# ВЕСТНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1 Выпуск 2

2011 Июнь

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. ИЗДАЕТСЯ С АВГУСТА 1946 ГОДА


## СОДЕРЖАНИЕ

### К 80-ЛЕТИЮ В. В. ПЕТРОВА




ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ Санкт-Петербургского государственного университета 1824

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ОСНОВАН В 1724 ГОДУ
1824 – ГОД ВЫХОДА В СВЕТ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА

## МАТЕМАТИКА



## МЕХАНИКА



## АСТРОНОМИЯ

# LARGE DEVIATIONS FOR MINKOWSKI SUMS OF HEAVY-TAILED GENERALLY NON-CONVEX RANDOM COMPACT SETS

*Thomas Mikosch*[1], *Zbyněk Pawlas*[2], *Gennady Samorodnitsky*[3]

1. Department of Mathematics, University of Copenhagen, Denmark,
Professor, mikosch@math.ku.dk

2. Department of Probability and Mathematical Statistics,
Charles University in Prague, Czech Republic
Professor, pawlas@karlin.mff.cuni.cz

3. School of Operations Research and Information Engineering,
Cornell University, New York, USA
Professor, gennady@orie.cornell.edu

We prove large deviation results for Minkowski sums of iid random compact sets where we assume that the summands have a regularly varying distribution. The result confirms the heavy-tailed large deviation heuristics: "large" values of the sum are essentially due to the "largest" summand.

## 1. Introduction

*Preliminaries on random sets and Minkowski addition.* The theory of random sets is summarized in the recent monograph [9]. For all definitions introduced below we refer to [9]. Let $F$ be a separable Banach space with norm $\|\cdot\|$. For $A_1, A_2 \subseteq F$ and a real number $\lambda$, the Minkowski addition and scalar multiplication, respectively, are defined by

$$A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}, \quad \lambda A_1 = \{\lambda a_1 : a_1 \in A_1\}.$$

We denote by $\mathcal{K}(F)$ the class of all non-empty compact subsets of $F$. Note that this is not a vector space. However, it is well known that $\mathcal{K}(F)$ equipped with the Hausdorff distance

$$d(A_1, A_2) = \max\left\{ \sup_{a_1 \in A_1} \inf_{a_2 \in A_2} \|a_1 - a_2\|, \sup_{a_2 \in A_2} \inf_{a_1 \in A_1} \|a_1 - a_2\| \right\}, \quad A_1, A_2 \in \mathcal{K}(F),$$

forms a complete separable metric space. The Hausdorff metric is subinvariant, i.e.,

$$d(A_1 + A, A_2 + A) \le d(A_1, A_2) \quad \text{for any } A_1, A_2, A \in \mathcal{K}(F). \tag{1}$$

For any subset $\mathcal{U}$ of $\mathcal{K}(F)$, a real number $\lambda$ and a set $A \in \mathcal{K}(F)$ we use the notation $\lambda\mathcal{U} = \{\lambda C : C \in \mathcal{U}\}$ and $\mathcal{U} + A = \{C + A : C \in \mathcal{U}\}$.

A random compact set $X$ in $F$ is a Borel measurable function from an abstract probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ into $\mathcal{K}(F)$. Since addition and scalar multiplication are defined for random compact sets it is natural to study the strong law of large numbers, the central limit theorem, large deviations, etc., for sequences of such random sets; see Chapter 3 in [9] for an overview of results obtained until 2005. A general Cramér-type large deviation result for Minkowski sums of iid random compact sets was proved in [2]. Cramér-type large deviations require exponential moments of the summands; see Chapter 8 in Valentin V. Petrov's classical monograph [13] for the case of sums of independent real-valued variables and [3] in the case of more general random structures. If such moments do not exist, then we are dealing with heavy-tailed random elements. Large deviations results for sums of heavy-tailed random elements significantly differ from Cramér-type results. In this case it is typical that only the largest summand determines the large deviation behavior; see the classical results by A. Nagaev [10, 11] for sums of iid random variables; cf. [12, 6]. It is the aim of this paper to prove large deviation results for sums of *heavy-tailed random compact sets.* In what follows, we make this notion precise by introducing regularly varying random sets.

*Regularly varying random sets.* A special element of $\mathcal{K}(F)$ is $A_0 = \{0\}$. In what follows, we say that $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}(F)$ is bounded away from $A_0$ if $A_0 \notin \mathrm{cl}\,\mathcal{U}$, where $\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ stands for the closure of $\mathcal{U}$. We consider the subspace $\mathcal{K}_0(F) = \mathcal{K}(F) \setminus \{A_0\}$, which is a separable metric space in the relative topology. For any Borel set $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}_0(F)$ and $\varepsilon > 0$, we write

$$\mathcal{U}^\varepsilon = \{A \in \mathcal{K}_0(F) : \, d(A, C) \le \varepsilon \text{ for some } C \in \mathcal{U}\}.$$

Furthermore, we define the norm $\|A\| = d(A, A_0) = \sup\{\|a\| : \, a \in A\}$ for $A \in \mathcal{K}(F)$, and denote $\mathcal{B}_r = \{A \in \mathcal{K}(F) : \, \|A\| \le r\}$. Let $M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big)$ be the collection of Borel measures on $\mathcal{K}_0(F)$ whose restriction to $\mathcal{K}(F) \setminus \mathcal{B}_r$ is finite for each $r > 0$. Let $\mathcal{C}_0$ denote the class of real-valued, bounded and continuous functions $f$ on $\mathcal{K}_0(F)$ such that for each $f$ there exists $r > 0$ and $f$ vanishes on $\mathcal{B}_r$. The convergence $\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ in $M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big)$ is defined to mean the convergence $\int f \, 1\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \, 1\mu$ for all $f \in \mathcal{C}_0$. By the portmanteau theorem ([5], Theorem 2.4), $\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ in $M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big)$ if and only if $\mu_n(\mathcal{U}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\mathcal{U})$ for all Borel sets $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}(F)$ which are bounded away from $A_0$ and satisfy $\mu(\partial\mathcal{U}) = 0$, where $\partial\mathcal{U}$ is the boundary of $\mathcal{U}$.

Following [5], for the general case of random elements with values in a separable metric space, we say that a random compact set $X$ is *regularly varying* if there exist a non-null measure $\mu \in M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big)$ and a sequence $\{a_n\}_{n\ge 1}$ of positive numbers such that

$$n\mathrm{P}(X \in a_n \cdot) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\cdot) \quad \text{in } M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big). \tag{2}$$

The *tail measure* $\mu$ necessarily has the property $\mu(\lambda\mathcal{U}) = \lambda^{-\alpha}\mu(\mathcal{U})$ for some $\alpha > 0$ and all Borel sets $\mathcal{U}$ in $\mathcal{K}_0(F)$ and all $\lambda > 0$. We then also refer to *regular variation of $X$ with index $\alpha$.* From the definition of regular variation of $X$ we get ([5], Theorem 3.1)

$$[\mathrm{P}(X \in t(\mathcal{K}(F) \setminus \mathcal{B}_1))]^{-1}\, \mathrm{P}(X \in t\cdot) \to c\mu(\cdot) \quad \text{in } M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big) \text{ as } t \to \infty, \tag{3}$$

for some $c > 0$. The sequence $\{a_n\}_{n\ge1}$ will always be chosen such that $n\mathrm{P}(X \in a_n(\mathcal{K}(F) \setminus \mathcal{B}_1)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. With this choice of $\{a_n\}_{n\ge1}$, it follows that $c = 1$ in (3).

An important closed subset of $\mathcal{K}(F)$ is the family of non-empty *compact convex subsets* of $F$, denoted by $\mathrm{co}\,\mathcal{K}(F)$. Denote the topological dual of $F$ by $F^*$ and the unit ball of $F^*$ by $B^*$, it is endowed with the weak-$*$ topology $w^*$. The *support function* $h_A$ of a compact convex $A \in \mathrm{co}\,\mathcal{K}(F)$ is defined by (see [9])

$$h_A(u) = \sup\{u(x) : \, x \in A\}, \quad u \in B^*.$$

Since $A$ is compact, $h_A(u) < \infty$ for all $u \in B^*$. The support function $h_A$ is sublinear, i.e., it is subadditive ($h_A(u+v) \le h_A(u) + h_A(v)$ for all $u, v \in B^*$ with $u + v \in B^*$) and positively homogeneous ($h_A(cu) = ch_A(u)$ for all $c > 0$, $u \in B^*$ with $cu \in B^*$). Let $\mathcal{C}(B^*, w^*)$ be the set of continuous functions from $B^*$ (endowed with the weak-$*$ topology) to $\mathbb{R}$ and consider the uniform norm $\|f\|_\infty = \sup_{u \in B^*} |f(u)|$, $f \in \mathcal{C}(B^*, w^*)$. The map $h : \operatorname{co}\mathcal{K}(F) \to \mathcal{C}(B^*, w^*)$ has the following properties

$$h_{A_1 + A_2} = h_{A_1} + h_{A_2}, \quad h_{\lambda A_1} = \lambda h_{A_1}, \quad A_1, A_2 \in \operatorname{co}\mathcal{K}(F), \quad \lambda \ge 0,$$

which make it possible to convert the Minkowski sums and scalar multiplication, respectively, of convex sets into the arithmetic sums and scalar multiplication of the corresponding support functions. Furthermore,

$$d(A_1, A_2) = \|h_{A_1} - h_{A_2}\|_\infty.$$

Hence, the support function provides an isometric embedding of $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$ into $\mathcal{C}(B^*, w^*)$ with the uniform norm. If $\mathcal{G} = h\big(\operatorname{co}\mathcal{K}(F)\big)$, then $\mathcal{G}$ is a closed convex cone in $\mathcal{C}(B^*, w^*)$, and $h$ is an isometry between $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$ and $\mathcal{G}$.

