Euler-karakteristik for fusionskategorier

Martin Wedel Jacobsen

17. april 2010

Indledning

Der findes mange forskellige metoder til delvis klassifikation af endelige grupper. En af de mest velkendte er Sylow-undergrupperne: for enhver endelig gruppe G og ethvert primtal p findes der en undergruppe af G hvis orden er den højeste potens af p der går op i $|G|$. Sylow-p-undergruppen er ikke nødvendigvis entydigt bestemt, men dens isomorfiklasse er. Isomorfiklasserne af Sylow-p-undergrupperne af G for hvert primtal p indeholder da en del information om strukturen af G. Men denne information er langt fra nok til at bestemme G; et modeksempel findes allerede blandt grupper af orden 6, hvor den cykliske gruppe C_6 og den symmetriske gruppe S_3 har isomorfe Sylow-p-undergrupper for hvert primtal p, men de to grupper er ikke isomorfe.

Én måde at indkode mere information om strukturen af G er ved at betragt fusionskategorierne på G. Til en gruppe G hører en fusionskategori $\mathcal{F}_p(G)$ for hvert primtal p. Denne kategori indeholder ikke blot information om Sylow-p-undergrupperne af G, men om alle p-undergrupper af G og hvorvidt de er indbyrdes konjugerede i G. $\mathcal{F}_p(G)$ indeholder således mere information end blot isomorfiklassen af en Sylow-p-undergruppe af G. Eksempelvis kan fusionskategorierne skelne C_6 og S_3; $\mathcal{F}_3(C_6)$ og $\mathcal{F}_3(S_3)$ er ikke isomorfe. Fusionskategorierne har blandt andet været anvendt i beviset for dele af klassifikationen af de endelige simple grupper, og de har siden fundet anvendelse til beskrivelse af klassificerende rum for grupper (se f.eks. [BLO]) og i repræsentationsteori (se f.eks. [Pui]).

Uafhængigt af alle disse overvejelser omkring grupper har Tom Leinster defineret en Euler-karakteristik for visse endelige kategorier. Denne karakteristik er defineret alene ud fra kategoriteoretiske egenskaber, og betegnelsen Euler-karakteristik retfærdiggøres af en række pæne sammenhænge med andre, velkendte, former for Euler-karakteristik.

Jeg har valgt at undersøge Euler-karakteristikken for fusionskategorier for at se om der her skulle dukke nogle interessante mønstre op. Det viser sig at der findes en formel for $\chi(\mathcal{F}_p(G))$ udtrykt ved indekserne i G af centralisatorerne af de elementarabelske p-undergrupper af G. Denne formel kan bruges til at vise at når P er en Sylow-p-undergruppe af G er $[G : P]\chi(\mathcal{F}_p(G))$ altid et heltal. Den medfører også en produktformel for Euler-karakteristikken: der gælder $\chi(\mathcal{F}_p(G\times G')) = \chi(\mathcal{F}_p(G)) + \chi(\mathcal{F}_p(G')) - \chi(\mathcal{F}_p(G))\chi(\mathcal{F}_p(G'))$. I to særtilfælde kan Euler-karakteristikken beregnes direkte: hvis p ikke går op i ordenen af G, er $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = 0$, og hvis centret for G indeholder et element af orden p, er $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = 1$. Desuden har jeg fundet at hvis G har en Sylow-p-undergruppe der enten er normal i G eller abelsk, er $0 \leq \chi(\mathcal{F}_p(G)) \leq 1$.

Notation

Når $\mathcal{C}$ er en kategori betegner ob$\mathcal{C}$ mængden af objekter i $\mathcal{C}$, og for to objekter A og B i $\mathcal{C}$ betegner $\mathcal{C}(A, B)$ mængden af afbildninger fra A til B. $A \cong B$ betyder altid at A og B er isomorfe i en kategori, ikke blot at de er isomorfe som grupper. $A \simeq B$ angiver at A og B er isomorfe som grupper, uden henvisning til en underliggende kategori. Det samme symbol bruges også til at udtrykke at to kategorier er ækvivalente.

Ved sumtegn summeres der altid over mængden af objekter i en kategori (typisk $\mathcal{F}_p(G)$), medmindre andet er angivet. Summationsindekset er den første variabel der indgår i betingelsen for summationen; $\sum_{H\cong K}$ betyder således at der summeres over alle objekter H der er isomorfe med et givet objekt K.

S_n betegner den symmetriske gruppe af orden $n!$, D_n betegner diedergruppen af orden $2n$, og C_n betegner den cykliske gruppe af orden n. Specielt betegnes den trivielle gruppe ved C_1. $\mathrm{Aut}(H)$

er gruppen af alle automorfier af H, og når H er en undergruppe af G er $\mathrm{Aut}_G(H)$ gruppen af automorfier af H der fremkommer ved konjugering med et element i G.

$H \subseteq K$ angiver at H er en undergruppe af K, og $H \subset K$ angiver at H er en ægte undergruppe af K. $H \times K$ er det direkte produkt af H og K, og $H \rtimes_\varphi K$ er det semidirekte produkt af H og K med hensyn til afbildningen $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$. H^n er det direkte produkt af n kopier af H.

$\mathcal{P}(X)$ er potensmængden af X.

Fusionskategorier

Definition 1. Givet en endelig gruppe G og et primtal p defineres fusionskategorien for G ved p, $\mathcal{F}_p(G)$, som følger.

- Objekterne i $\mathcal{F}_p(G)$ er alle ikke-trivielle p-undergrupper af G.
- En afbildning $\varphi : H \to K$ i $\mathcal{F}_p(G)$ er en gruppehomomorfi som fremkommer ved konjugering med et element i G: $\varphi(x) = gxg^{-1}$, $g \in G$. Mere præcist defineres en "generaliseret normalisator", kaldet *transporteren*, $N_G(H, K)$ ved $N_G(H, K) = \{g \in G \mid gHg^{-1} \subseteq K\}$. To elementer $g, h \in N_G(H, K)$ inducerer samme afbildning hvis $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ for alle $x \in H$. Dette er ensbetydende med $x(g^{-1}h) = (g^{-1}h)x$, dvs. $g^{-1}h \in C_G(H)$. Altså inducerer g og h samme afbildning hvis de er indeholdt i samme venstresideklasse af $C_G(H)$, og vi kan definere $\mathcal{F}_p(G)(H, K) = N_G(H, K)/C_G(H)$. Jeg vil gennemgående skrive φ_g for afbildningen $x \mapsto gxg^{-1}$.
- Kompositionen af afbildninger er den sædvanlige komposition af gruppehomomorfier. Dette er veldefineret da afbildningen $\varphi_g \circ \varphi_h$ er givet ved konjugering med gh, dvs. der gælder $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$. Kompositionen er oplagt associativ.
- Identitetsafbildningen på et objekt H er afbildningen $\varphi_1 : H \to H$ hvor 1 er det neutrale element i G.

Ofte defineres fusionskategorien således at også den trivielle gruppe er et objekt i kategorien. Denne gruppe er da altid et intialt objekt i $\mathcal{F}_p(G)$, så der går ikke noget information tabt ved at udelade den.

Eksempel 1. Betragt gruppen $G = S_3 \times C_3$. Jeg betegner elementerne i C_3 med e, g og g^2, og for at gøre notationen lettere skriver jeg $(123)g$ i stedet for det mere korrekte $((123), g)$. G har tre ikke-trivielle 2-undergrupper, nemlig $\langle(12)e\rangle$, $\langle(23)e\rangle$ og $\langle(31)e\rangle$, og $\mathcal{F}_2(G)$ ser således ud:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle(31)e\rangle \arrow[loop left, "(1)e"] \arrow[dl, shift left, "(123)e"] \arrow[dr, shift left, "(132)e"] & \\
\langle(12)e\rangle \arrow[loop left, "(1)e"] \arrow[ur, shift left, "(132)e"] \arrow[rr, shift left, "(123)e"] & & \langle(23)e\rangle \arrow[loop right, "(1)e"] \arrow[ul, shift left, "(123)e"] \arrow[ll, shift left, "(132)e"]
\end{tikzcd}$$

Ud for hver pil er angivet et element der frembringer den tilhørende afbildning, dvs. et element g så afbildningen er lig $x \mapsto gxg^{-1}$.

G har fem ikke-trivielle 3-undergrupper, nemlig $\langle (123)e, (1)g\rangle$ af orden 9 og $\langle (123)e\rangle$, $\langle (123)g\rangle$, $\langle (123)g^2\rangle$ og $\langle (1)g\rangle$ af orden 3. $\mathcal{F}_3(G)$ ser således ud:

$$\begin{tikzcd}
& & \langle (123)e,(1)g\rangle \arrow[loop above, "{(1)e,(12)e}"] & & \\
\langle (123)e\rangle \arrow[loop left, "{(1)e,(12)e}"] \arrow[urr, "{(1)e,(12)e}"] & & & & \langle (1)g\rangle \arrow[loop right, "(1)e"] \arrow[ull, "(1)e"'] \\
& \langle (123)g\rangle \arrow[loop left, "(1)e"] \arrow[uur, "{(1)e,(12)e}"] \arrow[rr, shift left, "(12)e"] & & \langle (123)g^2\rangle \arrow[loop right, "(1)e"] \arrow[uul, "{(1)e,(12)e}"'] \arrow[ll, shift left, "(12)e"] &
\end{tikzcd}$$

I de tilfælde hvor der er to afbildninger mellem bestemte grupper er der kun tegnet én pil, og frembringende elementer for de to afbildninger er angivet ved pilen, adskilt med komma.

