AFTERMATH

LØSNINGER

To af opgaverne i sidste nr. er hentet fra Frederick Mosteller, Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions, Dover, New York 1987.

Ebbe Thue Poulsen og problemklubben “Con Amore” har løst de to opgaver herfra.

En tryllekunst

Tryllekunstneren og hans assistent præsenterer publikum for 8 mønter på en række. Tryllekunstneren instruerer publikum om opgaven og forlader lokalet. Publikum vælger nu for hver mønt, om den skal være krone eller plat. Derefter oplyser publikum assistenten om deres foretrukne mønt, fx nr 5 fra venstre. Nu vender assistenten én af mønterne om efter sit valg.

Tryllekunstneren kommer ind fra kulissen og udpeger den foretrukne mønt.

Vi stiller mønterne på række og giver dem numre fra venstre mod højre, 0, 1, ..., 7. Disse tal organiserer vi som gruppen $\mathbb{Z}_2^3$, fx ved at skrive numrene binært fra 000 til 111 og definere gruppeoperationen som addition uden mente – eller, om man vil, med regnereglen $1+1=0$. Så fx er $3+6=011+110=101=5$. En række af mønter gives nu værdien, der er summen af numrene på de viste kroner. Mønsteret PPKKPKPP får således summen 2+3+5=010+011+101=100=4. Hvis nu publikum vælger at pege på mønt nr 3, så skal vi vende en mønt, så summen bliver 3 i stedet for 4. Vi skal altså løse ligningen $4+x=3$. Men da alle elementer i gruppen er deres egen inverse, er $x=3+4=011+100=111=7$. Vi skal derfor vende den sidste mønt, så vi får PPKKPKPK med summen 2+3+5+7=010+011+101+111=011=3.

Dette trick virker for enhver potens af 2, men med andre antal mønter kan kunsten ikke udføres. Prøv selv at lave tryllekunsten med 3 mønter!

En sum

I Amer. Math. Monthly April 2008 stilles som problem 11356 en opgave af Michael Poghosyan, Yerevan State University, Yerevan, Armenien.

Vis identiteten

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

Bevis:

Vi definerer den nedstigende faktoriel med angivet skridtlængde således

$$[x,d]_n := \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1}(x-jd) & n \in \mathbb{N} \\ 1 & n=0 \\ \prod_{j=1}^{-n} \frac{1}{x+jd} & -n \in \mathbb{N},\ -x \notin \{d, 2d, \cdots, -nd\} \end{cases}$$

Vi omskriver de fleste binomialkoefficienter i summen til faktorieller

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!(2k)!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(2n)!(2k+1)}$$

Faktoriellerne med et 2–tal deles i faktorieller af hvert andet led og skridtlængde 2

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!\,[2k,2]_k\,[2k-1,2]_k\,[2n-2k,2]_{n-k}\,[2n-2k-1,2]_{n-k}}{k!(n-k)!\,[2n,2]_n\,[2n-1,2]_n\,(2k+1)}$$

Nu halveres alle faktorerne, så skridtlængden bliver 1, med korrektioner af diverse potenser af 2

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!k!2^k\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k 2^k(n-k)!2^{n-k}\left[n-k-\frac{1}{2},1\right]_{n-k} 2^{n-k}}{k!(n-k)!n!2^n\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n 2^n(2k+1)}$$

Efter at have forkortet, hvad som kan, fås

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k\left[n-k-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n(2k+1)} = \frac{1}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k\left[n-k-\frac{1}{2},1\right]_{n-k}}{2k+1}$$

For at komme nævneren til livs indføres faktoriellen

$$\left[n+\tfrac{1}{2},1\right]_n \cdot \frac{1}{2} = \left[n+\tfrac{1}{2},1\right]_{n+1} = \left[n+\tfrac{1}{2},1\right]_{n-k}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\left[k-\tfrac{1}{2},1\right]_k$$

hvorved fås

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{\left[n+\frac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[k-\frac{1}{2},1\right]_k}{\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n}$$

Så kan vi skrive

$$\frac{1}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[k-\tfrac{1}{2},1\right]_k\left[n-k-\tfrac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[n+\tfrac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[k-\tfrac{1}{2},1\right]_k$$