A random compact convex set $X$ is a Borel measurable function from a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ into $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$, which we endow with the relative topology inherited from $\mathcal{K}(F)$. The support function of a random compact convex set is, clearly, a $\mathcal{C}(B^*, w^*)$-valued random variable taking values in $\mathcal{G}$.

The definition of a regularly varying random compact convex set parallels that of a regularly varying random compact set above, and we are using the same notation: a random compact convex set $X$ is *regularly varying* if there exist a non-zero measure $\mu \in M_0\big(\operatorname{co}\mathcal{K}_0(F)\big)$ and a sequence $\{a_n\}_{n \ge 1}$ of positive numbers such that

$$n\mathrm{P}(X \in a_n \cdot) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu(\cdot) \ \text{ in } M_0\big(\operatorname{co}\mathcal{K}_0(F)\big). \tag{4}$$

Once again, the tail measure $\mu$ necessarily scales, leading to the notion of the index of regular variation.

The following lemma is elementary.

**Lemma 1.** (i) *A random compact convex set $X$ is regularly varying in* $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$ *if and only if its support function $h_X$ is regularly varying in $\mathcal{C}(B^*, w^*)$. Specifically, if* (4) *holds for some sequence $\{a_n\}$, then for the same sequence we have*

$$n\mathrm{P}(h_X \in a_n \cdot) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \nu(\cdot) \quad \text{in } M_0\big(\mathcal{C}(B^*, w^*)\big), \tag{5}$$

*where $\nu = \mu \circ h_X^{-1}$ (the "special element" of $\mathcal{C}(B^*, w^*)$ is, of course, the zero function). Conversely, if* (5) *holds, then* (4) *holds as well with $\mu = \nu \circ h_X$. In particular, the exponents of regular variation of $X$ and $h_X$ are the same.*

(ii) *If a random compact set $X$ is regularly varying in $\mathcal{K}(F)$ then its convex hull* $\operatorname{co} X$ *is a random compact convex set, that is regularly varying in* $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$*. Specifically, if* (2) *holds, then so does* (4)*, with the tail measure replaced by the image of the tail measure from* (2) *under the map $A \mapsto \operatorname{co} A$ from $\mathcal{K}(F)$ to* $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$*. In particular, $X$ and* $\operatorname{co} X$ *have the same exponents of regular variation.*

Proof. Since isometry implies continuity, the support function is homogeneous of order 1, and assigns to the "special set" $\{0\}$ the "special element", the zero function, the statement of part (i) of the lemma follows from the mapping theorem (Theorem 2.5 in [5]). For part (ii) note that the map $A \mapsto \operatorname{co} A$ from $\mathcal{K}(F)$ to $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$ is a contraction in the Hausdorff distance, hence is continuous. It is also homogeneous of order 1. Since the "special set" $\{0\}$ is already convex, the statement follows once again from the mapping theorem. $\square$

For compact convex sets in $\mathbb{R}^d$, the intrinsic volumes $V_j$, $j = 0, \dots, d$, play an important role. They can be introduced by means of the Steiner formula, see [9], Appendix F. In particular, $V_d$ is the volume, $V_{d-1}$ is half of the surface area, $V_1$ is a multiple of the mean width and $V_0 = 1$ is the Euler-Poincaré characteristic.

**Corollary 1.** *Let $X$ be a random compact convex set which is regularly varying in $\operatorname{co}\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ with index $\alpha > 0$ and tail measure $\mu$. Then for $j \in \{1, \dots, d\}$, $V_j(X)$ is a regularly varying non-negative random variable with index $\alpha/j$ and tail measure $\nu_j = \mu \circ V_j^{-1}$.*

Proof. Since $V_j$ is continuous, homogeneous of order $j$ and $V_j(A_0) = 0$, the continuous mapping theorem (Theorem 2.5 in [5]) yields that $V_j(X)$ is regularly varying with tail measure $\nu_j = \mu \circ V_j^{-1}$. Moreover, $\nu_j(\lambda\mathcal{U}) = \mu(V_j^{-1}(\lambda\mathcal{U})) = \mu(\lambda^{1/j} V_j^{-1}(\mathcal{U})) = \lambda^{-\alpha/j}\nu_j(\mathcal{U})$ for any measurable subset $\mathcal{U}$ of $\mathbb{R}^+$.

*Organization of the paper.* In Section 2 we consider various examples of regularly varying compact random sets. In Section 3 we prove large deviation results for Minkowski sums $S_n$ of iid regularly varying random compact sets. We allow the random sets to be, generally, non-convex. To the best of our knowledge, such results are not available in the literature; they parallel those proved by A. and S. Nagaev [10–12] for sums of iid random variables. The price one has to pay for this generality is that the normalizations $\lambda_n$ of the sums $S_n$ have to exceed the level $n$. The situation with milder normalizations is more delicate. It is considered in [8]. Our main result there assumes that the random compact summands $X_n$ are convex, but we also include partial results in the non-convex case.

## 2. Examples of regularly varying random sets

**Example 1** (Convex hull of random points)**.** *Let $k \geq 2$, and let $\xi_1, \dots, \xi_k$ be iid regularly varying $F$-valued random elements with index $\alpha > 0$ and tail measure $\nu$ and let $X = \operatorname{co}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ be their convex hull. The mapping $g : (z_1, \dots, z_k) \mapsto \operatorname{co}\{z_1, \dots, z_k\}$ from $F^k$ to $\operatorname{co}\mathcal{K}(F)$ is continuous and homogeneous of order 1. Moreover, this mapping sends the zero point in $F^k$ to the "special element" $A_0$ of $\mathcal{K}(F)$. Since the random vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ is regularly varying in $F^k$, the continuous mapping theorem (Theorem 2.5 in [5]) yields that $X$ is regularly varying with index $\alpha$, and tail measure $\tilde{\nu} \circ g^{-1}$ (as long as we are using the same sequence $\{a_n\}$ for each element $\xi_i$). Here*

$$\tilde{\nu} = \sum_{i=1}^{k} \delta_0 \times \cdots \times \delta_0 \times \nu \times \delta_0 \times \cdots \times \delta_0$$

*(with $\nu$ appearing at the $i$th place) is the tail measure of the vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$. Clearly, the convex hull of $k$ points, one of which is $x \in F$, and the rest are zero points, is the interval $[0, x] = \{y \in F : y = cx, 0 \leq c \leq 1\}$. Therefore, the convex hull $X$ has tail measure $\mu = k\,\nu \circ T^{-1}$, where $T : F \to \operatorname{co}\mathcal{K}(F)$ is defined by the relation $T(x) = [0, x]$.*

**Example 2** (Random zonotopes)**.** *As in the previous example, let $\xi_1, \dots, \xi_k$ be iid regularly varying random elements in $F$ with index $\alpha > 0$ and tail measure $\nu$. Starting with the same* *ingredients, we construct a different convex compact subset of $F$. Consider the Minkowski sum of the random segments, $X = \sum_{i=1}^{k}[0,\xi_i]$, a so-called zonotope.*

*The function $g : (z_1,\dots,z_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k}[0,z_i]$ from $F^k$ to $\mathrm{co}\,\mathcal{K}(F)$ is continuous, homogeneous of order 1, and maps the zero point in $F^k$ to $A_0$. The same argument as in Example 1 shows that the random zonotope $X$ is regularly varying with index $\alpha$, and, if we use the same sequence $\{a_n\}$ as we used for each element $\xi_i$, has tail measure $\mu = k\,\nu \circ T^{-1}$, where $T : F \to \mathrm{co}\,\mathcal{K}(F)$ is as above.*

Examples 1 and 2 construct different compact sets starting from a finite number of iid regularly varying random points in $F$, but the tail measures in the two cases turn out to be the same.