G har ingen ikke-trivielle 5-undergrupper, så $\mathcal{F}_5(G)$ er den tomme kategori. Det gælder mere generelt at hvis G er en vilkårlig gruppe og p er et primtal med $p \nmid |G|$, er $\mathcal{F}_p(G)$ den tomme kategori.

Enhver afbildning $\varphi_g : H \to K$ i $\mathcal{F}_p(G)$ er injektiv, så der må nødvendigvis gælde $|H| \leq |K|$. Hvis φ_g er en isomorfi, skal der findes en afbildning $(\varphi_g)^{-1} : K \to H$, og så må $|K| \leq |H|$. Kombineret med den første ulighed giver dette $|H| = |K|$. Omvendt gælder også at hvis $|H| = |K|$, er φ_g en isomorfi. Billedet af φ_g er nemlig gHg^{-1}, og idet $|gHg^{-1}| = |H| = |K|$, må gHg^{-1} være hele K. Vi kan så betragte afbildningen $\varphi_{g^{-1}} : K \to H$. Dette er en invers afbildning til φ_g, idet der haves $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_1$ og $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_1$. Altså haves:

Lemma 1. *Lad $\varphi : H \to K$ være en vilkårlig afbildning i $\mathcal{F}_p(G)$. Da gælder $|H| \leq |K|$, og φ er en isomorfi hvis og kun hvis $|H| = |K|$.*

Såfremt der både findes en afbildning $\varphi : H \to K$ og en afbildning $\varphi' : K \to H$, siger Lemma 1 at der både gælder $|H| \leq |K|$ og $|K| \leq |H|$. Så er $|H| = |K|$ og begge afbildninger er isomorfier.

Lemma 2. *Hvis der både findes en afbildning $\varphi : H \to K$ og en afbildning $\varphi' : K \to H$, er $H \cong K$.*

Isomorfierne har endnu en vigtig rolle i en fusionskategori. Der gælder nemlig følgende:

Lemma 3. *Enhver afbildning $\varphi_g : H \to K$ kan på unik måde skrives som $\varphi_g = \varphi'' \circ \varphi'$ hvor φ' er en isomorfi og φ'' er en inklusion.*

Bevis. Faktoriseringen er let at finde: lad blot φ' være afbildningen $\varphi_g : H \to gHg^{-1}$ og lad φ'' være afbildningen $\varphi_1 : gHg^{-1} \to K$. Det er også let at se at dette er den eneste mulige faktorisering. Eftersom φ'' er en inklusion må φ' være givet ved konjugering med g, ganske som φ_g. Da φ' er en isomorfi, må dens kodomæne så netop være billedet af φ_g, altså gHg^{-1}. Dette er så også domænet for φ'', og dermed er både φ' og φ'' entydigt bestemt. $\square$

Det vil også vise sig nyttigt at vide hvor mange objekter i $\mathcal{F}_p(G)$ der er isomorfe med et givet objekt H. Hvis $\varphi_g : H \to K$ er en isomorfi, er K som før lig kodomænet af φ_g, gHg^{-1}. Omvendt er enhver gruppe af formen gHg^{-1} isomorf med H i $\mathcal{F}_p(G)$, da der findes $\varphi_g : H \to gHg^{-1}$ og $\varphi_{g^{-1}} : gHg^{-1} \to H$. Endelig gælder for vilkårlige $g, h \in G$ at $gHg^{-1} = hHh^{-1}$ hvis og kun hvis $H = (g^{-1}h)H(g^{-1}h)^{-1}$. Dette forekommer netop når $g^{-1}h \in N_G(H)$, altså når g og h tilhører samme venstresideklasse af $N_G(H)$. Altså fås:

Lemma 4. *For ethvert objekt H i $\mathcal{F}_p(G)$ gælder at der findes netop $[G : N_G(H)]$ objekter i $\mathcal{F}_p(G)$ der er isomorfe med H.*

En tæt relateret variant af fusionskategorien er følgende: Hvis P er en Sylow-p-undergruppe af G, defineres $\mathcal{F}_P(G)$ ved at objekterne er alle ikke-trivielle undergrupper af P, og afbildningerne er som i $\mathcal{F}_p(G)$. Hvis G har en unik Sylow-p-undergruppe P, er naturligvis $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_p(G)$. Men selv hvis der er flere Sylow-p-undergrupper, gælder et svagere udsagn, nemlig $\mathcal{F}_P(G) \simeq \mathcal{F}_p(G)$ for enhver Sylow-p-undergruppe P. Der findes nemlig en oplagt inklusionsfunktor $F : \mathcal{F}_P(G) \to \mathcal{F}_p(G)$. Denne funktor er troværdig og fuld per definitionen af $\mathcal{F}_P$ og $\mathcal{F}_p$. At den også er tæt følger af Sylows anden sætning: Givet en vilkårlig p-undergruppe H (altså et objekt i $\mathcal{F}_p(G)$) findes et element $g \in G$ så $gHg^{-1} \subseteq P$. Da er gHg^{-1} et objekt i $\mathcal{F}_P(G)$, og i $\mathcal{F}_p(G)$ findes en isomorfi $\varphi_g : H \to gHg^{-1}$. $\mathcal{F}_P(G)$ siges at være et *fusionssystem på P*. Der findes en større teori for sådanne fusionssystemer på p-grupper; se [BLO] for en oversigt.

Euler-karakteristik for en kategori

Tom Leinster har defineret Euler-karakteristikken $\chi(\mathcal{C})$ for en endelig kategori $\mathcal{C}$; se [Lei] for hans præsentation af denne. Heri retfærdiggøres navnet "Euler-karakteristik" gennem en række sammenhænge med andre former for Euler-karakteristik; disse vil ikke blive nævnt yderligere her.

Definition 2. For en endelig kategori $\mathcal{C}$ defineres *tilstødelsesfunktionen* $\zeta : \mathrm{ob}\mathcal{C} \times \mathrm{ob}\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ ved $\zeta(A, B) = |\mathcal{C}(A, B)|$, altså antallet af afbildninger fra A til B. En *vægtning* på $\mathcal{C}$ defineres til at være en funktion $\kappa : \mathrm{ob}\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ med den egenskab at for ethvert $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ er $\sum_B \zeta(A, B)\kappa(B) = 1$. En *kovægtning* er en vægtning på $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, altså en funktion $\lambda : \mathrm{ob}\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ som opfylder at for ethvert $B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ er $\sum_A \lambda(A)\zeta(A, B) = 1$. Såfremt der eksisterer både en vægtning og en kovægtning på $\mathcal{C}$, defineres Euler-karakteristikken for $\mathcal{C}$ ved $\chi(\mathcal{C}) = \sum_A \kappa(A)$ hvor κ er en vilkårlig vægtning eller kovægtning. Dette er veldefineret, da der for en vilkårlig vægtning κ og kovægtning λ gælder

$$\sum_A \lambda(A) = \sum_A \sum_B \lambda(A)\zeta(A, B)\kappa(B) = \sum_B \kappa(B)$$

ζ kan også betragtes som en matrix hvis rækker og søjler er indekseret ved $\mathrm{ob}\mathcal{C}$; den kaldes da *tilstødelsesmatricen*. En vægtning κ er da en søjlevektor som opfylder at $\zeta\kappa = [1, \ldots, 1]^T$, den søjlevektor hvis indgange alle er 1. Tilsvarende er en kovægtning λ en rækkevektor som opfylder $\lambda\zeta = [1, \ldots, 1]$.

Eksempel 2. Betragt igen gruppen $G = S_3 \times C_3$ fra Eksempel 1. For $\mathcal{F}_2(G)$ ser matricen ζ således ud:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Der er mange mulige vægtninger og kovægtninger. For eksempel er $[1, 0, 0]^T$ en vægtning og $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ en kovægtning. Euler-karakteristikken for $\mathcal{F}_2(G)$ er $\chi(\mathcal{F}_2(G)) = 1 + 0 + 0 = 1$.

For $\mathcal{F}_3(G)$ ser ζ således ud:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Objekterne i $\mathcal{F}_3(G)$ er her ordnet i rækkefølgen $\langle(1)g\rangle$, $\langle(123)e\rangle$, $\langle(123)g\rangle$, $\langle(123)g^2\rangle$, $\langle(123)e,(1)g\rangle$. En mulig vægtning er $[\frac{1}{2},0,0,0,\frac{1}{2}]^T$ og en mulig kovægtning er $[1,\frac{1}{2},1,0,-\frac{3}{2}]$. Euler-karakteristikken for $\mathcal{F}_3(G)$ er $\chi(\mathcal{F}_3(G)) = 1+\frac{1}{2}+1+0-\frac{3}{2} = 1$.

For $\mathcal{F}_5(G)$ bliver ζ den unikke 0×0-matrix. Der findes en unik vægtning og kovægtning, begge med 0 indgange. Euler-karakteristikken for $\mathcal{F}_5(G)$ er $\chi(\mathcal{F}_5(G)) = 0$, værdien af den tomme sum. Vi så i Eksempel 1 at hvis G er en vilkårlig gruppe og p et primtal med $p \nmid |G|$, er $\mathcal{F}_p(G)$ den tomme kategori. I disse tilfælde gælder altså $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = 0$.