Nu skifter vi fortegn i alle faktorerne i de faktorieller, der indeholder et k i starten

$$\frac{1}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n} \cdot \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[-\tfrac{1}{2},1\right]_k(-1)^k\left[-\tfrac{1}{2},1\right]_{n-k}(-1)^{n-k}\left[n+\tfrac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[-\tfrac{1}{2},1\right]_k(-1)^k$$

hvilket skrives pænere som

$$\frac{(-1)^n}{\left[n-\frac{1}{2},1\right]_n\left[n+\frac{1}{2},1\right]_n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[-\tfrac{1}{2},1\right]_k^2\left[-\tfrac{1}{2},1\right]_{n-k}\left[n+\tfrac{1}{2},1\right]_{n-k}(-1)^k$$

Dette udtryk genkendes som Pfaff-Saalschütz' formel, (9.1), i min nylige lærebog, *Summa Summarum,* A K Peters 2007:

Theorem 9.1. *If the – complex – numbers satisfy $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = n - 1$ we have the Pfaff-Saalschütz formula (J. F. Pfaff 1797, L. Saalschutz 1890)*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [a_1, 1]_k [a_2, 1]_k [b_1, 1]_{n-k} [b_2, 1]_{n-k} (-1)^k = [b_1 + a_1, 1]_n [b_1 + a_2, 1]_n (-1)^n$$

Så vi kan reducere til

$$\frac{1}{\left[n - \frac{1}{2}, 1\right]_n \left[n + \frac{1}{2}, 1\right]_n} [-1, 1]_n^2 = \frac{n!^2}{\left[n - \frac{1}{2}, 1\right]_n \left[n + \frac{1}{2}, 1\right]_n} =$$
$$= \frac{2^{2n} n!^2}{[2n - 1, 2]_n [2n + 1, 2]_n} = \frac{2^{4n} n!^4}{[2n - 1, 2]_n [2n, 2]_n^2 [2n + 1, 2]_n} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!(2n + 1)!}$$

Sokker, der passer til hinanden

Når sandsynligheden for at få to røde sokker er $\frac{1}{2}$, når man trækker to tilfældigt ud af en sæk med røde og sorte sokker, hvor mange er der så af hver farve i sækken?

Det samlede antal sokker betegnes med m, og antallet af røde sokker med n. Så kan man udtage et par sokker på $m(m-1)/2$ måder, og et par røde sokker på $n(n-1)/2$ måder.

Sandsynligheden for, at et tilfældigt udtaget par sokker er røde, er altså $n(n-1)/m(m-1)$, og denne sandsynlighed er $\frac{1}{2}$, hvis og kun hvis

$$m(m - 1) = 2n(n - 1)\,. \tag{1}$$

Et talpar (m, n), som er løsning til (1), giver en løsning til sokkeproblemet, hvis m og n er hele tal ≥ 2. Ligningen (1) kan omformes til

$$(2m - 1)^2 = 2(2n - 1)^2 - 1\,,$$

og det ses let, at hvis (x, y) er en heltallig løsning til

$$x^2 - 2y^2 = -1\,, \tag{2}$$

så er x og y begge ulige, således at $m = (x + 1)/2$ og $n = (y + 1)/2$ er hele. For at finde samtlige løsninger til sokkeproblemet, skal vi altså finde samtlige heltallige løsninger til (2) med $x \geq 3$ og $y \geq 3$.

For reelle tal z i ringen $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ af tal af formen $z = x + y\sqrt{2}$ med $x, y \in \mathbb{Z}$ indfører vi betegnelsen $\overline{z} = x - y\sqrt{2}$.

Vi bemærker, at der for $z, w \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gælder $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, samt at (x, y) er løsning til (2), hvis og kun hvis $z = x + y\sqrt{2}$ er løsning til

$$z\overline{z} = -1\,. \tag{3}$$

Idet vi sætter $e = 1 + 1\sqrt{2}$, ser vi, at $e\overline{e} = -1$, hvoraf følger, at z er løsning til (3), hvis og kun hvis $e^2 z$ er det.

Hermed har vi uendeligt mange løsninger til (3), nemlig

$$z_k = e^{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Her giver $z_0 = e = 1 + 1\sqrt{2}$ ikke nogen løsning til sokkeproblemet, men alle z_k med $k \geq 1$ gør, og specielt har vi $z_1 = 7 + 5\sqrt{2}$, der giver $(m_1, n_1) = (4, 3)$.

Ved brug af binomialformlen i (4), får vi

$$x_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} 2^{k-j}\,, \quad y_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j} 2^{k-j}\,,$$

der for $k \geq 1$ giver løsningen

$$m_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j+1} 2^{k-j-1} + 1\,, \quad n_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j} 2^{k-j-1} + k + 1\,,$$

til sokkeproblemet.