**Example 3** (Multiple of a deterministic set)**.** *Let $A \subseteq \mathcal{K}(F)$ be a deterministic compact set such that $\|A\| > 0$ and let $R$ be a regularly varying random variable with index $\alpha > 0$, satisfying the tail balance condition*

$$\frac{\mathrm{P}(R > x)}{\mathrm{P}(|R| > x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} p \quad \textit{and} \quad \frac{\mathrm{P}(R \le -x)}{\mathrm{P}(|R| > x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} q.$$

*Then the mapping $g : z \mapsto zA$ from $\mathbb{R}$ to $\mathcal{K}(F)$ is continuous and homogeneous of order 1, and it maps the origin in $\mathbb{R}$ into $A_0$. Therefore, $X = RA$ is regularly varying with index $\alpha$. Recall that the tail measure of $R$ has density $\big(p\mathbf{1}_{\{x>0\}} + q\mathbf{1}_{\{x<0\}}\big)|x|^{-(1+\alpha)}$ with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. Using the sequence $\{a_n\}$ that defines the above tail measure on $\mathbb{R}$, we see that the tail measure $\mu$ of $X$ can be written as*

$$\mu(\mathcal{U}) = \int_0^\infty x^{-(1+\alpha)}\big(p\mathbf{1}_{\{xA\in\mathcal{U}\}} + q\mathbf{1}_{\{-xA\in\mathcal{U}\}}\big)\,1x.$$

**Example 4** (Stable random compact convex set)**.** *A random compact convex set $X$ has an $\alpha$-stable distribution, $\alpha \in (0,2)$, if for any $a,b > 0$ there are compact convex sets $C$ and $D$ such that*

$$aX_1 + bX_2 + C \overset{d}{=} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}X + D,$$

*where $X_1, X_2$ are independent copies of $X$; see [4] and [9], Section 2.3. By Theorem 2.2.14 in [9], the support function of an $\alpha$-stable random compact convex set $X$ is itself an $\alpha$-stable random vector in $\mathcal{C}(B^*, w^*)$, hence is regularly varying in that space (see e.g. [7]). By Lemma 1, $X$ is a regularly varying random compact convex set.*

*It follows from [4] that an $\alpha$-stable random compact convex set for $\alpha \in [1,2)$ must be of the form $X = K + \xi$, where $\xi \in F$ is an $\alpha$-stable random element and $K \in \mathrm{co}\,\mathcal{K}(F)$ is deterministic.*

## 3. A large deviation result for general random compact sets

In this section we consider an iid sequence $\{X_n\}_{n\ge1}$ of random compact sets which are not necessarily convex. We introduce the sequence of the corresponding Minkowski partial sums $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \ge 1$. Next we formulate our main result on the large deviations in this situation.

**Theorem 1.** *Let $\{X_n\}_{n\ge1}$ be an iid sequence of random compact sets which are regularly varying with index $\alpha$ and tail measure $\mu \in M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big)$. Let $\{a_n\}_{n\ge1}$ be the normalizing sequence in* (2)*. Consider a sequence $\lambda_n \nearrow \infty$ such that*

(i) $\lambda_n/a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *if* $\alpha < 1$,

(ii) $\lambda_n/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\lambda_n/a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\frac{n}{\lambda_n}\mathbb{E}\|X_1\|\mathbf{1}_{\{\|X_1\|\le\lambda_n\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *if* $\alpha = 1$,

(iii) $\lambda_n/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *if* $\alpha > 1$.

*Then, with* $\gamma_n = [n\,\mathrm{P}(\|X_1\| > \lambda_n)]^{-1}$,

$$\gamma_n\,\mathrm{P}(S_n \in \lambda_n\cdot) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\cdot) \quad in \quad M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big).$$

Proof. First observe that our assumptions and an appeal to [14], Theorem 4.13, yield that

$$\lambda_n^{-1}(\|X_1\| + \cdots + \|X_n\|) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0. \tag{6}$$

Let $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}_0(F)$ be a $\mu$-continuity set ($\mu(\partial\mathcal{U}) = 0$), bounded away from $A_0$. We have to prove that $\gamma_n\mathrm{P}(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\mathcal{U})$. Following [6], Lemma 2.1, we start with an upper bound. For any $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}) &= \mathrm{P}\left(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}, \cup_{i=1}^n\{X_i \in \lambda_n\mathcal{U}^\varepsilon\}\right) + \mathrm{P}\left(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}, \cap_{i=1}^n\{X_i \notin \lambda_n\mathcal{U}^\varepsilon\}\right) \le \\ &\le n\mathrm{P}\big(X_1 \in \lambda_n\mathcal{U}^\varepsilon\big) + \mathrm{P}\left(\cap_{i=1}^n\{d(S_n, X_i) > \varepsilon\lambda_n\}\right) = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Relation (3) implies that

$$\frac{\mathrm{P}(X_1 \in \lambda_n\cdot)}{\mathrm{P}(\|X_1\| > \lambda_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\cdot) \quad \text{in} \quad M_0\big(\mathcal{K}_0(F)\big).$$

Consequently, $\gamma_n I_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\mathcal{U}^\varepsilon)$ whenever $\mathcal{U}^\varepsilon$ is a $\mu$-continuity set. Since $\mu(\partial\mathcal{U}) = 0$, we have $\lim_{\varepsilon\searrow 0}\mu(\mathcal{U}^\varepsilon) = \mu(\mathcal{U})$. Next we show that, for every $\varepsilon > 0$, $\gamma_n I_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. We consider the following disjoint partition of $\Omega$ for $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \bigcup_{1\le i<j\le n}\{\|X_i\| > \delta\lambda_n, \|X_j\| > \delta\lambda_n\},\\ B_2 &= \bigcup_{i=1}^n\{\|X_i\| > \delta\lambda_n, \|X_j\| \le \delta\lambda_n, j \ne i, j = 1, \dots, n\},\\ B_3 &= \left\{\max_{i=1,\dots,n}\|X_i\| \le \delta\lambda_n\right\}.\end{aligned}$$

By regular variation of $X_1$ and definition of $\gamma_n$, we have $\gamma_n\mathrm{P}(B_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. As regards $B_2$, from (1) we get $d(S_n, X_n) \le \|S_{n-1}\|$ and accordingly,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\cap_{i=1}^n\{d(S_n, X_i) > \varepsilon\lambda_n\} \cap B_2\right) = \\ &\quad= \sum_{k=1}^n \mathrm{P}\left(\cap_{i=1}^n\{d(S_n, X_i) > \varepsilon\lambda_n\} \cap \{\|X_k\| > \delta\lambda_n, \|X_j\| \le \delta\lambda_n, j \ne k, j = 1, \dots, n\}\right) \le \\ &\quad\le \sum_{k=1}^n \mathrm{P}\big(d(S_n, X_k) > \varepsilon\lambda_n, \|X_k\| > \delta\lambda_n\big) \le \\ &\quad\le \mathrm{P}\big(\|S_{n-1}\| > \varepsilon\lambda_n\big)\big[n\mathrm{P}(\|X_1\| > \delta\lambda_n)\big].\end{aligned}$$

Since $X_1$ is regularly varying and $\lambda_n^{-1}\|S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$,

$$\gamma_n n\mathrm{P}(\|X_1\| > \delta\lambda_n)\mathrm{P}(\|S_{n-1}\| > \varepsilon\lambda_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

For $B_3$, using again (1), we have

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\big(\cap_{i=1}^n\{d(S_n, X_i) > \varepsilon\lambda_n\} \cap B_3\big) \le \mathrm{P}\big(\|S_{n-1}\| > \varepsilon\lambda_n, \max_{i=1,\dots,n-1} \|X_i\| \le \delta\lambda_n\big) \le \\
&\quad \le \mathrm{P}\Big(\Big\|\sum_{i=1}^{n-1} X_i \mathbf{1}_{\{\|X_i\|\le\delta\lambda_n\}}\Big\| > \varepsilon\lambda_n\Big) \le \mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \|X_i\|\mathbf{1}_{\{\|X_i\|\le\delta\lambda_n\}} > \varepsilon\lambda_n\Big) \le \\
&\quad \le \mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \big(\|X_i\|\mathbf{1}_{\{\|X_i\|\le\delta\lambda_n\}} - \mathbb{E}\|X_i\|\mathbf{1}_{\{\|X_i\|\le\delta\lambda_n\}}\big) > \varepsilon\lambda_n - (n-1)\mathbb{E}\|X_1\|\mathbf{1}_{\{\|X_1\|\le\delta\lambda_n\}}\Big).
\end{aligned}$$

By the Karamata theorem [1], for $\alpha < 1$,

$$\mathbb{E}\|X_1\|\mathbf{1}_{\{\|X_1\|\le\delta\lambda_n\}} = \int_0^{\delta\lambda_n} \mathrm{P}(\|X_1\| > x)\, 1x \sim \frac{\delta\lambda_n}{1-\alpha}\mathrm{P}(\|X_1\| > \delta\lambda_n).$$

Therefore,

$$(n-1)\lambda_n^{-1}\mathbb{E}\|X_1\|\mathbf{1}_{\{\|X_1\|\le\delta\lambda_n\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{7}$$

If $\alpha \ge 1$, then (7) follows directly from the assumptions on $\{\lambda_n\}$. Taking into account (7), it suffices to show that

$$\gamma_n \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \big(\|X_i\|\mathbf{1}_{\{\|X_i\|\le\delta\lambda_n\}} - \mathbb{E}\|X_i\|\mathbf{1}_{\{\|X_i\|\le\delta\lambda_n\}}\big) > \frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

which can be accomplished similarly as in the one-dimensional case by an application of the Fuk-Nagaev inequality ([14], p. 78) and the Karamata theorem. We conclude that

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n \mathrm{P}(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}) \le \mu(\mathcal{U}^\varepsilon) \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \mu(\mathcal{U})$$

for any $\mu$-continuity set $\mathcal{U}$ bounded away from $A_0$.