Eksempel 3. Tom Leinster har bevist at hvis $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er kategorier der har Euler-karakteristik, så har $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ også Euler-karakteristik, og der gælder $\chi(\mathcal{C}\times\mathcal{D}) = \chi(\mathcal{C})\chi(\mathcal{D})$ ([Lei] Proposition 2.6). Men dette kan ikke umiddelbart overføres til fusionskategorier, da det ikke gælder at $\mathcal{F}_p(G\times G') \cong \mathcal{F}_p(G)\times\mathcal{F}_p(G')$. De to kategorier er end ikke ækvivalente. Eksempelvis består $\mathcal{F}_3(C_3)$ af ét objekt, C_3, med én automorfi, φ_1, så dens tilstødelsesmatrix er [1], og [1] er både en vægtning og en kovægtning. Altså er $\chi(\mathcal{F}_3(C_3)) = 1$. Tilsvarende består $\mathcal{F}_3(S_3)$ af ét objekt med to automorfier så dens tilstødelsesmatrix er [2], og $[\frac{1}{2}]$ er både en vægtning og en kovægtning. Dermed er $\chi(\mathcal{F}_3(S_3)) = \frac{1}{2}$. Så indeholder $\mathcal{F}_3(S_3)\times\mathcal{F}_3(C_3)$ netop ét objekt, og der gælder $\chi(\mathcal{F}_3(S_3)\times\mathcal{F}_3(C_3)) = \chi(\mathcal{F}_3(S_3))\chi(\mathcal{F}_3(C_3)) = \frac{1}{2}$. Men i Eksempel 1 så vi at $\mathcal{F}_3(S_3\times C_3)$ indeholder ikke-isomorfe objekter, så den kan ikke være ækvivalent med $\mathcal{F}_3(S_3)\times\mathcal{F}_3(C_3)$, og i Eksempel 2 så vi at $\chi(\mathcal{F}_3(S_3\times C_3)) = 1$. Der gælder i stedet en mere subtil sammenhæng; se Sætning 33.

Isomorfe objekter opfører sig ganske pænt i forhold til funktionen ζ. Givet en vilkårlig afbildning $f : A \to B$ og et vilkårligt objekt X i en kategori $\mathcal{C}$ findes der nemlig en induceret afbildning $f^* : \mathcal{C}(B,X) \to \mathcal{C}(A,X)$ givet ved $f^*(h) = h\circ f$. Hvis f er en isomorfi, er f^* bijektiv, da den har den inverse afbildning $(f^{-1})^* : \mathcal{C}(A,X) \to \mathcal{C}(B,X)$. Dermed har $\mathcal{C}(A,X)$ og $\mathcal{C}(B,X)$ samme kardinalitet, så $\zeta(A,X) = \zeta(B,X)$. Tilsvarende fås at hvis $A\cong B$, er $\zeta(X,A) = \zeta(X,B)$ for alle $X\in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. Hvis ζ betragtes som en matrix, betyder dette at to isomorfe objekter A og B har identiske rækker hhv. søjler i ζ. Som en konsekvens af dette fås at hvis κ er en (ko)vægtning på $\mathcal{C}$ og $\kappa' : \mathrm{ob}\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ er en funktion som for ethvert $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$ opfylder $\sum_{B\cong A}\kappa'(B) = \sum_{B\cong A}\kappa(B)$, så er κ' også en (ko)vægtning. Altså er en (ko)vægtning essentielt givet ved summen af dens værdier på hver isomorfiklasse af objekter i $\mathcal{C}$.

Lad nu $\mathcal{S}$ være et skelet af $\mathcal{C}$. ob$\mathcal{S}$ indeholder da netop ét objekt fra hver isomorfiklasse i ob$\mathcal{C}$, så givet en (ko)vægtning κ på $\mathcal{C}$ kan vi definere en (ko)vægtning κ' på $\mathcal{S}$ ved $\kappa'(A) = \sum_{B\cong A}\kappa(B)$. Omvendt kan en (ko)vægtning på $\mathcal{S}$ udvides til en (ko)vægtning på $\mathcal{C}$ ved blot at definere den til at være 0 på de objekter i $\mathcal{C}$ der ikke ligger i $\mathcal{S}$. Heraf ses at hvis den ene af de to kategorier $\mathcal{C}$ og $\mathcal{S}$ har Euler-karakteristik, så har den anden det også, og i så fald haves $\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{S})$. Eftersom ækvivalente kategorier har isomorfe skeletter, følger det heraf at Euler-karakteristik er bevaret under ækvivalens af kategorier. (Dette er [Lei] Proposition 2.4b.)

Når $\mathcal{C}$ er en skeletal kategori, er det muligt at matricen ζ er invertibel. I så fald udgør dens søjler en basis for vektorrummet $\mathbb{R}^n$ hvor n er kardinaliteten af ob$\mathcal{C}$, og der må derfor findes en *unik* vægtning. En simpel udregning viser at vægtningen kan findes ved at summere søjlerne i matricen ζ^{-1}. Tilsvarende findes der en unik kovægtning, som fås ved at summere rækkerne i ζ^{-1}.

I det tilfælde hvor $\mathcal{C}$ er skelettet af en fusionskategori, er dens ζ-matrix faktisk invertibel:

Sætning 5. *Skelettet af en fusionskategori har invertibel ζ-matrix.*

Bevis. Lad der være givet en vilkårlig fusionskategori, og lad $\mathcal{S}$ være et skelet af denne kategori. Vi definerer en relation $\leq$ på ob$\mathcal{S}$ ved $A \leq B$ hvis $\zeta(A, B) > 0$. Denne relation er refleksiv da der for ethvert A findes $1_A \in \mathcal{S}(A, A)$, hvilket medfører $A \leq A$. Den er også transitiv: hvis $A \leq B$ og $B \leq C$ findes $f \in \mathcal{S}(A, B)$ og $g \in \mathcal{S}(B, C)$. Da er $g \circ f \in \mathcal{S}(A, C)$, og dermed er $A \leq C$. Antag endelig at $A \leq B$ og $B \leq A$. Da findes $f \in \mathcal{S}(A, B)$ og $g \in \mathcal{S}(B, A)$, og Lemma 2 giver da at $A \cong B$. Da $\mathcal{S}$ er skeletal, medfører dette at $A = B$. Relationen $\leq$ er altså også antisymmetrisk. Den er derfor en partiel ordning.

Denne partielle ordning kan udvides til en total ordning. Objekterne i $\mathcal{C}$ kan altså betegnes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ på en sådan måde at hvis der findes en afbildning fra A_i til A_j, må $i \leq j$. Dette medfører at hvis $i > j$ er $\zeta(A_i, A_j) = 0$. Med denne ordning bliver ζ-matricen for $\mathcal{C}$ altså en øvre trekantsmatrix, så dens determinant er lig med produktet af dens diagonalelementer. Disse elementer er netop $\zeta(A_i, A_i)$. Men $\mathcal{S}(A_i, A_i)$ er ikke-tom, idet den indeholder identitetsafbildningen 1_{A_i}. Ingen af diagonalelementerne er altså 0, så matricens determinant er ikke 0. Den er dermed invertibel. $\square$

Som en direkte konsekvens af dette fås:

Korollar 6. *Enhver fusionskategori har Euler-karakteristik.*

Og idet Euler-karakteristik er bevaret under ækvivalens af kategorier har vi også:

Korollar 7. *For enhver endelig gruppe G med Sylow-p-undergruppe P gælder $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \chi(\mathcal{F}_P(G))$.*

Eksempel 4. Sætning 5 og Korollar 6 gælder også for den variant af fusionskategorien der inkluderer C_1 som et objekt, med præcist samme bevis. I dette tilfælde er det let at beregne Euler-karakteristikken, da C_1 er et initial objekt. Definer nemlig en kovægtning λ ved $\lambda(C_1) = 1$ og $\lambda(H) = 0$ for $H \neq C_1$; at dette faktisk er en kovægtning ses ved at der for alle objekter K gælder

$$\sum_H \lambda(H)\zeta(H, K) = \lambda(C_1)\zeta(C_1, K) = 1 \cdot 1 = 1$$

Kategoriens karakteristik bliver da $\sum_H \lambda(H) = 1$.

Sætning 5 giver at et skelet $\mathcal{S}$ af en fusionskategori $\mathcal{F}_p(G)$ har en *unik* vægtning $\bar{\kappa}$ og kovægtning $\bar{\lambda}$. Enhver vægtning κ på $\mathcal{F}_p(G)$ må da opfylde $\sum_{H \cong K} \kappa(H) = \bar{\kappa}(K)$ for alle $K \in$ ob$\mathcal{S}$, og enhver funktion der opfylder dette er en vægtning på $\mathcal{F}_p(G)$. Der er altså ikke en unik vægtning på $\mathcal{F}_p(G)$ (medmindre $\mathcal{F}_p(G)$ er skeletal). Men der findes netop én vægtning κ som opfylder $\kappa(H) = \kappa(K)$ for alle H og K med $H \cong K$. Dens funktionsværdier kan beregnes ud fra $\bar{\kappa}$ ved brug af Lemma 4.

