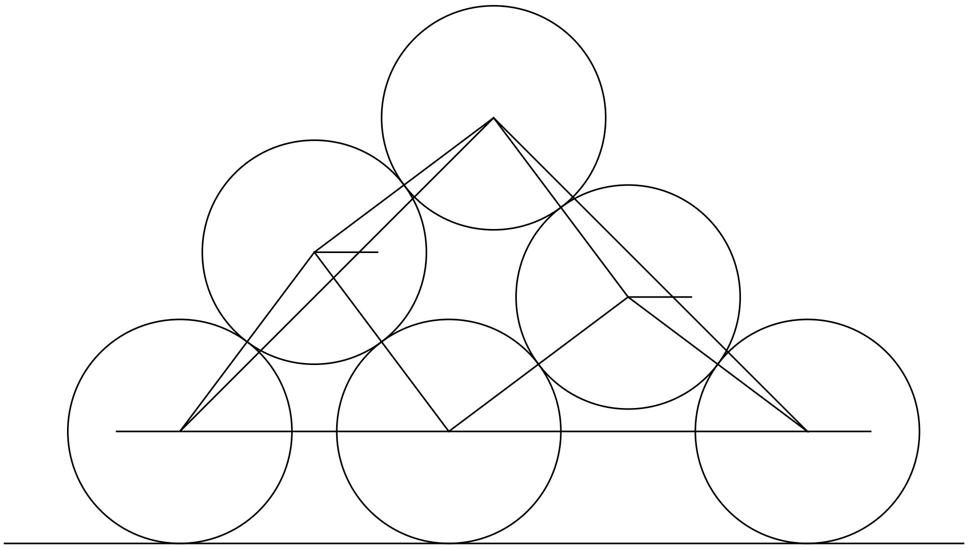
AFTERMATH

LØSNINGER

Problemklubben "Con Amore" har løst de fleste af opgaverne.

De lystige kroner



Der ligger seks kroner i énkronestykker på et bord. De tre ligger på en ret linie. De ligger ikke helt tæt sammen men så tæt at der ikke kan presses en krone til mellem to af dem.

To kroner støder til to af de tre til samme side og udenpå dem støder den sidste krone til begge de to. Nu kunne det se ud til at den sidste krone ligger lige langt fra de to yderste. Det gør den selvfølgelig hvis den tredie krone ligger lige midt mellem de to andre. Men gør den det altid?

Ja, da de to smalle trekanter er kongruente.

Den mystiske pyramide

Ægyptens ældste pyramide, trinpyramiden ved Sakkara, ligner ikke Cheops' og de andre. Som navnet antyder, har den snarere form som en kæmpetrappe, mere som Mayaernes pyramider.

Hvis vi begynder fra over, er der én sten i det øverste lag, fire i det næste, ni i det tredie, osv.

Når vi nu får at vide, at antallet af sten, der ialt er medgået til byggeriet, er et kvadrattal, og at der er medgået mere end én sten, hvor mange trin har så pyramiden?

(Det er vanskeligt at bevise, at der kun er én løsning.)

24 trin. Antallet af sten er jo

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

som skal være et kvadrat. De tre faktorer i tælleren skal enten være kvadrattal, eller 2, 3 eller 6 gange et kvadrattal. Blandt mulighederne må man undersøge

$$n + 1 = p^2 \qquad 2n + 1 = q^2 \qquad n = 6 \times r^2$$

Af de to første fås

$$q^2 - 2p^2 = -1$$

som f. eks. løses af $p = q = 1$. Da

$$1^2 - 2 \times 1^2 = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$$

kan vi jo opløfte til en ulige potens, m, og få

$$q^2 - 2p^2 = (q - \sqrt{2}p)(q + \sqrt{2}p) = (1 - \sqrt{2})^m (1 + \sqrt{2})^m = (-1)^m = -1$$