To prove the corresponding lower bound, we consider a $\mu$-continuity set $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}_0(F)$ bounded away from $A_0$ with non-empty interior $\mathrm{int}\,\mathcal{U}$. Introduce the set $\mathcal{U}^{-\varepsilon} = ((\mathcal{U}^c)^\varepsilon)^c$, where $\mathcal{U}^c$ denotes the complement of $\mathcal{U}$. It is a non-empty $\mu$-continuity set for a sequence of $\varepsilon > 0$ converging to zero. Notice that $(\mathcal{U}^{-\varepsilon})^\varepsilon \subseteq \mathcal{U}$. Then

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}\big) &\ge \mathrm{P}\big(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}, \cup_{i=1}^n\{X_i \in \lambda_n\mathcal{U}^{-\varepsilon}\}\big) \ge \\
&\ge \mathrm{P}\big(\cup_{i=1}^n\{d(S_n, X_i) < \varepsilon\lambda_n, X_i \in \lambda_n\mathcal{U}^{-\varepsilon}\}\big) \ge \\
&\ge n\mathrm{P}\big(X_1 \in \lambda_n\mathcal{U}^{-\varepsilon}\big)\mathrm{P}\big(\|S_{n-1}\| < \varepsilon\lambda_n\big) - \frac{n(n-1)}{2}\big[\mathrm{P}(X_1 \in \lambda_n\mathcal{U}^{-\varepsilon})\big]^2.
\end{aligned}$$

Since $\lambda_n^{-1}\|S_{n-1}\| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$ and $\mathcal{U}$ is a $\mu$-continuity set,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \gamma_n \mathrm{P}(S_n \in \lambda_n\mathcal{U}) &\ge \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{P}(X_1 \in \lambda_n\mathcal{U}^{-\varepsilon})}{\mathrm{P}(\|X_1\| > \lambda_n)} - \frac{n-1}{2n\gamma_n}\frac{\big[\mathrm{P}(X_1 \in \lambda_n\mathcal{U}^{-\varepsilon})\big]^2}{\big[\mathrm{P}(\|X_1\| > \lambda_n)\big]^2}\right) = \\
&= \mu(\mathcal{U}^{-\varepsilon}) \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \mu(\mathcal{U}).
\end{aligned}$$

This completes the proof.

From Theorem 1 we get by the continuous mapping theorem (Theorem 2.5 in [5]) the following corollary concerning large deviations of the intrinsic volumes of random compact convex sets.

**Corollary 2.** *Let $\{X_n\}_{n\ge 1}$ be an iid sequence of random compact convex sets which are regularly varying with index $\alpha$ and tail measure $\mu \in M_0\big(\operatorname{co}\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^d)\big)$. Under the same assumptions on the sequence $\{\lambda_n\}$ as in Theorem 1, we have*

$$\frac{\mathrm{P}(V_j(S_n)/\lambda_n^j \in \cdot)}{n\,\mathrm{P}(\|X_1\| > \lambda_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \circ V_j^{-1}(\cdot) \quad \text{in} \quad M_0(\mathbb{R}), \quad j = 1, \ldots, d.$$

**Remark 1.** *For $j = 1$ we can also use the relation $V_1(X_1+\cdots+X_n) = V_1(X_1)+\cdots+V_1(X_n)$, Corollary 1 and large deviations results for sums of iid random variables [10, 11] in order to obtain large deviations result for $V_1(S_n)$. However, for $j > 1$ similar results are not straightforward.*

The assumptions of Theorem 1 imposed on the normalizing sequence $\{\lambda_n\}$ ensure that (6) holds, in particular, $\lambda_n/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. If $\alpha > 1$, this is a rather strong assumption. In [8] we show that this condition can be weakened significantly if it is possible to introduce the notion of expectation of $S_n$. In particular, we will assume that the iid sequence $\{X_n\}$ consists of iid random convex compact sets which are regularly varying with index $\alpha \ge 1$ and $\mathbb{E}\|X_1\| < \infty$.

**A personal remark of Thomas Mikosch.** When I was a student of Valentin V. Petrov in the beginning of the 1980s I got familiar with large deviations by reading his monograph [13]. I remember the excitement when I read his proof of Cramér's theorem for sequences of independent variables: it is an example of extraordinary mathematical elegance and beauty. It was also then that I started getting interested in heavy-tail phenomena, in particular in distributions with power laws. The combination of regular variation and large deviations has fascinated me since then. I would like to thank Valentin Vladimirovich for opening the door to this exciting world.

**Acknowledgment.** Thomas Mikosch's research is partly supported by the Danish Natural Science Research Council (FNU) Grant 09-072331, "Point process modelling and statistical inference". Zbyněk Pawlas is partly supported by the Czech Ministry of Education, research project MSM 0021620839 and by the Grant Agency of the Czech Republic, grant P201/10/0472. Gennady Samorodnitsky's research is partially supported by a US Army Research Office (ARO) grant W911NF-10-1-0289 and a National Science Foundation (NSF) grant DMS-1005903 at Cornell University.

**References**

1. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Vol. 27. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

2. *Cerf R.* Large deviaition results for sums of iid random compact sets // Proceedings of the American Mathematical Society. 1999. Vol. 127. P. 2431–2436.

3. *Dembo A., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. Berlin: Springer, 1998.

4. *Giné E., Hahn M.* Characterization and domain of attraction of $p$-stable random compact sets // The Annals of Probability. 1985. Vol. 13. P. 447–468.

5. *Hult H., Lindskog F.* Regular variation for measures on metric spaces // Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle Série. 2006. Vol. 80. P. 121–140.

6. *Hult H., Lindskog F., Mikosch T., Samorodnitsky G.* Functional large deviations for multivariate regularly varying random walks // The Annals of Applied Probability. 2005. Vol. 15. P. 2651–2680.

7. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

8. *Mikosch T., Pawlas Z., Samorodnitsky G.* A large deviation principle for Minkowski sums of heavy-tailed random compact convex sets with finite expectation // Glynn P., Mikosch T., Rolski T., Rubinstein R. (Eds.) New Frontiers in Applied Probability. A Volume in Honour of Søren Asmussen. A special issue of *Journal of Applied Probability*, to appear. 2011.

9. *Molchanov I.* Theory of Random Sets. London: Springer, 2005.

10. *Nagaev A. V.* Limit theorems for large deviations where Cramér's conditions are violated (in Russian) // Izvestiya Akademii Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk. 1969. Vol. 6. P. 17–22.

11. *Nagaev A. V.* Integral limit theorems taking large deviations into account when Cramér's condition does not hold I, II // Theory of Probability and its Applications. 1969. Vol. 14. P. 51–64, 193–208.

12. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables // The Annals of Probability. 1979. Vol. 7. P. 745–789.

13. *Petrov V. V.* Sums of Independent Random Variables. Berlin: Springer, 1975.

14. *Petrov V. V.* Limit Theorems of Probability Theory. Oxford: Oxford University Press, 1995.

Статья поступила в редакцию 21 декабря 2010 г.

# Р Е Ф Е Р А Т Ы

УДК 519.21

Б у л и н с к и й А. В. **Центральная предельная теорема для положительно ассоциированных стационарных случайных полей** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 5–13.

Положительно ассоциированные стационарные случайные поля, заданные на $d$-мерной целочисленной решетке, возникают в различных моделях математической статистики, теории перколяции, статистической физики и теории надежности. Нами рассматриваются поля с ковариационными функциями, удовлетворяющими условию более общего вида, чем суммируемость. Установлен критерий справедливости центральной предельной теоремы (ЦПТ) для частных сумм поля такого класса. Эти суммы берутся по растущим параллелепипедам или кубам. Известная гипотеза Ньюмена заключалась в том, что для ассоциированного стационарного случайного поля упомянутое условие поведения ковариационной функции влечет ЦПТ. Как показали Н. Херрндорф и А. П. Шашкин, эта гипотеза несправедлива уже при $d = 1$. В данной работе выявлена ключевая роль равномерной интегрируемости квадратов нормированных частных сумм поля для выполнения ЦПТ. Тем самым получено расширение теоремы Льюиса, доказанной для последовательности случайных величин, а также показано, как следует модифицировать гипотезу Ньюмена при любом $d$. Существенно используется представление дисперсий частных сумм поля с помощью медленно меняющихся функций нескольких аргументов.

*Ключевые слова*: случайные поля, условия зависимости, стационарность, центральная предельная теорема, равномерная интегрируемость.

Библиогр. 14 назв.

УДК 519.23

Б у т о р и н а Ю. О., Н и к и т и н Я. Ю. **О больших уклонениях сглаженных статистик Колмогорова—Смирнова** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 14–20.