Da $z_k = e^2 z_{k-1} = (3 + 2\sqrt{2}) z_{k-1}$, kan følgen $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ også bestemmes rekursivt ved

$$\begin{aligned} &x_1 = 7, && y_1 = 5\,, \\ &x_k = 3x_{k-1} + 4y_{k-1}\,, && y_k = 2x_{k-1} + 3y_{k-1} && \text{for } k \geq 2\,. \end{aligned}$$

Ved indsættelse af $x_k = 2m_k - 1$, $y_k = 2n_k - 1$ heri fås rekursionligningerne

$$\begin{aligned} &m_1 = 4\,, && n_1 = 3\,, \\ &m_k = 3m_{k-1} + 4n_{k-1} - 3\,, && n_k = 2m_{k-1} + 3n_{k-1} - 2 && \text{for } k \geq 2 \end{aligned}$$

til bestemmelse af løsninger til sokkeproblemet.

Jeg vil slutte med at bevise, at dette er samtlige løsninger. Dertil vil jeg vise, at talsættene $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{\infty}$ er samtlige positive heltalsløsninger til (2). Lad nemlig (x, y) være en vilkårlig positiv heltalsløsning til (2), sæt $z = x + y\sqrt{2}$, og bemærk, at $z \geq e$.

Lad $k \geq 0$ være bestemt således, at

$$e \leq ze^{-2k} < e^3\,, \tag{5}$$

og sæt $z' = ze^{-2k}$.

Da z' kan skrives $z' = z\overline{e}^{2k}$, er $z' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, lad os sige $z' = x' + y'\sqrt{2}$.

Da $z'\overline{z'} = z\overline{z} = -1$ og $z' > 1$, er $|\overline{z'}| = |x' - y'\sqrt{2}| < 1$, hvilket kun kan være opfyldt, hvis x' og y' har samme fortegn, dvs hvis x' og y' begge er positive.

Da ${x'}^2 = 2{y'}^2 - 1$, er $x' = y' = 1$ en mulighed, medens $y' = 2, 3$ eller 4 ikke kan bruges. $y' \geq 5$ giver $x' \geq 7$, og altså $z' = x' + y'\sqrt{2} \geq e^3$ i modstrid med (5). Der må altså gælde $z' = e$, og dermed $z = z'e^{2k} = z_k$.

Travle duellanter

Duellerne i Travløse er sjældent fatale. Hver kombattant møder op på et tilfældigt tidspunkt mellem 5 og 6 om morgenen på den aftalte dag, venter 5 min på sin modstander, og går igen, hvis denne ikke er mødt op. Ellers slås de to.

Hvad er sandsynligheden for, at det kommer til kamp?

Lad (x, y) betegne ankomsttidspunkterne for de to duellanter, regnet i timer fra klokken 5. Så er sandsynlighedsfordelingen for (x, y) Lebesguemålet på enhedskvadratet $[0,1] \times [0,1]$.

Det kommer til kamp, hvis og kun hvis $|y - x| \leq 1/12$, dvs hvis og kun hvis (x, y) *ikke* ligger i en af trekanterne

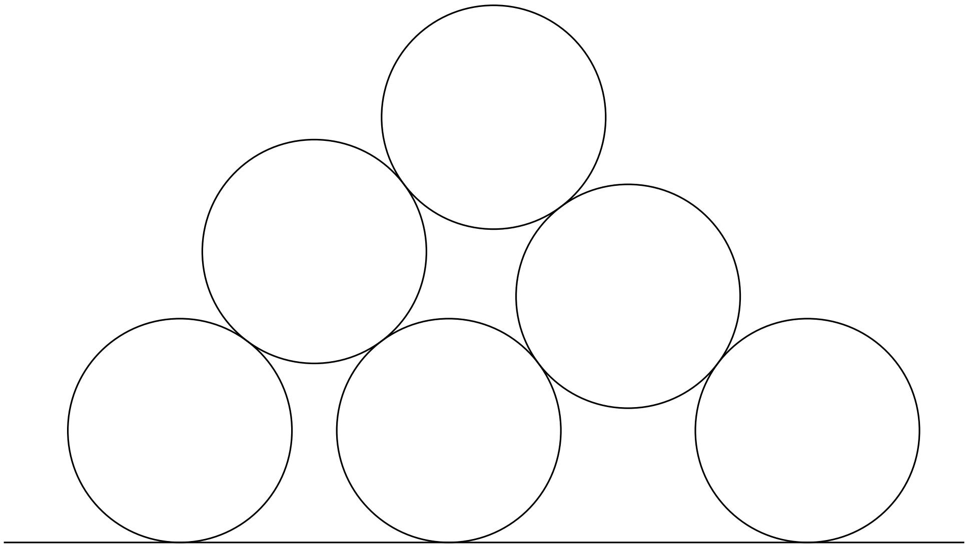
$$
\begin{array}{llll}
T_1 : & \frac{1}{12} < x \leq 1 & \text{og} & 0 \leq y < x - \frac{1}{12}\,, \\
T_2 : & 0 \leq x < 1 - \frac{1}{12} & \text{og} & x + \frac{1}{12} < y \leq 1\,.
\end{array}
$$