Vi prøver os frem med $m = 3, 5, 7, 9$ og finder

$$\begin{aligned}(1 - \sqrt{2})^3 &= 7 - 5\sqrt{2}\\ (1 - \sqrt{2})^5 &= 41 - 29\sqrt{2}\\ (1 - \sqrt{2})^7 &= 239 - 169\sqrt{2}\\ (1 - \sqrt{2})^9 &= 1393 - 985\sqrt{2}\end{aligned}$$

Hertil svarer højderne, som skal være 6 gange et kvadrattal:

$$\begin{aligned}&n = 5^2 - 1 = 24 = 6 \times 2^2, \quad n = 29^2 - 1 = 840 = 6 \times 140,\\ &n = 169^2 - 1 = 28560 = 6 \times 4760, \quad n = 985^2 - 1 = 970224 = 6 \times 161704, \ldots\end{aligned}$$

Af de fundne kan kun $n = 24$ bruges. Det kan vises, at det er den eneste løsning, bortset fra $n = 1$.

Klassikeren

Et sted ude i tundraen havde man fået rejst tre kraftværker, et elektricitetsværk, et gasværk og et vandværk. Nu var det ellers et øde område, der var ialt kun tre huse, der skulle forsynes med strøm, gas og vand.

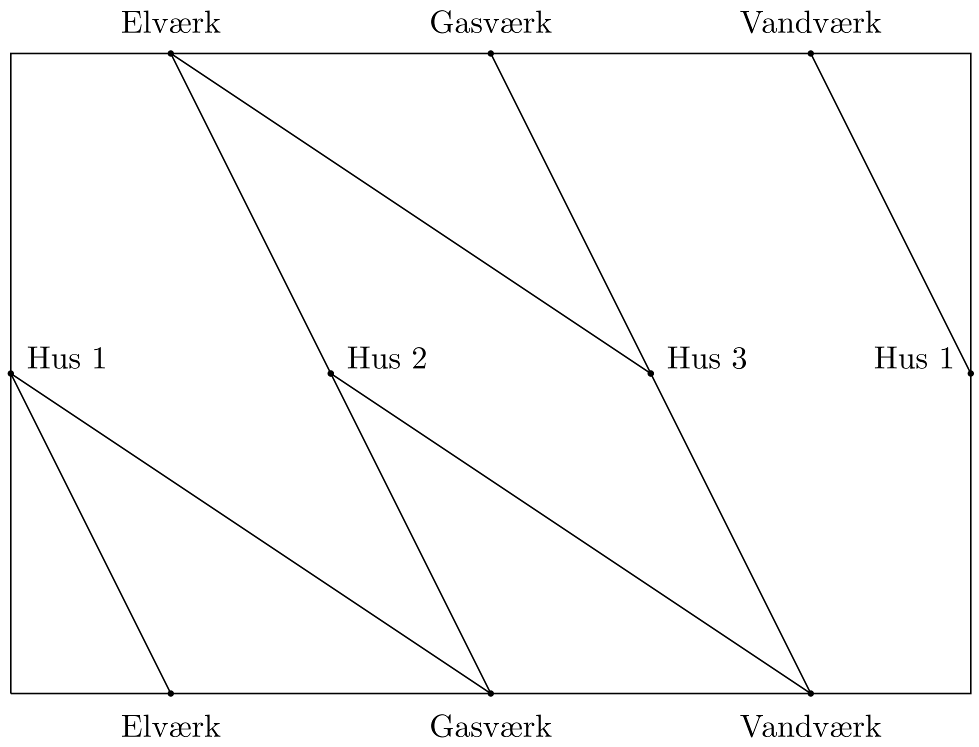
Men det var ikke helt problemfrit. Man skulle jo trække ledningerne oven på jorden, som var for stivfrossen til at grave i, men ledningerne tålte ikke at krydse hinanden. Og selv om der kun var de tre værker og de tre huse, havde ingeniørerne endnu ikke fundet en rørføring, der løste problemet.

Hvorfor ikke?

Når vi har forbundet to af husene til samtlige tre kraftværker, er verden blevet inddelt i tre områder, et uden elektricitet, et uden gas og et uden vand. Det tredie hus kan kun placeres i ét af de tre.