Изучается логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений для статистик типа Колмогорова—Смирнова, предназначенных для проверки согласия и симметрии и построенных на основе сглаженных эмпирических функций распределения. Такие статистики зависят от выбора ядра и ширины окна, что не позволяет применить к ним стандартные методы изучения больших уклонений для свободных от распределения статистик, основанных на эмпирических функциях распределения. Поэтому применяется иной подход, существенной частью которого является использование теоремы Плахки—Штейнебаха. Оказывается, что результаты ничем не отличаются от статистик Колмогорова—Смирнова, построенных по обычной эмпирической функции распределения. Это означает, в частности, что бахадуровская асимптотическая эффективность сглаженных статистик Колмогорова—Смирнова также совпадает с эффективностью классических статистик.

*Ключевые слова*: сглаженная эмпирическая функция распределения, большие уклонения, производящая функция моментов, статистики Колмогорова—Смирнова.

Библиогр. 15 назв.

УДК 519.21

Е г о р о в В. А. **О скорости сходимости к пуассоновскому процессу** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 21–28.

Пусть $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных многомерных сферически симметричных случайных векторов, таких, что для некоторого $\alpha > 0$,

$\alpha \neq 1$, выполнено условие

$$(|\xi| > x) \to x^{-\alpha} L^{\alpha},$$

где $L > 0$ — постоянная.

В статье определено специальное $l_p$-расстояние между точечными случайными процессами. Показано, что определенную выше последовательность случайных векторов $\xi$, соответствующие биномиальные точечные процессы и предельный пуассоновский процесс можно реализовать на одном вероятностном пространстве таким образом, что с вероятностью единица $l_p$-расстояния между биномиальными и пуассоновским процессами стремятся к нулю. Получена простая оценка скорости убывания этих расстояний. В качестве следствия получена оценка скорости сходимости сумм независимых случайных векторов к соответствующему устойчивому случайному вектору.

*Ключевые слова*: пуассоновский процесс, биномиальный точечный процесс, устойчивое распределение, области притяжения, $l_p$-метрики, предельные теоремы теории вероятностей.

Библиогр. 8 назв.

УДК 519.21

Зайцев А. Ю. **О скорости убывания функций концентрации $n$-кратных сверток вероятностных распределений** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 29–33.

Получен следующий результат о поведении функций концентрации $n$-кратных сверток вероятностных распределений. Пусть $\varphi(n)$ — произвольная последовательность, стремящаяся к бесконечности при $n$, стремящемся к бесконечности, а $\psi(x)$ — произвольная функция, стремящаяся к бесконечности при $x$, стремящемся к бесконечности. Показано, что тогда существует такое вероятностное распределение $F$ случайной величины $X$, что бесконечно математическое ожидание $\mathbf{E}\,\psi(|X|)$, причем верхний предел последовательности $\sqrt{n}\,\varphi(n)\,Q_n$ равен бесконечности, где $Q_n$ — максимальный атом $n$-кратной свертки распределения $F$. Тем самым, никакие условия бесконечности моментов не могут обеспечить существенно более быстрого, чем $o(n^{-1/2})$, убывания функции концентрации $n$-кратных сверток.

*Ключевые слова*: функции концентрации, $n$-кратные свертки распределений, оценки скорости убывания, суммы независимых одинаково распределенных случайных величин.

Библиогр. 28 назв.

УДК 519.23

Ибрагимов И. А. **Периодические стационарные процессы и неравенство Виноградова—Пойа** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 34–42.

Предлагаются неравенства для моментов максимума сумм элементов случайной стационарной последовательности. Одним из следствий доказанных неравенств является неравенство Виноградова—Пойа о суммах характеров Дирихле.

*Ключевые слова*: стационарные процессы, неравенство Виноградова—Пойа, характеры Дирихле.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.23

Невзоров В. Б. **О некоторых регрессионных соотношениях, связывающих выборочные средние и последовательные максимумы** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 43–47.

В последние годы появились работы, в которых были получены характеризации ряда распределений регрессионными свойствами порядковых статистик.

В частности, в 2002 году были представлены характеризации $t_2$-распределения Стьюдента линейными регрессионными соотношениями, включающими выборочную медиану $X_{2,3}$ и выборочное среднее $T_3$. Позже были приведены аналогичные результаты и для выборок большего объема. Были получены характеризации семейств распределений, включающих $t_2$-распределение. Эти характеризации были основаны, в частности, на линейных регрессионных соотношениях, связывающих выборочные средние $T_{2k+1}$ и выборочные медианы $X_{k+1,2k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

В 2005 году для выборок объема 3 была получена характеризация $t_2$-распределения, основанная на регрессионных свойствах последовательных максимумов $M_1 = X_1$, $M_2 = \max\{X_1, X_2\}$ и $M_3 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

В связи с этими результатами для максимальных порядковых статистик представляет интерес исследовать при $k \leq r$ соотношения, в которых фигурируют последовательные максимумы и выборочные средние вида

$$E(M_k|M_r = x) = \sigma x + a \quad \text{п.н.}$$

и

$$E(T_k|M_r = x) = \sigma x + a \quad \text{п.н.}$$

Такого рода линейные регрессии рассмотрены и найдены семейства распределений, характеризуемых данными соотношениями.

*Ключевые слова*: характеризации распределений, порядковые статистики, последовательные максимумы, выборочные средние, линейные регрессии.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.2

Р о з о в с к и й Л. В. **Малые уклонения максимального элемента последовательности взвешенных независимых случайных величин** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 48–54.

Рассмотрим последовательность $\{X_i\}$ независимых копий неотрицательной случайной величины $X$ и положим $M = \sup_{j\geq 1} \lambda_j X_j$, где $\{\lambda_j\}$ — некоторая последовательность невозрастающих положительных чисел, такая что $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$. В работе изучается асимптотическое поведение $-\log \mathbf{P}(M < r)$ при $r \to 0$.

Подобная задача рассматривалась ранее для весов $\{\lambda_j\}$ некоторого специального вида. Мы подробно исследуем достаточно важный и общий случай, в котором $-\log \mathbf{P}(M < r)$ при $r \to 0$ имеет явную асимптотику.

*Ключевые слова*: малые уклонения, максимальный элемент, неотрицательные случайные величины, медленно меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции.

Библиогр. 4 назв.

УДК 519.21

D e l a i g l e A., H a l l P. **Theoretical Properties of Principal Component Score Density Estimators in Functional Data Analysis** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 55–69.

Анализ главных компонент играет ключевую роль при исследовании функциональных данных хотя бы потому, что этот метод дает значительные возможности при редуцировании бесконечномерной проблемы в соответствующую задачу в пространстве конечной размерности. Он также позволяет понять, какие из разнообразных свойств распределения функционального объекта доступны идентификации по наблюдениям функциональной выборки. Некоторые из этих свойств могут быть выражены в терминах коэффициентов разложения по главным компонентам. При их исследовании полезно знать типы распределений этих коэффициентов, например, типы плотностей этих распределений. В 2010 г. авторами были предложены методы для оценивания этих плотностей и сформулирован теоретический результат, утверждающий, что предложенные оценки плотности асимптотически эквивалентны (в смысле первого члена асимптотики) своим «идеальным» двойникам, построенным так, как если бы были известны главные компоненты и соответствующие собственные числа, в отличие от реальных оценок, использующих по необходимости оценки этих объектов. В настоящей работе дается доказательство этой эквивалентности.

*Ключевые слова*: ширина окна, плотность, оценивание, собственные функции, собственные числа, разложение Карунена—Лоэва, ядерные методы, спектральное представление.

Библиогр. 6 назв.

УДК 519.2

Mikosh T., Pawlas Z., Samorodnitsky G. **Large deviations for Minkowski sums of heavy-tailed generally non-convex random compact sets** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 70–78.

Случайные множества с «тяжёлыми» хвостами возникают естественным образом в различных ситуациях. В статье рассматриваются большие уклонения сумм Минковского таких множеств. Приводится ряд примеров случайных множеств с «тяжёлыми» хвостами и доказывается соответствующий принцип для больших уклонений.

Основной результат статьи устанавливает асимптотику вероятностей больших уклонений при условии регулярного изменения хвостов индивидуальных слагаемых и достаточно естественных условиях на нормировку. Тем самым демонстрируется, что теория «тяжёлых» хвостов применима и для случайных множеств: экстремальные значения сумм появляются с большой вероятностью благодаря экстремальному значению одного из слагаемых.

*Ключевые слова*: Суммы Минковского, случайные компактные множества, вероятности больших уклонений.

Библиогр. 14 назв.

УДК 531.36:62-50

Акчурин Э. Г. **Управление колебаниями маятника с переменными параметрами** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 79–85.

В работе рассматриваются две задачи управления колебаниями маятника: раскачка его путём изменения длины (или положения центра тяжести) и раскачка путём изменения положения точки подвеса. В качестве цели управления рассматривается приближение к некоторому инвариантному множеству в пространстве состояний системы, а в качестве подхода к решению используется метод скоростного градиента. Полученные результаты позволяют найти ту облать начальных данных и параметров, в которой система обладает желаемыми свойствами.