Definition 3. Lad $\mathcal{S}$ være et skelet af $\mathcal{F}_p(G)$, og lad $\bar{\kappa}$ være den unikke vægtning på $\mathcal{S}$. Da defineres den *kanoniske vægtning* κ på $\mathcal{F}_p(G)$ ved $\kappa(H) = [G : N_G(H)]^{-1}\bar{\kappa}(K)$ hvor K er det unikke objekt i $\mathcal{S}$ der er isomorft med H. Den kanoniske kovægtning λ på $\mathcal{F}_p(G)$ defineres analogt ud fra den unikke kovægtning $\bar{\lambda}$ på $\mathcal{S}$.

En tæt relateret funktion på ob$\mathcal{F}_p(G)$ vil vise sig nyttig. $\bar{\kappa}$ er defineret på $\mathcal{S}$, så dens definitionsområde kan udvides til hele ob$\mathcal{F}_p(G)$ ved for ethvert $H \in$ ob$\mathcal{F}_p(G)$ at sætte $\bar{\kappa}(H) = \bar{\kappa}(K)$ hvor K er det objekt i $\mathcal{S}$ der er isomorft med H. $\bar{\kappa}$ er da *ikke* en vægtning på $\mathcal{F}_p(G)$, men dens restriktion til et vilkårligt skelet af $\mathcal{F}_p(G)$ er en vægtning på skelettet. Funktionen er relateret til den kanoniske vægtning ved $\bar{\kappa}(H) = [G : N_G(H)]\kappa(H)$ for alle $H \in$ ob$\mathcal{F}_p(G)$. $\bar{\lambda}$ udvides på tilsvarende vis.

Egenskaber ved vægtningen

Det viser sig at den kanoniske vægtning κ på en fusionskategori $\mathcal{F}_p(G)$ er tæt forbundet med centret af G, $Z(G)$. Centret er en abelsk gruppe, så det har en unik Sylow-p-undergruppe $Z_p(G)$. Hovedresultatet i dette afsnit vil være følgende:

Sætning 8. *Hvis $Z_p(G)$ er ikke-triviel, er $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = 1$.*

En ikke-triviel p-gruppe G har et ikke-trivielt center som i sig selv er en p-gruppe; dermed er $Z_p(G)$ ikke-triviel. Specielt haves altså:

Korollar 9. *Hvis G er en ikke-triviel p-gruppe, er $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = 1$.*

Først bevises et par lemmata.

Lemma 10. *Lad H være en vilkårlig ikke-triviel p-undergruppe i G og lad K være en vilkårlig p-undergruppe der indeholder $Z_p(G)$. Da er $\mathcal{F}_p(G)(H, K) = \mathcal{F}_p(G)(HZ_p(G), K)$.*

Bevis. Bemærk først at da $Z_p(G)$ er indeholdt i centret for G, kommuterer ethvert element i H med ethvert element i $Z_p(G)$. Dermed er $HZ_p(G)$ isomorf med en faktorgruppe af $H \times Z_p(G)$, og er altså en p-gruppe. Den er ikke-triviel da den indeholder H, og er dermed et objekt i $\mathcal{F}_p(G)$.

To ting skal nu bevises: $N_G(H, K) = N_G(HZ_p(G), K)$ og $C_G(H) = C_G(HZ_p(G))$. Idet $H \subseteq HZ_p(G)$ er det oplagt at $N_G(HZ_p(G), K) \subseteq N_G(H, K)$. Lad nu g være et vilkårligt element i $N_G(H, K)$. Da gælder $ghg^{-1} \in K$ for ethvert $h \in H$. Lad hz, $h \in H$, $z \in Z_p(G)$, være et vilkårligt element i $HZ_p(G)$. Da gælder $g(hz)g^{-1} = (ghg^{-1})z \in KZ_p(G) = K$ hvor den sidste lighed følger af $Z_p(G) \subseteq K$. Dermed er $g \in N_G(HZ_p(G), K)$, hvilket medfører $N_G(H, K) \subseteq N_G(HZ_p(G), K)$. Altså er $N_G(H, K) = N_G(HZ_p(G), K)$.

Idet $H \subseteq HZ_p(G)$ er det klart at $C_G(HZ_p(G)) \subseteq C_G(H)$. Lad nu g være et vilkårligt element i $C_G(H)$; da gælder $ghg^{-1} = h$ for ethvert $h \in H$. Lad hz, $h \in H$, $z \in Z_p(G)$ være et vilkårligt element i $HZ_p(G)$. Da gælder $g(hz)g^{-1} = (ghg^{-1})z = hz$, og dermed er $g \in C_G(HZ_p(G))$. Dette medfører $C_G(H) \subseteq C_G(HZ_p(G))$, hvorved haves $C_G(H) = C_G(HZ_p(G))$. □

Lemma 11. *For ethvert objekt H i $\mathcal{F}_p(G)$ gælder*

$$\zeta(H, H)\bar{\kappa}(H) + \sum_{|K|>|H|} \zeta(H, K)\kappa(K) = 1$$

Bevis. Idet κ er en vægtning gælder $\sum_K \zeta(H, K)\kappa(K) = 1$. Per Lemma 1 er $\zeta(H, K) = 0$ medmindre $|H| < |K|$ eller $H \cong K$, hvorved fås

$$\sum_{K \cong H} \zeta(H, K)\kappa(K) + \sum_{|K|>|H|} \zeta(H, K)\kappa(K) = 1$$

Den første sum kan yderligere omskrives:

$$\sum_{K \cong H} \zeta(H, K)\kappa(K) = \sum_{K \cong H} \zeta(H, H)\kappa(K) = \zeta(H, H) \sum_{K \cong H} \kappa(K) = \zeta(H, H)\bar{\kappa}(H)$$

Herved fås det ønskede. □

Sætning 12. *For enhver ikke-triviel p-undergruppe H af G der ikke indeholder $Z_p(G)$ gælder $\kappa(H) = 0$.*

Bevis. Antag for modstrid at der findes en undergruppe H der opfylder $Z_p(G) \nsubseteq H$ og $\kappa(H) \neq 0$. Det kan antages uden tab af generalitet at H har maksimal orden blandt sådanne undergrupper. Per Korollar 11 gælder nu $\zeta(H,H)\bar{\kappa}(H) + \sum_{|K|>|H|} \zeta(H,K)\kappa(K) = 1$. Ifølge antagelserne gælder $\kappa(K) = 0$ for alle undergrupper K med $|K| > |H|$ og $Z_p(G) \nsubseteq K$, så vi har

$$\zeta(H,H)\bar{\kappa}(H) + \sum_{\substack{|K|>|H| \\ K \supseteq Z_p(G)}} \zeta(H,K)\kappa(K) = 1$$

Per Korollar 10 fås heraf

$$\zeta(H,H)\bar{\kappa}(H) + \sum_{\substack{|K|>|H| \\ K \supseteq Z_p(G)}} \zeta(HZ_p(G),K)\kappa(K) = 1$$

Idet κ er en vægtning gælder nu

$$\sum_K \zeta(HZ_p(G),K)\kappa(K) = 1$$

Hvis $\zeta(HZ_p(G),K) \neq 0$ findes der en afbildning $\varphi_g : HZ_p(G) \to K$. Så haves $K \supseteq g(HZ_p(G))g^{-1} \supseteq g(Z_p(G))g^{-1} = Z_p(G)$, hvor den sidste lighed følger af at $Z_p(G)$ er indeholdt i centret for G. Altså haves $Z_p(G) \subseteq K$. Yderligere fås fra Lemma 1 at $|K| \geq |HZ_p(G)|$. Idet H ikke indeholder $Z_p(G)$, haves $|HZ_p(G)| > |H|$, hvorved fås $|K| > |H|$. Dermed haves

$$\sum_{\substack{|K|>|H| \\ K \supseteq Z_p(G)}} \zeta(HZ_p(G),K)\kappa(K) = \sum_K \zeta(HZ_p(G),K)\kappa(K) = 1$$

Når dette kombineres med den forrige ligning fås $\zeta(H,H)\bar{\kappa}(H) = 0$. Da $\zeta(H,H) \neq 0$ følger heraf $\bar{\kappa}(H) = 0$, og dermed $\kappa(H) = 0$. Dette er en modstrid. □

Det er nu muligt at bevise Sætning 8.