Men oppe på den ringformede asteroide, Torus II, var det lykkedes de lokale ingeniører at løse rørføringsproblemet.

Hvordan?



Æventyret

Der var engang en prins, der skulle vælge sig en prinsesse. Han havde valget mellem tre søstre, som alle var unge og smukke. Deres far var en viis gammel konge, og han ville sikre sig, at hans kommende svigersøn havde omløb i hovedet. Så han sagde til prinsen:

”Før du får min velsignelse til at ægte en af mine døtre, vil jeg sætte dit mod og din intelligens på en prøve.

Du får lov til at stille én af prinsesserne ét spørgsmål, som kan besvares med ”ja” eller ”nej”. Den ene vil svare sandfærdigt, den anden vil svare falsk, og den tredje, som er min yndlingsdatter, kan svare sandfærdigt eller falsk, som hun vil. Hun har alligevel aldrig rettet sig efter mig.

Ud fra svaret på dit spørgsmål skal du vælge din brud. Men jeg advarer dig: Hvis du vælger min yndlingsdatter, skal du have dit hoved hugget af!”

Prinsen havde ingen anelse om, hvem der var kongens yndligsdatter, lige så lidt som han anede, hvem der ville tale sandt, og hvem falsk. Han måtte altså formulere sit spørgsmål sådan, at ligegyldigt hvem han spurgte, og ligegyldigt, hvad hun svarede, skulle han ud fra svaret kunne vælge en af de to andre til sin brud.

Naturligvis stillede prinsen et så snedigt spørgsmål, at han med sikkerhed undgik yndlingsprinsessen. Og kongen blev så imponeret, at han alligevel gav prinsen yndlingsdatteren, og de to levede lykkeligt til deres dages ende.

Hvordan mon prinsen formulerede sit spørgsmål?

Vi kalder prinsesserne ”S” for sand, ”F” for falsk og ”Y” for ”yndling”. Prinsen kalder dem A, B og C, men ved ikke, hvem der er hvem. Nu spørger han A: ”Er B mere tilbøjelig til at svare falsk end C?”

Nu kan han få to svar, og for hvert svar kan A være hver af de tre prinsesser. Det giver følgende muligheder:

	"ja"			"nej"		
A	S	F	Y	S	F	Y
B	F	S	F,S	Y	Y	?
C	Y	Y	?	F	S	S,F

Hvis altså A svarer "ja", kan prinsen vælge B, og svarer A "nej", kan prinsen vælge C.

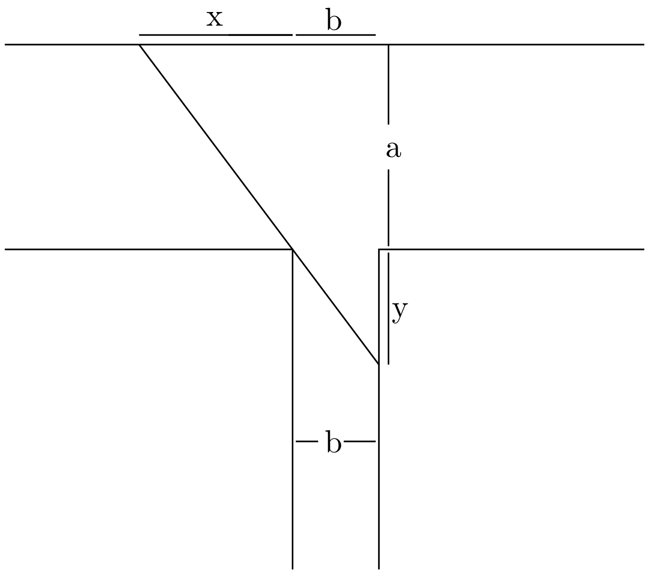
En rørende historie

Et vandrør er 6,4 cm i diameter, og midt på røret er der et T–rør, så siderøret er 2,7 cm i diameter. Siderøret sidder altså nøjagtig vinkelret på hovedrøret.