Sandsynligheden for, at de to duellanter mødes, er altså

$$1 - 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12} \right)^2 = \frac{23}{144}\,.$$

NYE OPGAVER

De lystige kroner



De lystige kroner

Der ligger seks kroner i énkronestykker på et bord. De tre ligger på en ret linie. De ligger ikke helt tæt sammen men så tæt at der ikke kan presses en krone til mellem to af dem.

To kroner støder til to af de tre til samme side og udenpå dem støder den sidste krone til begge de to. Nu kunne det se ud til at den sidste krone ligger lige langt fra de to yderste. Det gør den selvfølgelig hvis den tredie krone ligger lige midt mellem de to andre. Men gør den det altid?

Den mystiske pyramide

Ægyptens ældste pyramide, trinpyramiden ved Sakkara, ligner ikke Cheops' og de andre. Som navnet antyder, har den snarere form som en kæmpetrappe, mere som Mayaernes pyramider.

Hvis vi begynder fra over, er der én sten i det øverste lag, fire i det næste, ni i det tredie, osv.

Når vi nu får at vide, at antallet af sten, der ialt er medgået til byggeriet, er et kvadrattal, og at der er medgået mere end én sten, hvor mange trin har så pyramiden?

(Det er vanskeligt at bevise, at der kun er én løsning.)

Klassikeren

Et sted ude i tundraen havde man fået rejst tre kraftværker, et elektricitetsværk, et gasværk og et vandværk. Nu var det ellers et øde område, der var ialt kun tre huse, der skulle forsynes med strøm, gas og vand.

Men det var ikke helt problemfrit. Man skulle jo trække ledningerne oven på jorden, som var for stivfrossen til at grave i, men ledningerne tålte ikke at krydse hinanden. Og selv om der kun var de tre værker og de tre huse, havde ingeniørerne endnu ikke fundet en rørføring, der løste problemet.

Hvorfor ikke?

Men oppe på den ringformede asteroide, Torus II, var det lykkedes de lokale ingeniører at løse rørføringsproblemet.

Hvordan?

Æventyret

Der var engang en prins, der skulle vælge sig en prinsesse. Han havde valget mellem tre søstre, som alle var unge og smukke. Deres far var en viis gammel konge, og han ville sikre sig, at hans kommende svigersøn havde omløb i hovedet. Så han sagde til prinsen:

"Før du får min velsignelse til at ægte en af mine døtre, vil jeg sætte dit mod og din intelligens på en prøve.

Du får lov til at stille én af prinsesserne ét spørgsmål, som kan besvares med "ja" eller "nej". Den ene vil svare sandfærdigt, den anden vil svare falsk, og den tredje, som er min yndlingsdatter, kan svare sandfærdigt eller falsk, som hun vil. Hun har alligevel aldrig rettet sig efter mig.

Ud fra svaret på dit spørgsmål skal du vælge din brud. Men jeg advarer dig: Hvis du vælger min yndlingsdatter, skal du have dit hoved hugget af!"

Prinsen havde ingen anelse om, hvem der var kongens yndligsdatter, lige så lidt som han anede, hvem der ville tale sandt, og hvem falsk. Han måtte altså formulere sit spørgsmål sådan, at ligegyldigt hvem han spurgte, og ligegyldigt, hvad hun svarede, skulle han ud fra svaret kunne vælge en af de to andre til sin brud.

Naturligvis stillede prinsen et så snedigt spørgsmål, at han med sikkerhed undgik yndlingsprinsessen. Og kongen blev så imponeret, at han alligevel gav prinsen yndlingsdatteren, og de to levede lykkeligt til deres dages ende.