Bevis for Sætning 8. Idet $Z_p(G)$ er en ikke-triviel p-undergruppe af G, er den et objekt i $\mathcal{F}_p(G)$. For et vilkårligt $g \in G$ og et vilkårligt $z \in Z_p(G)$ gælder nu $gzg^{-1} = zgg^{-1} = z$, og dermed er $\varphi_g = \varphi_1$ på $Z_p(G)$. Så må $\zeta(Z_p(G),K) = 1$ hvis $Z_p(G) \subseteq K$ og $\zeta(Z_p(G),K) = 0$ ellers. Per definitionen på en vægtning gælder nu at $\sum_K \zeta(Z_p(G),K)\kappa(K) = 1$. Ved at indsætte de kendte værdier for $\zeta(Z_p(G),K)$ fås

$$\sum_{K \supseteq Z_p(G)} \kappa(K) = 1.$$

Per Sætning 12 haves yderligere

$$\sum_{K \nsupseteq Z_p(G)} \kappa(K) = 0.$$

Ved at summere disse to ligninger fås $\sum_K \kappa(K) = 1$. Altså har $\mathcal{F}_p(G)$ Euler-karakteristik 1. □

Egenskaber ved kovægtningen

Kovægtningen på en fusionskategori viser sig at være forbundet med de elementarabelske undergrupper af G. Hovedresultatet i dette afsnit vil være følgende:

Sætning 13. *Lad H være et vilkårligt objekt i $\mathcal{F}_p(G)$. Hvis H ikke er en elementarabelsk gruppe, er $\bar{\lambda}(H) = \lambda(H) = 0$. I modsat fald er H isomorf med C_p^n for et vist $n \in \mathbb{N}$, og der gælder*

$$\bar{\lambda}(H) = \frac{(-1)^{n+1} p^{n(n-1)/2}}{[N_G(H) : C_G(H)]}$$

og

$$\lambda(H) = \frac{(-1)^{n+1} p^{n(n-1)/2}}{[G : C_G(H)]}$$

Først fastsætter jeg lidt notation som vil være nyttig i dette afsnit.

Definition 4. For en endelig gruppe G og et primtal p defineres $\mathcal{A}_p(G)$ til at være mængden af *ikke-trivielle* elementarabelske p-undergrupper af G. Tilsvarende defineres $\mathcal{A}_p^0(G)$ til at være mængden af *alle* elementarabelske p-undergrupper af G. Der gælder altså $\mathcal{A}_p^0(G) = \mathcal{A}_p(G) \cup \{C_1\}$.

Definition 5. Rangen af en elementarabelsk p-gruppe E er dimensionen af gruppen betragtet som et vektorrum over legemet $\mathbb{F}_p$. Rangen af E betegnes $r(E)$. Der gælder altså $E \simeq C_p^{r(E)}$.

Af Lemma 3 fås direkte følgende ligning for ζ:

Lemma 14. *For vilkårlige H og K i $\mathcal{F}_p(G)$ gælder*

$$\zeta(H, K) = \sum_{\substack{L \cong H \\ L \subseteq K}} \zeta(H, L)$$

Definer $\iota : \mathrm{ob}\mathcal{F}_p(G) \times \mathrm{ob}\mathcal{F}_p(G) \to \mathbb{R}$ ved $\iota(H, K) = 1$ hvis $H \subseteq K$ og $\iota(H, K) = 0$ ellers; da kan Lemma 14 også skrives som

$$\zeta(H, K) = \sum_{L \cong H} \zeta(H, L)\iota(L, K)$$

Lad nu K være et vilkårligt objekt i $\mathcal{F}_p(G)$, og lad $\mathcal{S}$ være et skelet af $\mathcal{F}_p(G)$ der indeholder K. Da gælder per definitionen på $\bar{\lambda}$ at $\sum_{H \in \mathrm{ob}\mathcal{S}} \bar{\lambda}(H)\zeta(H, K) = 1$. Ovenstående ligning indsættes:

$$\sum_{H \in \mathrm{ob}\mathcal{S}} \bar{\lambda}(H) \sum_{L \cong H} \zeta(H, L)\iota(L, K) = 1$$

Idet $L \cong H$, er $\bar{\lambda}(H) = \bar{\lambda}(L)$ og $\zeta(H, L) = \zeta(L, L)$:

$$\sum_{H \in \mathrm{ob}\mathcal{S}} \sum_{L \cong H} \bar{\lambda}(L)\zeta(L, L)\iota(L, K) = 1$$

Når H løber over et skelet af $\mathcal{F}_p(G)$ og L løber over de objekter i $\mathcal{F}_p(G)$ der er isomorfe med H, så løber L over alle objekter i $\mathcal{F}_p(G)$ netop én gang. Dermed fås

$$\sum_{L} \bar{\lambda}(L)\zeta(L, L)\iota(L, K) = 1$$

Og per definitionen af ι haves så:

Lemma 15. *For ethvert K i $\mathcal{F}_p(G)$ gælder*

$$\sum_{L \subseteq K} \bar{\lambda}(L)\zeta(L, L) = 1$$

Værdierne af $\bar{\lambda}$ kan bestemmes iterativt ved brug af Lemma 15. Lad først K være en gruppe af orden p; da har K kun én ægte undergruppe, nemlig den trivielle gruppe, og denne er ikke et objekt i $\mathcal{F}_p(G)$. Dermed reduceres ligningen til $\bar{\lambda}(K)\zeta(K, K) = 1$, så der gælder

$$\bar{\lambda}(K) = \frac{1}{\zeta(K, K)}$$

Herefter kan man lade K være en gruppe af orden p^2; ligningen udtrykker da $\bar{\lambda}(K)$ ud fra værdier af $\bar{\lambda}$ for nogle grupper af orden p samt visse værdier af ζ. Dette kan fortsættes indtil man er kommet igennem alle objekter i $\mathcal{F}_p(G)$. Men det viser sig at der findes en mere generel metode, baseret på teorien for Möbius-inversion.

I en partielt ordnet mængde M defineres et lukket interval til at være en mængde af formen $\{x \in M \mid a \leq x \leq b\}$ hvor a og b er elementer i M med $a \leq b$. Intervallet betegnes $[a, b]$. Hvis alle de lukkede intervaller i M er endelige, siges M at være lokalt endelig. For en lokalt endelig partielt ordnet mængde M og en kommutativ ring med enhed R defineres *tilstødelsesalgebraen* (engelsk: "incidence algebra") $\mathcal{I}(M, R)$ til at bestå af alle funktioner fra mængden af lukkede intervaller i M til R. I denne algebra defineres addition punktvis, og multiplikation ved

$$(f * g)(a, b) = \sum_{x \in [a,b]} f(a, x)g(x, b)$$

(Bemærk at man normalt skriver $f(a, x)$ i stedet for $f([a, x])$.) Dette er veldefineret, da $[a, b]$ er endelig. I det tilfælde hvor M er endelig, kan elementerne i tilstødelsesalgebraen betragtes som matricer hvis rækker og søjler er indekseret ved M, og som opfylder $f(a, b) = 0$ hvis $a \not\leq b$. Multiplikation i tilstødelsesalgebraen er da blot almindelig matrixmultiplikation.

En tilstødelsesalgebra har altid et multiplikativt neutralt element, nemlig delta-funktionen givet ved $\delta(a, a) = 1$ og $\delta(a, b) = 0$ for $a \neq b$. Det giver derfor mening at tale om multiplikative inverse. Zeta-funktionen for en tilstødelsesalgebra defineres ved $\zeta(a, b) = 1$ for alle intervaller $[a, b]$. ζ er da netop tilstødelsesfunktionen for M betragtet som en kategori. Denne funktion er altid invertibel i $\mathcal{I}(M, R)$, og dens inverse betegnes μ og kaldes tilstødelsesalgebraens Möbius-funktion. Årsagen til dette navn er at denne funktion har egenskaber analoge til den klassiske Möbius-funktion. Givet en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{I}(M, R)$ kan man definere $g = f * \zeta$, således at g bliver givet ved

$$g(a, b) = \sum_{x \in [a,b]} f(a, x)$$

Da vil $f = g * \mu$, så der gælder

$$f(a, b) = \sum_{x \in [a,b]} g(a, x)\mu(x, b)$$

Den klassiske Möbius-inversion er et specialtilfælde af dette: lad M være mængden af positive heltal ordnet ved divisibilitet, lad $R = \mathbb{R}$, og lad $a = 1$. Da reduceres ovenstående udtryk til

$$g(1, b) = \sum_{x \mid b} f(1, x)$$

og

$$f(1,b) = \sum_{x|b} g(1,x)\mu(x,b)$$

Da der gælder $\mu(x,b) = \mu'(b/x)$ hvor μ' er den klassiske Möbius-funktion, er dette netop den klassiske Möbius-inversion. Se i øvrigt [SOD] for en nærmere beskrivelse af tilstødelsesalgebraer.

Lad nu for en vilkårlig gruppe G $\mathcal{SG}(G)$ være den partielt ordnede mængde bestående af alle undergrupper af G med inklusion som ordningen. Lad μ_G være Möbius-funktionen for $\mathcal{I}(\mathcal{SG}(G), \mathbb{R})$, og lad K være en vilkårlig undergruppe af G. Da gælder

$$\sum_{H \subseteq K} \mu_G(C_1, H) = \sum_{H \subseteq K} \mu_G(C_1, H)\zeta(H, K) = (\mu_G * \zeta)(C_1, K) = \delta(C_1, K)$$

Når $K = C_1$, er $\delta(C_1, K) = 1$, og hele ligningen reduceres til $\mu_G(C_1, C_1) = 1$. I alle andre tilfælde fås

$$\sum_{H \subseteq K} \mu_G(C_1, H) = 0$$

Relevansen af alle disse betragtninger ses i følgende lemma:

Lemma 16. *Lad G være en vilkårlig endelig gruppe, og lad K være en ikke-triviel p-undergruppe af G. Da er K et objekt i både $\mathcal{F}_p(G)$ og $\mathcal{SG}(G)$, og der gælder*

$$\bar{\lambda}(K)\zeta(K, K) = -\mu_G(C_1, K)$$

Bevis. Beviset forløber ved induktion over ordenen af K for et fastholdt G. Når K har orden p, har vi allerede set at $\bar{\lambda}(K)\zeta(K,K) = 1$. Ud fra $\sum_{H \subseteq K} \mu_G(C_1, H) = 0$ fås $\mu_G(C_1, C_1) + \mu_G(C_1, K) = 0$, og da $\mu_G(C_1, C_1) = 1$ følger $-\mu_G(C_1, K) = 1$.