Nu løber vandet i en strøm gennem hovedrøret, og en del af vandet løber ud ad siderøret. Man har nu tilsat nogle mikadopinde til vandet, og det er meningen, at de ikke må løbe ud ad siderøret.

Man har derfor spurgt kommuneingeniøren, hvor lange mikadopindene skal være, for at de ikke på nogen måde kan dreje om ad siderøret. Hvis de prøver, skal de sætte sig fast.

Hvad er den kritiske grænseværdi for mikadopindene?



12,5 cm. Når en pind drejer om hjørnet, kan vi jo forlænge den til røring med de to rør. Den forlængede pind har et eller andet sted en minimumslængde, som netop er 12,5 cm.

Hvis hovedrøret har bredden a og birøret bredden b, og ved en stilling af pinden rammer dens forlængelse hovedrøret i afstanden x fra birøret og birøret i afstanden y fra hovedrøret. Så gælder ifølge Pythagoras, at længden af den forlængede pind er

$$\sqrt{(a+y)^2+(b+x)^2}$$

Samtidig fås af de to ensvinklede trekanter med siderne a, x hhv. y, b, at

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{y}$$

eller bedre

$$xy = ab$$

Minimum under bibetingelse opnås, når rangen af matricen af partielle afledede er mindre end maksimal, her 2, altså når rangen af matricen

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 2(b+x) & 2(a+y) \end{pmatrix}$$

er 1, dvs, når

$$\frac{b+x}{y} = \frac{a+y}{x}$$

eller

$$bx + x^2 = ay + y^2$$

Når vi ganger med x^2 og bruger ligningen $xy = ab$, står der

$$x^4 + bx^3 = a^2bx + a^2b^2 = a^2b(x+b)$$

hvoraf

$$x^3 = a^2b$$

og straks

$$y^3 = ab^2$$

Den kritiske længde bliver herefter

$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

Et biproblem

Betragt en regulær sekskant, der er gennemskåret i et regelmæssigt trekantet mønster. Man tænker sig, at hver side er delt i n lige store stykker, og derefter er alle de linier, der er parallelle med siderne, tegnet.

Problemet er at tælle alle forekommende regulære sekskanter på figuren.

Der er n^3. Man tager en terning og deler hver side i n lige store stykker. Nu deles terningen i n^3 små terninger med snit, der er parallelle med hver af de tre sider.

Derefter projiceres terningerne langs en hoveddiagonal ned på et stykke papir. Denne projektion svarer til figuren. Og de små terninger står i entydig korrespondance med sekskanterne på følgende måde. Hver lille terning ligge i netop én terning, der har den lille som sit nederste hjørne, og som er så stor som der er plads til i den oprindelige. Og disse terninger korresponderer enentydigt med sekskanterne i figuren.

Vejerboden

I den klassiske opgave er der givet 12 kugler, hvoraf de 11 er ens. Man skal så afsløre den aparte i 3 vejninger. Samtidig skal det afgøres, om den er lettere eller tungere end de andre.

Til hjælp har man en almindelig skålvægt med to skåle.

Men til variation af temaet har vi denne gang 14 kugler, hvoraf de 13 vejer nøjagtig 10 g. Desuden har vi et 10 gramslod.

Vi skal igen afsløre den aparte kugle i højst 3 vejninger, men det er ikke krævet, at vi finder ud af, om den er lettere eller tungere end de andre.

Hvordan skal man bære sig ad med det?

Lad os kalde kuglerne 1–14. Vi vejer nu 1–5 mod 6–9 + loddet. Hvis der er ligevægt, så er den aparte blandt 10–14. Vi vejer så 10–11 mod 12+loddet. Er der ligevægt, vejer vi 13 mod loddet.

Hvis 10–11 mod 12+loddet giver udslag, vejer vi 10 mod 11. Hvis nu 10 går ned og 11 op, ser vi på, om 10+11 gik op. I så fald er den aparte 11, ellers er det 10.