*Ключевые слова*: маятник, управление, метод скоростного градиента.

Библиогр. 7 назв. Ил. 2.

УДК 519.165+168

Грачева П. В. **Метод дискретной оптимизации на основе параметризации грассманиана в многомерном структурировании дихотомических данных** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 86–94.

Рассматривается решение проблемы большого вычислительного времени в задаче многомерного структурирования дихотомических данных на основе алгебраических свойств конечных геометрий. Предлагается векторная параметризация грассманиана $Gr_2(k, n)$, позволяющая минимизировать объем используемой памяти и сократить количество операций в данной задаче. Строится алгоритм, основанный на этой параметризации и кодировании Грея, который позволяет использовать параллельные вычисления для дальнейшего сокращения вычислительного времени.

*Ключевые слова*: агрегирование информации, категориальные данные, параметризация грассманиана, сокращение вычислительного времени.

Библиогр. 11 назв.

УДК 519.214.4

Т е р т е р о в М. Н. **О предельном поведении приращений сумм независимых случайных величин из областей притяжения асимметричных устойчивых распределений** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 95–103.

Исследовано асимптотическое поведение приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с длиной приращений $(\log n)^p$. Законы, описывающие приращения такой длины, являются промежуточными между законами Чёргё—Ревеса (для больших длин приращений) и законами Эрдёша—Реньи (для малых длин приращений). Получен новый результат для случайных величин из области нормального притяжения асимметрических устойчивых законов с параметром $\alpha \in (1, 2)$.

*Ключевые слова*: предельные теоремы, приращения сумм независимых случайных величин, законы Эрдёша—Реньи.

Библиогр. 7 назв.

УДК 519.71

Ч и р к о в М. К., Ш е в ч е н к о А. С. **Конечно-нестационарные недетеминированные автоматы со случайным входом** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 104–115.

Работа посвящена исследованию свойств обобщенных конечно-нестационарных, задаваемых над булевой решеткой недетерминированных автоматов с дополнительным случайным входом, которые связаны с определением класса языков, представляемых такими автоматными моделями. Введены новые понятия об элементарной недетерминированной автоматный структуре со случайным входом, об обобщенном конечно-нестационарном недетерминированном автомате со случайным входом, об индуцируемом им обобщенном отображении и о представляемом таким автоматом обобщенном языке. Доказан ряд утверждений, обосновывающих процесс синтеза для любого заданного обобщенного конечно-нестационарного недетерминированного автомата со случайным входом, эквивалентного ему по представляемому обобщенному вероятностному языку стационарного абстрактного вероятностного конечного автомата. Получена оценка числа состояний синтезируемого вероятностного автомата и разработан подробный алгоритм такого синтеза, продемонстрированный на примере.

*Ключевые слова*: вероятностные автоматы, вероятностные языки, конечно-нестационарные недетерминированные автоматы, моделирование вероятностных языков автоматными моделями со случайным входом.

Библиогр. 9 назв. Ил. 1. Табл. 2.

УДК 531.3:534.013

Б ы к о в В. Г., М е л ь н и к о в А. Е. **Автоматическая балансировка диска на гибком массивном валу** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 116–126.

На основе введения обобщенных лагранжевых координат, учитывающих формы колебаний упругого тела, построена новая математическая модель неуравновешенного гибкого ротора с распределенной массой, оснащенного шаровым автобалансирующим устройством. Выведены системы обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной форме, описывающие динамику ротора как в неподвижной, так и во вращающейся системах координат. Получены условия существования стационарных режимов и аналитические формулы для расчета амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик несбалансированных стационарных режимов. Проведено исследование устойчивости сбалансированного стационарного режима. Результаты расчетов по данной модели сравниваются с результатами, полученными для модели ротора с невесомым валом.

*Ключевые слова*: гибкий ротор, автобалансирующее устройство, обобщенные Лагранжевы координаты.

Библиогр. 8 назв. Ил. 9. Табл. 1.

УДК 539.3

Иомдина Е. Н., Полоз М. В. **Биомеханическое моделирование возрастных изменений аккомодации глаза человека** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 127–132.

В рамках биомеханической модели глаза изучены возрастные изменения механизма аккомодации, зависимости объема аккомодации от возраста, проведено сравнение расчетных результатов с клиническими данными. Численное моделирование проводилось методом конечных элементов (ANSYS). Показано, что с возрастом, когда жесткость ядра хрусталика становится больше, чем жесткость его коры, хрусталик теряет свою нормальную форму и деформационную способность, вследствие чего объем аккомодации падает, а сам аккомодационный механизм изменяется: преломляющая сила глаза при аккомодационном напряжении цилиарной мышцы оказывается меньше, чем при ее расслаблении.

*Ключевые слова*: аккомодация, хрусталик, численное моделирование.

Библиогр. 19 назв. Ил. 4.

УДК 539.3

Карамшина Л. А. **О деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 133–138.

В данной работе построено решение задачи о деформации тонкой упругой сферической оболочки, состоящей из двух трансверсально-изотропных слоев, под действием внутреннего и внешнего давления. Каждый слой представляет собой трансверсально-изотропную сферическую оболочку с различными биомеханическими свойствами. Предполагается, что имеется жесткий контакт на поверхности сопряжения слоев. Вводится неизвестное усилие взаимодействия между слоями, которое определяется из условий сопряжения слоев по перемещениям. Для определения напряженно-деформированного состояния оболочки используются уравнения трехмерной теории упругости в сферических координатах. Касательные напряжения на поверхости контакта имеют разрыв. Найден коэффициент, характеризующий величину этого разрыва. Распределения перемещений и напряжений по толщине для конкретных значений упругих постоянных и давления представлены в виде графиков. Найдены изменения толщины слоев при различных значениях модуля Юнга.

*Ключевые слова*: двухслойная сферическая оболочка, трансверсально-изотропные слои, разрыв тангенсальных напряжений, распределения напряжений и перемещений по толщине.

Библиогр. 5 назв. Ил. 6. Табл. 1.

УДК 533.6.07:534

Люсин В. Д., Рябинин А. Н. **Исследование влияния удлинения призмы на ее аэродинамические характеристики и амплитуду колебаний при галопировании** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 139–145.

Рассматривается математическая модель галопирования призмы, упруго закрепленной в потоке газа, в квазистатическом приближении. В дозвуковой аэродинамической трубе получены зависимости аэродинамических коэффициентов нормальной силы от угла атаки для нескольких призм различного удлинения. Предложена новая функция для аппроксимации этой зависимости. Показано, что для призм малого удлинения предлагаемая функция лучше, чем ранее используемые, аппроксимирует экспериментальные зависимости. Методом Крылова—Боголюбова получены зависимости амплитуды колебаний призм от скорости набегающего потока. Оказалось, что амплитуда установившихся колебаний при большой скорости потока возрастает с увеличением удлинения от 1 до 10 и уменьшается при дальнейшем увеличении удлинения. Критическая скорость потока уменьшается с ростом удлинения до 10, а затем увеличивается. Для всех призм существуют области гистерезиса, в которых устойчивыми являются два решения уравнений, описывающих установившиеся колебания. Критическая скорость для призм малого удлинения является правой границей области гистерезиса. Оснащение призм концевыми шайбами, препятствующими перетеканию воздуха через торцы, изменяет коэффициент нормальной силы в области малых углов атаки. Критическая скорость уменьшается, уменьшается также диапазон скоростей потока, в котором существует гистерезис. Левая граница области гистерезиса больше критической скорости.

*Ключевые слова*: аэродинамический коэффициент, малое удлинение, галопирование, гистерезис, математическая модель.

Библиогр. 15 назв. Ил. 5. Табл. 1.

УДК 532.542, 621.22, 62.567.2

Синильщиков В. Б. **Феноменологическая модель нестационарного течения слабосжимаемой жидкости через дроссель** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 146–157.

Рассматривается задача о нестационарном течении слабосжимаемой жидкости через дроссель. Предложена новая модель для расчета нестационарной скорости истечения, учитывающая инерционность формирования течения. Средняя скорость истечения представляется в виде суммы акустической и гидродинамической скоростей. Акустическая составляющая характеризует волновые процессы и определяется из обобщения формулы для распада разрыва. Гидродинамическая скорость характеризует инерционные процессы и определяется из дифференциального уравнения. Структура уравнений такова, что при прохождении волны автоматически выполняются известные акустические соотношения, а при установлении течения — обобщенное уравнение Бернулли. Получены соотношения для среднего давления на торцевых стенках и в сечении дросселя. Проведено сравнение результатов расчетов по данной модели с результатами численных экспериментов. Полученные результаты могут найти применение при расчете гидроударов в гидравлических системах, а также ударных и высокочастотных нагружениях амортизированных систем в которых используются гидродемпферы.

*Ключевые слова*: дроссель, волновые процессы, истечение, гидравлическое сопротивление, время установления.

Библиогр. 7 назв. Ил. 4.

УДК 52-64

Колесов А. К., Кропачева Н. Ю. **О мгновенном точечном источнике энергии в бесконечной среде** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 158–162.