For større K bemærkes først at alle undergrupper af K også er objekter i $\mathcal{F}_p(G)$, bortset fra C_1. Fra Lemma 15 haves så

$$\sum_{\substack{H \subseteq K \\ H \neq C_1}} \bar{\lambda}(H)\zeta(H, H) = 1$$

hvor betingelsen $H \neq C_1$ nu er gjort eksplicit. For μ_G fås

$$\sum_{\substack{H \subseteq K \\ H \neq C_1}} \mu_G(C_1, H) = \sum_{H \subseteq K} \mu_G(C_1, H) - \mu_G(C_1, C_1) = 0 - 1 = -1$$

Disse to ligninger lægges sammen, og så fås

$$\sum_{\substack{H \subseteq K \\ H \neq C_1}} (\bar{\lambda}(H)\zeta(H, H) + \mu_G(C_1, H)) = 0$$

Induktionsantagelsen siger nu at $\bar{\lambda}(H)\zeta(H,H) + \mu_G(C_1, H) = 0$ for $H \subset K$, og ved at indsætte disse værdier i ligningen fås

$$\bar{\lambda}(K)\zeta(K, K) + \mu_G(C_1, K) = 0$$

præcis som ønsket. □

Det nyttige ved denne omskrivning er at værdierne af μ_G kan beregnes mere direkte. Der gælder nemlig følgende:

Lemma 17. *Lad G være en vilkårlig endelig gruppe og lad L være en undergruppe af G. Definer μ_L analogt med μ_G. Da gælder for alle $K \subseteq L$*

$$\mu_G(C_1, K) = \mu_L(C_1, K)$$

Bevis. Beviset forløber ved induktion over ordenen af K. For $K = C_1$ har vi allerede set $\mu_G(C_1, C_1) = 1 = \mu_L(C_1, C_1)$. For større K haves

$$\sum_{H \subseteq K} (\mu_G(C_1, H) - \mu_L(C_1, H)) = \sum_{H \subseteq K} \mu_G(C_1, H) - \sum_{H \subseteq K} \mu_L(C_1, H) = 0$$

og per induktionsantagelsen gælder $\mu_G(C_1, H) - \mu_L(C_1, H) = 0$ for $H \subset K$. Når dette indsættes fås $\mu_G(C_1, K) - \mu_L(C_1, K) = 0$, præcis som ønsket. □

Specielt gælder $\mu_K(C_1, K) = \mu_G(C_1, K)$, så værdien af $\mu_G(C_1, K)$ må afhænge alene af isomorfiklassen af K, og ikke af hvordan den er indlejret i G. Dette er et specialtilfælde af en egenskab ved Möbius-funktionen: $\mu(a, b)$ afhænger kun af isomorfiklassen af den partielt ordnede mængde $[a, b]$.

For at lette notationen definerer jeg nu $\mu(K) = \mu_K(C_1, K)$ for enhver endelig gruppe K. Ved at kombinere Lemma 16 og Lemma 17 fås så:

Sætning 18. *For ethvert objekt K i $\mathcal{F}_p(G)$ gælder $\bar{\lambda}(K)\zeta(K, K) = -\mu(K)$ og dermed*

$$\bar{\lambda}(K) = \frac{-\mu(K)}{\zeta(K, K)}$$

Tilbage er nu at beregne værdierne af μ for endelige p-grupper. Dette kan gøres ud fra den kendte værdi $\mu(C_1) = 1$ og formlen

$$\sum_{H \subseteq K} \mu(H) = \sum_{H \subseteq K} \mu_H(C_1, H) = \sum_{H \subseteq K} \mu_K(C_1, H) = 0$$

som gælder for $K \neq C_1$. Først håndteres de p-grupper der ikke er elementarabelske; dette kræver en systematisk opdeling af de elementarabelske undergrupper af sådanne grupper.

Lemma 19. *Lad E være en ikke-triviel elementarabelsk p-gruppe og lad $E_1, \ldots, E_n$ være ægte undergrupper af E således at $\bigcap_{i=1}^n E_i$ er ikke-triviel. Lad $\mathcal{M} = \{H \subseteq E \mid \forall i : H \nsubseteq E_i\}$. Da er $\sum_{H \in \mathcal{M}} \mu(H) = 0$.*

Bevis. Beviset forløber ved induktion over n. For $n = 0$ er lemmaet sandt per definitionen af μ.

For $n > 0$ defineres $V_n = \{1, \ldots, n\}$. For enhver delmængde α af V_n defineres så $\mathcal{M}_\alpha = \{H \subseteq E \mid \forall i \in \alpha : H \subseteq E_i, \forall i \notin \alpha : H \nsubseteq E_i\}$. Bemærk at $\mathcal{M}_\emptyset = \mathcal{M}$. Enhver undergruppe H af E er så indeholdt i netop én af mængderne $\mathcal{M}_\alpha$, så der gælder

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}(V_n)} \sum_{H \in \mathcal{M}_\alpha} \mu(H) = \sum_{H \subseteq E} \mu(H) = 0$$

Betragt nu en ikke-tom mængde α, og definer $E_\alpha = \bigcap_{i\in\alpha} E_i$. Dette er en ikke-triviel undergruppe af E per antagelserne, og vi kan skrive $\mathcal{M}_\alpha = \{H \subseteq E_\alpha \mid \forall i \notin \alpha : H \nsubseteq E_i \cap E_\alpha\}$. Her er

$$\bigcap_{i\notin\alpha}(E_i \cap E_\alpha) = \left(\bigcap_{i\notin\alpha} E_i\right) \cap E_\alpha = \left(\bigcap_{i\notin\alpha} E_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in\alpha} E_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} E_i,$$

som er ikke-triviel per antagelserne. Idet α er ikke-tom gælder $|V_n\backslash\alpha| < n$, og per induktionsantagelsen fås så $\sum_{H\in\mathcal{M}_\alpha} \mu(H) = 0$. Dette gælder for alle α forskellige fra $\emptyset$, så vi kan fratrække alle disse ligninger fra den forrige ligning. Vi får så

$$\sum_{H\in\mathcal{M}_\emptyset} \mu(H) = 0,$$

hvilket netop er det ønskede. $\square$

Lemma 20. *Lad P være en ikke-triviel p-gruppe. Da er $\sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(P)} \mu(H) = 0$ og $\sum_{H\in\mathcal{A}_p(P)} \mu(H) = -1$.*

Bevis. Lad $E_1, \ldots, E_n$ være de maksimale elementarabelske undergrupper af P og lad Z' være den maksimale elementarabelske undergruppe af $Z(P)$. Z' er ikke-triviel, da $Z(P)$ er en ikke triviel p-gruppe. Desuden indeholder hvert E_i Z', for i modsat fald er E_iZ' en elementarabelsk undergruppe af P som indeholder E_i og ikke er lig E_i. E_i ville da ikke være maksimal.

Lad som før $V_n = \{1, \ldots, n\}$, og definer for hver delmængde α af V_n $\mathcal{M}_\alpha = \{H \in \mathcal{M} \mid \forall i \in \alpha : H \subseteq E_i, \forall i \notin \alpha : H \nsubseteq E_i\}$. Da er $\mathcal{A}_p^0(P)$ den disjunkte forening af mængderne $\mathcal{M}_\alpha$ når α løber over $\mathcal{P}(V_n)$. $\mathcal{M}_\emptyset$ er tom, da enhver elementarabelsk undergruppe af P er indeholdt i en af de maksimale elementarabelske undergrupper, så der gælder $\sum_{H\in\mathcal{M}_\emptyset} \mu(H) = 0$. For alle andre $\alpha \in \mathcal{P}(V_n)$ kan vi sætte $E_\alpha = \bigcap_{i\in\alpha} E_i$ som er ikke-triviel da den indeholder Z'. Vi har så $\mathcal{M}_\alpha = \{H \subseteq E_\alpha \mid \forall i \notin \alpha : H \nsubseteq E_i \cap E_\alpha\}$. Som før fås $\bigcap_{i\notin\alpha}(E_i \cap E_\alpha) = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ som ligeledes er ikke-triviel da den indeholder Z'. Så giver Lemma 19 at $\sum_{H\in\mathcal{M}_\alpha} \mu(H) = 0$. Altså haves

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(P)} \mu(H) = \sum_{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)} \sum_{H\in\mathcal{M}_\alpha} \mu(H) = \sum_{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)} 0 = 0$$

Den anden ligning følger let:

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_p(P)} \mu(H) = -\mu(C_1) + \sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(P)} \mu(H) = -1 + 0 = -1$$

$\square$

Sætning 21. *Lad P være en p-gruppe der ikke er elementarabelsk. Da er $\mu(P) = 0$.*

Bevis. Antag for modstrid at $\mu(P) \neq 0$ og at P er minimal med denne egenskab blandt p-grupper der ikke er elementarabelske. Lad $\mathcal{M} = \{H \subseteq P \mid H \notin \mathcal{A}_p^0(P)\}$. Denne mængde indeholder P, og der gælder

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(P)} \mu(H) + \sum_{H\in\mathcal{M}} \mu(H) = \sum_{H\subseteq P} \mu(H) = 0.$$

Per Lemma 20 har vi $\sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(P)}\mu(H)=0$, og dermed fås også $\sum_{H\in\mathcal{M}}\mu(H)=0$. Idet $\mu(P)\neq 0$ må der så også findes en anden gruppe $H\in\mathcal{M}'$ der opfylder $\mu(H)\neq 0$. Denne gruppe er en p-gruppe der ikke er elementarabelsk, og den har mindre orden end P. Dette er i modstrid med at P er minimal. □

Sætning 21 og Sætning 18 giver nu første halvdel af Sætning 13: hvis H ikke er elementarabelsk, er $\bar{\lambda}(H)=0$. At der også gælder $\lambda(H)=0$ følger af formlen $\bar{\lambda}(H)=[G:N_G(H)]\lambda(H)$.