Hvis derimod 1–5 gik op og 6–9+loddet ned, så vejes 1,2,6,7 mod 3,8,10,11. Går nu 1,2,6,7 atter op, så er enten 8 tungere eller 1 eller 2 lettere. Derfor vejes 1 mod 2. Går derimod 1,2,6,7 ned, så er enten 3 lettere eller 6 eller 7 tungere. Det afgøres med 6 og 7 på hver sin skål.

Er endelig 1,2,6,7 i ligevægt med 3,8.10,11, så er den aparte jo en af 4, 5, der er lettere eller 9, der er tungere. Det afgøres af 4 mod 5.

Gitterpunkterne

Forleden dag sad jeg og slog krusseduller på et almindeligt ark ternet papir. Så kom jeg for skade at lege med gitterpunkterne. Jeg valgte 5 af dem tilfældigt ud.

Så tegnede jeg alle 10 forbindelseslinier mellem dem. Og hver gang var der et af liniestykkerne, der passerede hen over et gitterpunkt.

Hvorfor det?

Forklaring.

Vi giver gitterpunkterne koordinater, der så altid bliver hele tal. Når vi vælger 5 gitterpunkter, så må der mindst være 2 af dem, hvis koordinater begge har samme paritet (lige–ulige). Men så vil midtpunktet af liniestykket, der forbinder de to, være et gitterpunkt.

Pythagoras

En Pythagoræisk trekant med heltallige sider, x, y og z, der opfylder

$$x^2 + y^2 = z^2$$

må have mindst én side som et lige tal. Og ingen Pythagoræisk trekant har en side af længde 2. Men man kan tænke sig en Pythagoræisk trekant, hvis sider er to primtal og et tal, der er det dobbelte af et primtal.

Opgaven går ud på at bestemme *samtlige* Pythagoræiske trekanter af den slags.

Der er kun én, nemlig trekanten med siderne 2×2, 3 og 5. Fordi de Pythagoræiske trekanter med primiske sider fås af formerne

$$x = 2pq, \quad y = (p+q)(p-q), \quad z = p^2 + q^2$$

hvor p og q er primiske. Men så må x være det dobbelte af et primtal, p et primtal og $q = 1$. Men skal y også være et primtal, må $p + q$ være et primtal og $p - q = 1$. Det lader sig netop gøre for $p = 2$. Men så er $x = 2 \times 2 \times 1 = 2 \times 2$, $y = (2+1)(2-1) = 3$ og $z = 2^2 + 1^2 = 5$.

De logiske frimærkesamlere

Tre personer – A, B og C – var alle fuldstændig logiske. De kunne alle tre øjeblikkelig drage alle de logiske konsekvenser af alle præmisser. Desuden vidste hver af dem, at de to andre var lige så logiske som han selv. Man viste dem syv frimærker; to røde, to gule og tre grønne. Derpå fik de bind for øjnene, og et frimærke blev klistret i panden af dem hver især, mens de resterende frimærker blev lagt ned i en skuffe. Da øjenbindene var fjernet, spurgte man A: "Kan du nævne én farve, som dit frimærke i hvert fald ikke har?" "Nej," svarede A. Så fik B det samme spørgsmål, og han svarede også "nej".

Er det muligt ud fra disse oplysninger at regne sig frem til, hvilken farve A's frimærke havde? Eller B's? Eller C's?

C's. Hvis C's frimærke er rødt, så kan B regne ud, at hans eget ikke er rødt. For så havde A sagt, at hans ikke var rødt. Tilsvarende hvis C's frimærke er gult. Altså er C's frimærke grønt.

Joakim von And i Sahara

Joakim von And er som bekendt verdens rigeste og nærigste and. Da han derfor engang skulle køre over Sahara i jeep, måtte han jo spekulere på, hvor billigt det kunne lade sig gøre.

Nu var hans jeeps kun i stand til at køre en trediedel af vejen på en fuld tank, men til gengæld kunne alle hans jeeps køre fuldautomatisk uden chauffør, og han havde masser af dem. Og han kunne let tømme og fylde tankene midt i ørkenen uden at spilde. Men med fuld tank menes så meget benzin, som en jeep på nogen måde kan medbringe.