Изучается нестационарный перенос излучения в однородной бесконечной среде, освещенной мгновенным точечным источником энергии. Показано, что характеристики поля излучения в случае трехмерных сферически симметричных сред связаны простым соотношением с соответствующими величинами в случае одномерных сред. Формулы для средней интенсивности, потока излучения и функции источников получены для двух случаев: когда фотоны находятся в основном в поглощенном состоянии (случай A) или когда они пребывают в пути между актами рассеяния (случай B).

*Ключевые слова*: нестационарный перенос излучения, точечный источник энергии, сферически симметричная среда, поле излучения.

Библиогр. 8 назв.

**A B S T R A C T S**

UDK 519.21

*Bulinski A. V.* **Central limit theorem for positively associated stationary random** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 5–13.

Positively associated random fields defined on $d$-dimensional lattice arise in various models of mathematical statistics, percolation, statistical physics and reliability theory. We consider the fields with covariance function satisfying a more general condition than summability. The criterion of validity of the central limit theorem (CLT) is established for the partial sums of a field from that class. These sums are taken over growing parallelepipeds or cubes. The well-known Newman hypothesis claims that for an associated stationary random field the mentioned requirement on the covariance function behavior implies CLT. As was shown by N. Herrndorf and A. P. Shashkin, the hypothesis fails already for $d = 1$. This paper reveals the key role of the uniform integrability of the squares of the field partial sums for the CLT to hold. Thus we obtain an extension of the Lewis theorem, proved for a sequence of random variables, and also show how the Newman hypothesis should be modified for any $d$. A representation for the field partial sums variance in terms of slowly varying multivariate functions is essential here.

*Keywords*: random fields, dependence conditions, stationarity, central limit theorem, uniform integrability.

Bibliogr. 14 references.

UDK 519.23

*Butorina Yu. O., Nikitin Ya. Yu.* **On large deviations of smoothed Kolmogorov—Smirnov statistics** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 14–20.

We study logarithmic large deviation asymptotics for Kolmogorov—Smirnov type goodness-of-fit and symmetry statistics based on smoothed empirical distribution functions. Such statistics depend on the choice of the kernel and of the bandwidth. This prohibits from using standard methods for the evaluation of large deviation asymptotics for distribution-free statistics based on empirical distribution functions. Hence we use the different approach which uses the Plachky—Steinebach theorem. It turns out that the results are the same as in the case of classical Kolmogorov—Smirnov statistics based on usual empirical distribution function. It follows, in particular, that the Bahadur efficiency of smoothed Kolmogorov—Smirnov statistics also coincides with the efficiency of classical statistics.

*Keywords*: smoothed empirical distribution function, large deviations, moment generating function, Kolmogorov—Smirnov statistics.

Bibliogr. 15 references.

UDK 519.21

*Egorov V. A.* **On the rate of convergence to a Poisson process** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 21–28.

Let $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ be a sequence of independent identically distributed spherically symmetrical random vectors. Let $(|\xi| > x) \to x^{-\alpha} L^{\alpha}$, for some $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ where $L > 0$ is a constant.

The special $l_p$-distance between point random processes is defined in the article. We construct the sequence of random vectors $\xi$, the corresponding binomial point processes and limit Poisson process on the same probability space in such a way that the $l_p$-distances between binomial processes and the limit Poisson process tend to zero with the probability one. A simple estimate of the rate of decreasing of this $l_p$-distance is derived. As a consequence of this result we estimate the rate of

convergence to the limit stable random vector for the sums of independent random vectors from the domain of attraction of stable law.

*Keywords*: Poisson process, binomial point process, stable distribution, the domain of attraction, $l_p$-metrics, limit theorems of the probability theory.

Bibliogr. 8 references.

UDK 519.21

*Zaitsev A. Yu.* **On the rate of rapid decay of concentration functions of $n$-fold convolutions of probability distributions** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 29–33.

The following result on the behavior of concentration functions of $n$-fold convolutions of probability distributions is obtained. Let $\varphi(n)$ be an arbitrary sequence, tending to infinity as $n$ tends to infinity, and let $\psi(x)$ be an arbitrary function, tending to infinity as $x$ tends to infinity. Then it is shown that there exists a probability distribution $F$ of a random variable $X$ such that the expectation $\mathbf{E}\,\psi(|X|)$ is infinite and the upper limit of the sequence $\sqrt{n}\,\varphi(n)\,Q_n$ is infinite, where $Q_n$ is the maximal atom of the $n$-fold convolution of distribution $F$. Thus, any condition of infiniteness of moments cannot ensure an essentially faster, than $o(n^{-1/2})$, decay of concentration functions of $n$-fold convolutions.

*Keywords*: concentration functions, $n$-fold convolutions of distributions, rate of decay, sums of i.i.d. random variables.

Bibliogr. 28 references.

UDK 519.23

*Ibragimov I. A.* **Periodic stationary processes and Polya—Vinogradov's inequality** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 34–42.

We prove some inequalities for the maximum of sums of random stationary periodic sequences. A corollary of the inequalities is Polya—Vinogradov's inequality for Dirichlet characters.

Key words: stationary random processes, Polya—Vinogradov inequality, Dirichlet characters.

Bibliogr. 4 references.

UDK 519.23

*Nevzorov V. B.* **On some regressional relations for sample means and sequential maxima** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 43–47.

A lot of papers on the characterizations of some distributions by regressional properties of order statistics were appeared during the previous ten years. In particular, in 2002 it was found that Student's $t_2$-distribution is characterized by linear regressional relations between sample median $X_{2,3}$ and sample mean $T_3$. Later some analogical results were given for samples of any large volumes. There were given characterizations of families of distributions including $t_2$-distribution as a partial case. These characterizations were based, in particular, on linear regressional relations between sample means $T_{2k+1}$ and sample medians $X_{k+1,2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ In 2005 a characterization of $t_2$-distribution based on regressional properties of sequential maxima $M_1 = X_1$, $M_2 = \max\{X_1, X_2\}$ and $M_3 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ was obtained.

Hence it is interesting to study such relations for maxima and sample means as $E(M_k|M_r = x) = \sigma x + a$ and $E(T_k|M_r = x) = \sigma x + a$, for any $k \le r$.

These linear regressions are investigated, and the corresponding families of distributions, characterizing by such equalities, are presented.

*Keywords*: characterizations of distributions, order statistics, sequential maxima, sample means, linear regressions.

Bibliogr. 6 references.

UDK 519.2

*Rozovsky L. V.* **Small deviations of the maximal element of the sequence of weighted independent variables** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 48–54.

Consider a sequence $\{X_i\}$ of independent copies of non-negative random variable $X$ and denote $M = \sup_{j\geq 1} \lambda_j X_j$, where $\{\lambda_j\}$ is a sequence of positive and non-increasing numbers, such that $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$. In work the asymptotic behavior of $-\log \mathbf{P}(M < r)$ as $r \to 0$ is considered.

A similar problem was examined earlier for special weights $\{\lambda_j\}$. We thoroughly study rather general and important case under which $-\log \mathbf{P}(M < r)$ as $r \to 0$ has an asymptotics of explicit form.

*Keywords*: small deviations, maximal element, non-negative random variables, slowly varying function, regularly varying function.

Bibliogr. 4 references.

UDK 519.21

*Delaigle A., Hall P.* **Theoretical properties of principal component score density estimators in functional data analysis** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 55–69.

Principal components analysis plays a key role in functional data analysis, not least because it offers considerable potential for reducing an infinite dimensional problem to one of finite dimensional proportions. It also provides in-sight into variety properties accessible from a sample of functional data. Some of those properties can be expressed in terms of principal components scores. To explore them it is helpful to know the shapes of the distributions of those scores, for example, the shapes of their probability density functions. The authors in 2010 introduced methods for estimating those densities and stated a theoretical result. This result asserted that the density estimators are first-order asymptotically equivalent to their «ideal» counterparts constructed using the actual principal component scores, rather than estimators of those scores. In the present paper we give a proof of this equivalence.

*Keywords*: bandwidth, density, estimation, eigenfunctions, eigenvalues, Karuhen—Loeve expansion, kernel methods, spectral decomposition.

Bibliogr. 6 references.

UDK 519.2

*Mikosh T., Pawlas Z., Samorodnitsky G.* **Large deviations for Minkowski sums of heavy-tailed generally non-convex random compact sets** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 70–78.

We prove large deviation results for Minkowski sums of iid random compact sets where we assume that the summands have a regularly varying distribution. The result confirms the heavy-tailed large deviation heuristics: “large” values of the sum are essentially due to the “largest” summand.

*Keywords*: Minkowski sum, random compact set, large deviation, regularly varying distribution.

Bibliogr. 14 references.

UDK 531.36:62-50

*Akchurin E. H.* **Oscillation control for pendulum with variable parameters** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 79–85.

Two problems of pendulum control are investigated: swinging pendulum by changing it’s length (or gravity center position) and by changing it’s suspension point position. An approximation to some invariant set in state space of the system is considered as an objective of control. As an attitude to the problem solution a high-speed gradient method is used. The results obtained in the work allow us to find an area of initial conditions and parameters, where system possesses desired properties, and to select values of those parameters in practice.