Hvordan mon prinsen formulerede sit spørgsmål?

En rørende historie

Et vandrør er 6,4 cm i diameter, og midt på røret er der et T–rør, så siderøret er 2,7 cm i diameter. Siderøret sidder altså nøjagtig vinkelret på hovedrøret.

Nu løber vandet i en strøm gennem hovedrøret, og en del af vandet løber ud ad siderøret. Man har nu tilsat nogle mikadopinde til vandet, og det er meningen, at de ikke må løbe ud ad siderøret.

Man har derfor spurgt kommuneingeniøren, hvor lange mikadopindene skal være, for at de ikke på nogen måde kan dreje om ad siderøret. Hvis de prøver, skal de sætte sig fast.

Hvad er den kritiske grænseværdi for mikadopindene?

Et biproblem

Betragt en regulær sekskant, der er gennemskåret i et regelmæssigt trekantet mønster. Man tænker sig, at hver side er delt i n lige store stykker, og derefter er alle de linier, der erparallelle med siderne, tegnet.

Problemet er at tælle alle forekommende regulære sekskanter på figuren.

Vejerboden

I den klassiske opgave er der givet 12 kugler, hvoraf de 11 er ens. Man skal så afsløre den aparte i 3 vejninger. Samtidig skal det afgøres, om den er lettere eller tungere end de andre.

Til hjælp har man en almindelig skålvægt med to skåle.

Men til variation af temaet har vi denne gang 14 kugler, hvoraf de 13 vejer nøjagtig 10 g. Desuden har vi et 10 gramslod.

Vi skal igen afsløre den aparte kugle i højst 3 vejninger, men det er ikke krævet, at vi finder ud af, om den er lettere eller tungere end de andre.

Hvordan skal man bære sig ad med det?

Gitterpunkterne

Forleden dag sad jeg og slog krusseduller på et almindeligt ark ternet papir. Så kom jeg for skade at lege med gitterpunkterne. Jeg valgte 5 af dem tilfældigt ud.

Så tegnede jeg alle 10 forbindelseslinier mellem dem. Og hver gang var der et af liniestykkerne, der passerede hen over et gitterpunkt.

Hvorfor det?

Pythagoras

En Pythagoræisk trekant med heltallige sider, x, y og z, der opfylder

$$x^2 + y^2 = z^2$$

må have mindst én side som et lige tal. Og ingen Pythagoræisk trekant har en side af længde 2. Men man kan tænke sig en Pythagoræisk trekant, hvis sider er to primtal og et tal, der er det dobbelte af et primtal.

Opgaven går ud på at bestemme *samtlige* Pythagoræiske trekanter af den slags.

De logiske frimærkesamlere

Tre personer – A, B og C – var alle fuldstændig logiske. De kunne alle tre øjeblikkelig drage alle de logiske konsekvenser af alle præmisser. Desuden vidste hver af dem, at de to andre var lige så logiske som han selv. Man viste dem syv frimærker; to røde, to gule og tre grønne. Derpå fik de bind for øjnene, og et frimærke blev klistret i panden af dem hver især, mens de resterende frimærker blev lagt ned i en skuffe. Da øjenbindene var fjernet, spurgte man A: "Kan du nævne én farve, som dit frimærke i hvert fald ikke har?" "Nej," svarede A. Så fik B det samme spørgsmål, og han svarede også "nej".

Er det muligt ud fra disse oplysninger at regne sig frem til, hvilken farve A's frimærke havde? Eller B's? Eller C's?

Joakim von And i Sahara

Joakim von And er som bekendt verdens rigeste og nærigste and. Da han derfor engang skulle køre over Sahara i jeep, måtte han jo spekulere på, hvor billigt det kunne lade sig gøre.

Nu var hans jeeps kun i stand til at køre en trediedel af vejen på en fuld tank, men til gengæld kunne alle hans jeeps køre fuldautomatisk uden chauffør, og han havde masser af dem. Og han kunne let tømme og fylde tankene midt i ørkenen uden at spilde. Men med fuld tank menes så meget benzin, som en jeep på nogen måde kan medbringe.

Problemet er, hvordan slipper Joakim von And billigst muligt over ørkenen, når hele hans flåde af jeeps står på den ene side. Hvor mange jeeps skal han bruge, og hvordan skal han bære sig ad? (Han kan bare efterlade sine jeeps i ørkenen, de skal ikke returneres.)