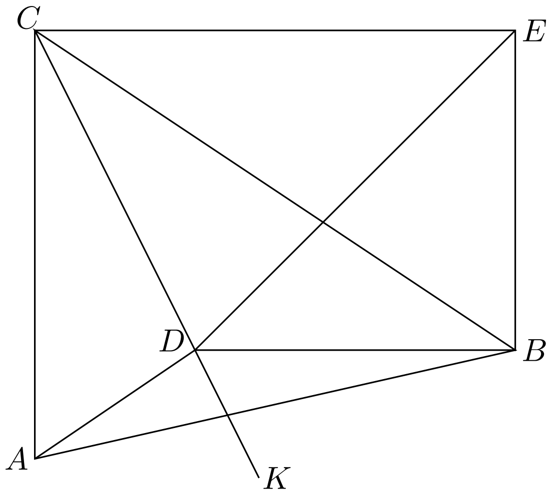
(a) Beregn værdien af forholdet
$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$$

(b) Vis, at tangenterne fra C til de omskrevne cirkler for trekanterne $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$ står vinkelret på hinanden.

Lad K være et vilkårligt punkt på linien CD udenfor C. Vinklerne ved D opfylder, at $\angle ADK = \angle CAD + \angle ACD$ og $\angle BDK = \angle CBD + \angle BCD$. Lægger vi dem sammen, får vi $\angle ADB = \angle CAD + \angle CBD + \angle ACB$. Sammen med første betingelse i opgaven giver det

(1) $$\angle CAD + \angle CBD = 90^0.$$

Denne ligning er nøglen til opgavens løsning.



(a) Der tegnes en retvinklet trekant, $\triangle BCE$, med E udenfor $\triangle ABC$, så $\triangle BCE \sim \triangle CAD$. Så er

(2) $$\angle CAD = \angle CBE, \qquad \angle ACD = \angle BCE$$

og

(3) $$\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BC}, \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE}$$

Den anden ligning i (2) medfører, at $\angle ACB = \angle DCE$; dette, kombineret med den anden ligning i (3) viser, at trekanten $\triangle ABC$ er ensvinklet med $\triangle DEC$, og derfor, at

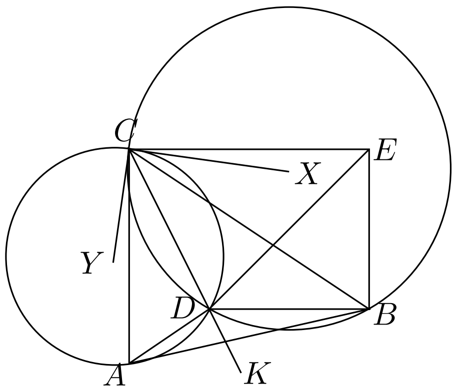
(4) $$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC},$$

Den første ligning i (2) sammen med formel (1) giver

$$\begin{aligned}\angle DBE &= \angle CBD + \angle CBE \\ &= \angle CBD + \angle CAD = 90^0.\end{aligned}$$

Endelig følger af første ligning i (3) og den anden betingelse i opgaven ($AC \cdot BD = AD \cdot BC$), at $BD = BE$. Derfor er $\triangle DBE$ en ligebenet retvinklet trekant, og altså er $DE = \sqrt{2} \cdot BD$. Indsættes dette i formel (4), får vi resultatet i (a):

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}.$$



(b) Betragt de omskrevne cirkler om trekanterne $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$. Lad CX være tangenten til den første cirkel i C og lad CY være tangenten til den anden cirkel i C (X og Y er punkter på tangenterne). Så er $\angle DCX = \angle CAD$ og $\angle DCY = \angle CBD$.

Derfor er ifølge (1) $\angle DCX + \angle DCY = 90^0$. Og da CD ligger inden for vinklen dannet af CX og CY, slutter vi, at de to tangenter står vinkelret på hinanden.

Svar – Elementært

Lad n være et positivt helt tal og lad $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ være delmængder af en mængde, B. Antag, at

(a) hver mængde A_i har netop $2n$ elementer,
(b) hver fællesmængde $A_i \cap A_j$, $i \neq j$, har præcis *ét* element,
(c) hvert element i B ligger i mindst to af mængderne A_i.

For hvilke værdier af n kan man give hvert element i B en værdi, 0 eller 1, sådan at hver mængde A_i har nøjagtig n elementer af værdi 0?

Vi viser først, at betingelsen (c) kan skærpes til følgende:

(d) hvert element i B ligger i netop to af mængderne A_i.

Antag, at et element, x_0 ligger i de tre mængder, A_k, A_ℓ og A_m. Fjern m fra mængden $\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$; tilbage er en mængde M af $2n$ elementer. Til hveret $j \in M$ tilegnes det element i A_m, der tillige ligger i A_j; der er kun et sådant element ifølge (b). Lad os kalde det $g(j)$; så er specielt $g(k) = x_0$ og $g(\ell) = x_0$.

Det følger nu af (c) at funktionen g afbilder M på A_m, der jo også har netop $2n$ elementer, (a). Derfor er g bijektiv, en modstrid.

Vi kan tælle det samlede antal elementer af værdi 0 ved successivt at gennemløbe de $2n+1$ mængder, A_i, og i hver af dem registrere de elementer af værdi 0, som vi støder på. Det giver ialt $(2n+1)n$ elementer af værdi 0, men da hvert af dem ligger i 2 af mængderne A_i, bliver hvert af dem talt med 2 gange, og altså må antallet $(2n+1)n$ være lige, dvs n må være lige.

Jeg vil omvendt vise, at hvis n er lige, så er det muligt at give elementerne i B værdierne 0 og 1 sådan, at hver mængde A_i indeholder n elementer af værdi 0.

Dertil definerer vi en afstand d på mængden $\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$ ved

$$d(i,j) = min\{|i-j|, 2n+1-|i-j|\}$$

(det er let at se, men i realiteten uvigtigt, at d faktisk er en metrik).

Lad nu $b \in B$ være givet, og lad i og $j \neq i$ være bestemt således, at $b \in A_i \cap A_j$. Så tilskriver vi b værdien 0, hvis og kun hvis $d(i,j) \leq n/2$.

Denne fordeling opfylder, at hver mængde, A_i har netop n elementer af værdi 0. Det er lettest at overskue, hvis problemstillingen anskueliggøres ved hjælp af en regulær $(2n+1)$–kant M med vinkelspidser $P_i, i = 1, 2, \cdots, 2n+1$, og B identificeres med mængden af sider og diagonaler i M, medens A_i betegner mængden af sider og diagonaler med P_i som det ene endepunkt. Den foreslåede tilskrivning af værdierne 0 og 1 svarer til, at elementer i A_i, der får værdien 0, er de n korteste linjer, der udgår fra P_i.