Problemet er, hvordan slipper Joakim von And billigst muligt over ørkenen, når hele hans flåde af jeeps står på den ene side. Hvor mange jeeps skal han bruge, og hvordan skal han bære sig ad? (Han kan bare efterlade sine jeeps i ørkenen, de skal ikke returneres.)

Han skal bruge 11 jeeps og $10\frac{1969}{2520}$ tankfulde benzin.

Lad os sige, at ørkenen er 7560 km bred, og at en jeep kan køre 2520 km på en fuld tank.

De sidste 2520 km tilbagelægges med 1 jeep og en tankfuld benzin. De næstsidste 1260 km tilbagelægges i 2 jeeps med to tankfulde benzin. Når de tilsammen har én tankfuld benzin tilbage, samles benzinen i den ene jeep.

De trediesidste 840 km tilbagelægges i 3 jeeps, osv. 4 jeeps kører 630 km, 5 jeeps kører 504 km, 6 jeeps kører 420 km, 7 jeeps kører 360 km, 8 jeeps kører 315 km, 9 jeeps kører 280 km, 10 jeeps kører 252 km.

Så mangler der kun 179 km, som kan tilbagelægges af 11 jeeps, med den ene tank knap fuld. Den nøjes med $\frac{1969}{2520}$ tankfuld benzin.

NYE OPGAVER

Denne gang vil vi mindes Hans Tornehave ved at bringe nogle af hans typiske eksamensopgaver i elementær analyse.

Opgave 1.

Find konvergensradius for potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)z^n,$$

og undersøg tillige, hvis konvergensradius er endelig, om rækkerne konvergerer på konvergenscirklens periferi.

Opgave 2.

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(\sinh x - 1)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \cosh x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \cosh x - x.$$

Opgave 3.

Undersøg, om de ved

$$f(x) = e^{-x}\sin e^{x}, \quad g(x) = e^{-x}\sin e^{2x}$$

definerede afbildninger $f, g : [0, \infty[$ ind i $\mathbb{R}$ er ligelig kontinuerte.

Opgave 4.

Find alle punkter $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^2$ som har en omegn, i hvilken ligningen

$$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2 x_2 = 1$$

éntydigt bestemmer en implicit given funktion $x_2 = f(x_1)$, som tilfredsstiller betingelsen $Df(x_1^*) = 0$.

Opgave 5.

Lad $[a, b] \subsetneqq \mathbb{R}$ være et interval. Lad $\alpha : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være strengt voksende, og lad $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuert og ikke konstant. Vis de skarpe uligheder

$$(\alpha(b)-\alpha(a))m < \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) < (\alpha(b)-\alpha(a))M,$$

hvor $m = \inf f([a, b])$ og $M = \sup f([a, b])$.

Opgave 6.

Vis, at

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\cos(y\sin t)\mathrm{d}t = 0.$$

Opgave 7.

Bevis formlen

$$\frac{1}{2}(\log(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)x^n,$$

og angiv potensrækkens konvergensradius.

Opgave 8.

I Hilbertrummet $\mathbb{R}^\infty$ betragtes mængden M af punkter $\underline{a}$, for hvilke $\sum n a_n^2$ er konvergent. Vis, at $\underline{a} \in M$, $\underline{b} \in M$, $k \in \mathbb{R}$ medfører $k\underline{a} \in M$ og $\underline{a} + \underline{b} \in M$. Vis, at M er overalt tæt i $\mathbb{R}^\infty$, og at $\underline{0}$ ikke er et indre punkt i M.

Opgave 9.

Med Φ betegner vi den ved

$$\Phi f(x) = xDf(x)$$

definerede differentialoperator. Vis, at differentialligningen

$$\Phi^{op}\chi = x\chi,$$

hvor $p \in \mathbb{N}$, har den ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^p}$$

definerede afbindning $f : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ som løsning.