*Keywords*: pendulum, control, high-speed gradient.

Bibliogr. 7 references. Fig. 2.

UDK 519.165+168

*Gracheva P. V.* **Method of discrete optimization in multidimensional dichotomic data structurization via Grassmannian parametrization** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 86–94.

The article deals with the combinatorial optimization problem appearing in certain multideminsional dichotomic data clustering approaches. A method to reduce large computational time based on algebraic properties of finite geometries is considered. Vector parametrization of $Gr_2(k, n)$ Grassmannian is proposed. Such parametrization makes it possible to minimize the amount of memory required for the computation and to reduce the number of operations. A greedy algorithm based on this parametrization and on Gray codes is proposed. This algorithm allows for parallel processing to reduce further the computation time.

*Keywords*: information aggregation, categorial data, Grassmannian parametrization, computation time reduction.

Bibliogr. 11 references.

UDK 519.214.4

*Terterov M.* **On asymptotic behaviour of the increments of sums of independent random variables from domains of attraction of asymmetric stable laws** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 95–103.

We investigate the asymptotic behavior of the increments of sums of the i.i.d. random variables with a length of the increments of $(\log n)^p$. The laws describing increments of this length are the transitional ones between Csörgő—Révész laws (for large increments) and Erdős—Rényi laws (for small increments). The new result is obtained for the random variables from a domain of attraction of asymmetric stable laws with index $\alpha \in (1, 2)$.

*Keywords*: limit theorems, increments, sums of independent random variables, Erdős—Rényi laws.

Bibliogr. 7 references.

UDK 519.71

*Tchirkov M. K., Shevchenko A. S.* **Finite-nonstationary nondeterministic automata with stochastic input** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 104–115.

This paper is devoted to the analysis of properties of generalized finite-nonstationary nondeterministic automata specified at Boolean lattice with an additional stochastic input which are connected with definition of the languages class represented by that sort of automaton models. There are introduced new conceptions about elementary nondeterministic automaton structure with a stochastic input, generalized finite-nonstationary nondeterministic automaton with a stochastic input, generalized language represented by that automaton. A number of conclusions validating the synthesis process of the equivalent abstract stochastic automaton presenting the same generalized stochastic language, for any generalized finite-nonstationary nondeterministic automaton with stochastic input, are proved. The estimate for states number of synthesized stoshastic automaton is found and detailed algorithm of that synthesis is worked out and shown with an example.

*Keywords*: stochastic automata, stochastic languages, finite-nonstationary nondeterministic automata, modelling of stochastic languages by automata models with stochastic input.

Bibliogr. 9 references. Fig. 1. Tabl. 2.

UDK 531.3:534.013

*Bykov V. G., Melnikov A. E.* **Automatic balancing of the disk on flexible massive shaft** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 116–126.

The new mathematical model of an unbalanced flexible rotor with the distributed mass and ball autobalancing device is offered on the basis of introduction of the generalized Lagrangian coordinates taking account of the natural modes of an elastic body. Systems of the ordinary differential equations describing dynamics of a rotor both in fixed frame and in rotating one are derived in the complex form. The existence conditions of stationary modes and analytical formulas for calculating the amplitude-frequency and phase-frequency characteristics of the unbalanced stationary modes are obtained. Stability of balanced stationary modes is investigated. The results of calculations for this model are compared with the results obtained for the model of the rotor with a weightless shaft.

*Keywords*: flexible rotor, autobalancing device, generalized Lagrangian coordinates.

Bibliogr. 8 references. Fig. 9. Tabl. 1.

UDK 539.3

*Iomdina E. N., Poloz M. V.* **Biomechanical modeling of age-related changes of human eye accommodation** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 127–132.

A biomechanical model of the eye was used to study age-related changes of accommodation mechanism, including the dependence of accommodation volume on the subject's age. Theoretical calculations were compared with clinical data. Numerical modeling was performed using the method of finite elements as implemented in ANSYS. It was demonstrated that the crystalline lens loses its normal shape and deformation potential with age when the nucleus rigidity in the lens becomes higher than cortex rigidity. Consequently, the accommodation volume drops and the whole accommodation mechanism reverses: the refractive power of the eye in the tension phase of the ciliary muscle becomes lower than in the relaxation phase.

*Keywords*: eye accommodation, chrystalline lens, numerical modeling.

Bibliogr. 19 references. Fig. 4.

UDK 539.3

*Karamshina L. A.* **On deformation of transversally isotropic two-layered spherical shell** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 133–138.

Solution of the given stress-stain state problem of the thin elastic transversally isotropic two-layered spherical shell under internal and external pressure is built. Each layer is considered as transversally isotropic spherical shell with different mechanical properties. The case of stiff contact between the layers is supposed. The unknown pressure of layers interaction, which is defined by coupling condition in displacements, is introduced. The theory of solid mechanics in terms of spherical coordinates is used for determination of stress-stain state of the shell. It is shown that tangential stresses have discontinuity on the coupling face. The discontinuity measure is obtained. Displacement and stress patterns through-the-thickness of the layers for certain elastic properties and pressure are shown in graphics. The shell layers thickness change for different range of values for Young's modulus is obtained.

*Keywords*: two-layered spherical shell, transversally isotropic layers, tangential stress discontinuity, displacement and stress patterns through-the-thickness.

Bibliogr. 5 references. Fig. 6. Tabl. 1.

UDK 533.6.07:534

*Lyusin V. D., Ryabinin A. N.* **Investigation of aspect ratio of the prism on its aerodynamic characteristics and the vibration amplitude during prism galloping** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 139–145.

A mathematical model of the prism galloping is considered. The prism is elastically mounted in the gas flow. The quasi-static approach is used. The dependence of the normal aerodynamic coefficient on the angle of attack is obtained in the subsonic wind tunnel for a number of prisms of different aspect ratio. A new function for this dependence approximation is proposed. It is shown that proposed function approximates the experimental dependence better than previously used one for prisms of small aspect ratio. The dependences of the prism vibration amplitude on flow velocity is obtained by means of the method of Krylov—Bogoliubov. It is found that the amplitude of steady oscillation at high flow velocities increases with the aspect ratio increasing from 1 to 10 and decreases with further increasing of the aspect ratio. Critical velocity of the flow decreases with increasing of the prism aspect ratio up to 10 and then increases. For all the prisms, there are velocity diapasons of the hysteresis, in which the two solutions of the equations describing the steady-state oscillations are stable. The critical velocity for prisms of small aspect ratio is the right boundary of the hysteresis diapason. If the prism is equipped with end plates, which are barriers for flowing air through the ends, the normal force coefficient changes at small angle of attack. The critical velocity reduces; a hysteresis diapason reduces as well. The left boundary of the hysteresis diapason is greater than the critical velocity.

*Keywords*: aerodynamic coefficient, small aspect ratio, galloping, hysteresis, mathematical model.

Bibliogr. 15 references. Fig. 5. Tabl. 1.

UDK 532.542, 621.22, 62.567.2

*Sinilshchikov V. B.* **A phenomenological model of nonstationary flow of weakly compressible fluid through a throttle** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 146–157.

The problem of nonstationary flow of weakly compressible fluid through a throttle is considered. A new model is offered to calculate a nonstationary outflow velocity, taking into account the response rate of flow formation. The average outflow velocity is represented as a sum of acoustic and hydrodynamic velocities. The acoustic one characterizes wave processes and is defined from a generalization of a formula for disintegration of discontinuity. The hydrodynamic velocity characterizes inertia processes and is determined from a differential equation. The structure of equation is such that when a wave is passing, the known acoustic relations are performed automatically, and for a steady flow we have a generalized Bernoulli equation. The relations for average pressures at the throttle's end walls and its cross-section are obtained. Calculation results by this model are compared to the results of numerical experiments. The results obtained can be used when calculating the hydraulic impacts in hydraulic systems, as well as when computing the impact and high-frequency loadings of shock absorption systems in which hydrodampers are used.

*Keywords*: throttle, wave processes, outflow, hydraulic resistance, transient time.

Bibliogr. 7 references. Fig. 4.

UDK 52-64

*Kolesov A. K., Kropacheva N. Yu.* **On a momentary point energy source in an infinite medium** // Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1. 2011. Issue 2. P. 158–162.

Nonstationary radiative transfer in a homogeneous infinite medium illuminated by a momentary point energy source has been considered. It is shown that the characteristics of the radiation field in the case of three-dimensional spherically symmetric media may be expressed quite simply in terms of these values in the case of one-dimensional media. The formulas for the mean intensity, the radiation flux and the source function have been obtained for two cases: when photons are mainly in an absorbed state (case A) or they are in a way between acts of scattering (case B).

*Keywords*: nonstationary radiative transfer, point energy source, spherically symmetric media, radiation field.

Bibliogr. 8 references.

## CONTENTS

### Dedicated to the 80th anniversary of the birth of V. V. Petrov



### Mathematics



### Mechanics



### Astronomy