At bestemme $\mu(H)$ når H er elementarabelsk kræver noget mere arbejde. Første skridt er at bestemme undergrupperne af H. Eftersom H er elementarabelsk er den isomorf med C_p^n for et vist $n\in\mathbb{N}$, og enhver undergruppe af H må have formen C_p^k med $0\leq k\leq n$. Tilbage er så at bestemme hvor mange undergrupper der er af hver af disse isomorfiklasser.

Lemma 22. *Antallet af undergrupper af C_p^n af isomorfiklassen C_p^k, $1\leq k\leq n$ er*

$$\left(\prod_{i=0}^{k-1}(p^n-p^i)\right)\Bigg/\left(\prod_{i=0}^{k-1}(p^k-p^i)\right)$$

Bevis. Lad $\mathcal{M}'$ være mængden af undergrupper af C_p^n af isomorfiklassen C_p^k; vi ønsker da at bestemme $|\mathcal{M}'|$. Lad $\mathcal{M}=\{(a_1,\ldots,a_k)\mid a_i\in C_p^n,\langle a_i\rangle\simeq C_p^k\}$ være mængden af k-tupler af elementer i C_p^n der frembringer en gruppe af isomorfiklasse C_p^k. $\mathcal{M}$ kan så skrives som en disjunkt forening af mængderne $\mathcal{M}_H=\{(a_1,\ldots,a_k)\mid a_i\in C_p^n,\langle a_i\rangle=H\}$ hvor H løber over $\mathcal{M}'$. Dermed er $|\mathcal{M}|=\sum_{H\in\mathcal{M}'}|\mathcal{M}_H|$. Betingelsen $\langle a_i\rangle=H$ medfører $a_i\in H$, og dermed kan $\mathcal{M}_H$ også skrives som $\{(a_1,\ldots,a_k)\mid a_i\in H,\langle a_i\rangle=H\}$. Idet $H\simeq H'$ for vilkårlige $H,H'\in\mathcal{M}'$ må så $|\mathcal{M}_H|=|\mathcal{M}_{H'}|$ for alle H,H'. Så haves $|\mathcal{M}|=|\mathcal{M}'|\cdot|\mathcal{M}_H|$ for ethvert $H\in\mathcal{M}'$, og dermed

$$|\mathcal{M}'|=\frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{M}_H|}$$

Tilbage er kun at beregne $|\mathcal{M}|$ og $|\mathcal{M}_H|$. Betragt C_p^n som vektorrum over det endelige legeme $\mathbb{F}_p$; da består $\mathcal{M}$ netop af k-tupler af lineært uafhængige elementer i C_p^n. Der er da p^n-1 muligheder for det første element, da det blot skal være forskelligt fra det neutrale element. Og givet de første i elementer i tuplen vil der være p^n-p^i muligheder for det $(i+1)$-te da dette element skal ligge uden for gruppen frembragt af de i første, og disse i elementer frembringer en gruppe af orden p^i da de er lineært uafhængige. Altså er $|\mathcal{M}|=\prod_{i=0}^{k-1}(p^n-p^i)$. Et tilsvarende ræsonnement viser at $|\mathcal{M}_H|=\prod_{i=0}^{k-1}(p^k-p^i)$. □

Sætning 23. *Der gælder $\mu(C_p^n)=\prod_{i=0}^{n-1}(-p^i)=(-1)^n p^{n(n-1)/2}$.*

Bevis. Beviset forløber ved induktion over n. For $n=1$ gælder

$$0=\sum_{H\subseteq C_p}\mu(H)=\mu(C_1)+\mu(C_p)=1+\mu(C_p)$$

hvoraf følger $\mu(C_p)=-1$.

For $n>1$ kan $\mu(C_p^n)$ beregnes ud fra ligningen $\sum_{H\subseteq C_p^n}\mu(H)=0$. Denne ligning kan omskrives til $-\mu(C_p^n)=\sum_{H\subset C_p^n}\mu(H)$, hvor værdien af alle leddene på højresiden kendes fra induktionsantagelsen samt ligningen $\mu(C_1)=1$. Vi har set at enhver undergruppe af C_p^n også er elementarabelsk, og at antallet af undergrupper af C_p^n af isomorfiklassen C_p^k er $\left(\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)\right) \Big/ \left(\prod_{i=0}^{k-1}(p^k - p^i)\right)$. Vi skal altså beregne værdien af summen

$$\mu(C_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mu(C_p^k) \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(p^k - p^i)} \right)$$

Først indsættes de kendte værdier for μ:

$$\begin{aligned}
\mu(C_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mu(C_p^k) \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(p^k - p^i)} \right) &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\prod_{i=0}^{k-1}(-p^i) \right) \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(p^k - p^i)} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{-p^i}{p^k - p^i} \right) \left(\prod_{i=0}^{k-1} (p^n - p^i) \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{1 - p^{k-i}} \right) \left(\prod_{i=0}^{k-1} (p^n - p^i) \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(1 - p^{k-i})} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - p^i)} \right)
\end{aligned}$$

For at komme videre herfra bevises følgende ligning for alle m med $1 \leq m \leq n-1$ ved induktion over m:

$$1 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - p^i)} \right) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)}$$

For $m = 1$ fås direkte:

$$1 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - p^i)} \right) = 1 + \frac{p^n - 1}{1 - p} = \frac{1 - p}{1 - p} + \frac{p^n - 1}{1 - p} = \frac{p^n - p}{1 - p} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)}$$

For $m > 1$ anvendes induktionsantagelsen:

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - p^i)} \right) &= 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - p^i)} \right) + \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m-1}(1 - p^i)} + \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)}(1 - p^m) + \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)}(p^n - 1) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)}(p^n - p^m) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{m}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - p^i)}
\end{aligned}$$

Ved at sætte $m = n - 1$ får vi så:

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - p^i)} \right) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - p^i)}$$

Dette produkt kan omskrives yderligere:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - p^i)} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - p^{n-i})} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{p^n - p^i}{-(p^{n-i} - 1)} = \prod_{i=1}^{n-1}(-p^i)$$

Samlet haves altså:

$$\begin{aligned}
-\mu(C_p^n) &= \mu(C_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mu(C_p^k) \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(p^k - p^i)} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{k}(1 - p^i)} \right) \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(p^n - p^i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - p^i)} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1}(-p^i)
\end{aligned}$$

Heraf følger $\mu(C_p^n) = \prod_{i=0}^{n-1}(-p^i)$, præcis som ønsket. □

Anden halvdel af Sætning 13 følger nu af Sætning 18 og Sætning 23 samt ligningerne $\zeta(H, H) = |N_G(H, H)/C_G(H)| = [N_G(H) : C_G(H)]$ og $\lambda(H) = [G : N_G(H)]^{-1}\bar{\lambda}(H)$.

Af Sætning 13 fås en formel for Euler-karakteristikken af $\mathcal{F}_p(G)$, udtrykt ved de elementarabelske p-undergrupper af G:

Sætning 24. *For enhver gruppe G gælder*

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \sum_{H \in \mathcal{A}_p(G)} \frac{-\mu(H)}{[G : C_G(H)]} = \sum_{H \in \mathcal{A}_p(G)} \frac{(-1)^{r(H)+1} p^{r(H)(r(H)-1)/2}}{[G : C_G(H)]}$$

Lad $\mathcal{S}$ være et skelet af $\mathcal{F}_p(G)$; da gælder yderligere

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \sum_{H \in ob\mathcal{S} \cap \mathcal{A}_p(G)} \frac{-\mu(H)}{[N_G(H) : C_G(H)]} = \sum_{H \in ob\mathcal{S} \cap \mathcal{A}_p(G)} \frac{(-1)^{r(H)+1} p^{r(H)(r(H)-1)/2}}{[N_G(H) : C_G(H)]}$$

Bevis. Dette følger direkte af Sætning 13 samt formlerne $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \sum_H \lambda(H)$ og $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \chi(S) = \sum_{H \in \mathrm{ob}S} \bar{\lambda}(H)$. □

Der findes også en tredje variant af formlen, hvor der itereres over undergrupper af én Sylow-p-undergruppe P. Den fås ved at konstruere en kovægtning på $\mathcal{F}_P(G)$.

Sætning 25. *Lad P være en Sylow-p-undergruppe af G. En kovægtning λ_P på $\mathcal{F}_P(G)$ er da givet ved $\lambda_P(H) = 0$ hvis H ikke er elementarabelsk og*

$$\lambda_P(H) = \frac{-\mu(H)}{\zeta(H,P)} = \frac{(-1)^{r(H)+1}p^{r(H)(r(H)-1)/2}}{\zeta(H,P)}$$

ellers.

Bevis. Vi ved fra tidligere overvejelser at λ_P er en kovægtning på $\mathcal{F}_P(G)$ hvis og kun hvis der gælder $\sum_{K\cong H, K\subseteq P} \lambda_P(K) = \bar{\lambda}(H)$ for alle $H \in \mathcal{F}_P(G)$. Definer derfor $\lambda_P(H) = \frac{1}{n_P(H)}\bar{\lambda}(H)$, hvor $n_P(H)$ er antallet af objekter i $\mathcal{F}_P(G)$ der er isomorfe med H. Da er λ_P en kovægtning på $\mathcal{F}_P(G)$, og tilbage er kun at vise at den har de angivne værdier. Per Lemma 14 haves nu

$$n_P(H)\zeta(H,H) = \sum_{\substack{K\cong H\\ K\subseteq P}} \zeta(H,H) = \sum_{\substack{K\cong H\\ K\subseteq P}} \zeta(H,K) = \zeta(H,P)$$

Ved brug af Sætning 18 fås så

$$\lambda_P(H) = \frac{-\mu(H)}{n_P(H)\zeta(H,H)} = \frac{-\mu(H)}{\zeta(H,P)}$$

Ved at indsætte de kendte værdier for μ fås det ønskede. □

Idet der gælder $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \chi(\mathcal{F}_P(G)) = \sum_{H\subseteq P} \lambda_P(H)$ fås så:

Sætning 26. *Lad P være en Sylow-p-undergruppe af G. Da gælder*

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \sum_{H\in\mathcal{A}_p(P)} \frac{-\mu(H)}{\zeta(H,P)} = \sum_{H\in\mathcal{A}_p(P)} \frac{(-1)^{r(H)+1}p^{r(H)(r(H)-1)/2}}{\zeta(H,P)}$$

En produktformel for $\chi(\mathcal{F}_p(G))$

Vi har allerede set at Euler-karakteristikken for fusionskategorier ikke er multiplikativ (Eksempel 3). Men der er faktisk en sammenhæng mellem $\chi(\mathcal{F}_p(G))$, $\chi(\mathcal{F}_p(G'))$ og $\chi(\mathcal{F}_p(G\times G'))$; det viser sig nemlig at størrelsen $1-\chi(\mathcal{F}_p(G))$ er multiplikativ. Beviset for dette tager udgangspunkt i følgende omskrivning af den første ligning i Sætning 24:

Lemma 27. *For enhver gruppe G og ethvert primtal p gælder*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(G)} \mu(H)|C_G(H)| = 1-\chi(\mathcal{F}_p(G))$$

Bevis. Dette er en simpel konsekvens af Sætning 24 samt ligningen $C_G(C_1) = G$:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(G)} \mu(H)|C_G(H)| = \frac{1}{|G|}\mu(C_1)|C_G(C_1)| + \sum_{H\in\mathcal{A}_p(G)} \frac{\mu(H)}{[G:C_G(H)]} = 1-\chi(F_p(G))$$

□

Ideen i beviset er at opskrive summen i Lemma 27 for $G \times G'$ og omskrive den til et produkt af de tilsvarende summer for G og G'. Dette er vanskeliggjort af at ikke alle undergrupper af $G \times G'$ er produktet af en undergruppe fra G og en fra G'. Det skal derfor undersøges hvordan disse undergrupper opfører sig i forhold til funktionen μ, og hvordan deres centralisatorer kan beskrives.

Først haves et par mere generelle lemmata om lokalt endelige partielt ordnede mængder. Gennem hele dette afsnit vil μ_A være Möbius-funktionen for $\mathcal{I}(A, \mathbb{R})$. På samme måde som tidligere ses at når A har mindste element 0 er $\mu_A(0,0) = \mu_A(0,0)\zeta(0,0) = \delta(0,0) = 1$ og for $a \in A$, $a \neq 0$ er $\sum_{x \leq a} \mu_A(0,x) = \sum_{x \in [0,a]} \mu_A(0,x) = \sum_{x \in [0,a]} \mu_A(0,x)\zeta(x,a) = \delta(0,a) = 0$.

Lemma 28. *Lad A og B være lokalt endelige partielt ordnede mængder der begge har et mindste element* 0*, og lad der være givet ordensbevarende afbildninger $\sigma : A \to B$ og $\rho : B \to A$ som opfylder $\sigma(0) = 0$, $\rho(0) = 0$, $\sigma(\rho(b)) = b$ for alle $b \in B$ og $\rho(\sigma(a)) \geq a$ for alle $a \in A$. Da er*

$$\sum_{x \in \sigma^{-1}(b)} \mu_A(0,x) = \mu_B(0,b)$$

for alle $b \in B$.

Bevis. Beviset foregår ved induktion over b. I tilfældet $b = 0$ ses at $a \in \sigma^{-1}(0)$ medfører $a \leq \rho(\sigma(a)) = \rho(0) = 0$, og så må $a = 0$. Dermed er $\sigma^{-1}(0) = \{0\}$, og der gælder

$$\sum_{x \in \sigma^{-1}(0)} \mu_A(0,x) = \mu_A(0,0) = 1 = \mu_B(0,0)$$

For større b bemærkes først at da $\sigma(\rho(b)) = b$, er $\rho(b) \neq 0$. Lad nu a være et vilkårligt element i $[0, \rho(b)]$. Da er $a \leq \rho(b)$ og dermed $\sigma(a) \leq \sigma(\rho(b)) = b$, så $\sigma(a) \in [0, b]$. Da oplagt $a \in \sigma^{-1}(\sigma(a))$ betyder dette at mængderne $\sigma^{-1}(y)$, $y \in [0, b]$, dækker hele intervallet $[0, \rho(b)]$.

Lad omvendt y være et vilkårligt element i $[0, b]$, og lad a være et vilkårligt element i $\sigma^{-1}(y)$. Da er $a \leq \rho(\sigma(a)) = \rho(y) \leq \rho(b)$ hvor den sidste ulighed gælder da $y \leq b$. Dermed er $a \in [0, \rho(b)]$. Altså er mængderne $\sigma^{-1}(y)$, $y \in [0, b]$, alle indeholdt i intervallet $[0, \rho(b)]$. Dermed kan $[0, \rho(b)]$ skrives som en disjunkt forening af mængderne $\sigma^{-1}(y)$, $y \in [0, b]$. Altså haves

$$\sum_{y \in [0,b]} \sum_{x \in \sigma^{-1}(y)} \mu_A(0,x) = \sum_{x \in [0,\rho(b)]} \mu_A(0,x) = 0$$

Ligeledes haves

$$\sum_{y \in [0,b]} \mu_B(0,y) = 0$$

Disse to ligninger trækkes fra hinanden:

$$\sum_{y \in [0,b]} \left(\sum_{x \in \sigma^{-1}(y)} \mu_A(0,x) - \mu_B(0,y) \right) = 0$$

Induktionsantagelsen siger nu at for $y < b$ er $\sum_{x \in \sigma^{-1}(y)} \mu_A(0,x) - \mu_B(0,y) = 0$. Dette indsættes, og tilbage står

$$\sum_{x \in \sigma^{-1}(b)} \mu_A(0,x) - \mu_B(0,b) = 0$$

præcis som ønsket. □

Lemma 29. *Lad A og B være lokalt endelige partielt ordnede mængder der begge har et mindste element 0, og lad $A \times B$ være deres direkte produkt. For ethvert $a \in A$ og $b \in B$ gælder så*

$$\mu_{A\times B}((0,0),(a,b)) = \mu_A(0,a)\mu_B(0,b)$$

Bevis. Beviset foregår ved induktion over (a,b). For $(a,b) = (0,0)$ haves

$$\mu_{A\times B}((0,0),(0,0)) = 1 = 1 \cdot 1 = \mu_A(0,0)\mu_B(0,0)$$

For større (a,b) haves

$$\sum_{(x,y)\leq(a,b)} \mu_{A\times B}((0,0),(x,y)) = 0$$

og

$$\sum_{(x,y)\leq(a,b)} \mu_A(0,x)\mu_B(0,y) = \sum_{x\leq a}\sum_{y\leq b} \mu_A(0,x)\mu_B(0,y) = \left(\sum_{x\leq a}\mu_A(0,x)\right)\left(\sum_{y\leq b}\mu_B(0,y)\right) = 0$$

hvor den sidste lighed gælder da mindst en af faktorerne er 0. Disse to ligninger trækkes fra hinanden, og så haves

$$\sum_{(x,y)\leq(a,b)} (\mu_{A\times B}((0,0),(x,y)) - \mu_A(0,x)\mu_B(0,y)) = 0$$

Induktionsantagelsen giver $\mu_{A\times B}((0,0),(x,y)) - \mu_A(0,x)\mu_B(0,y) = 0$ for $(x,y) < (a,b)$. Dette indsættes, og så fås

$$\mu_{A\times B}((0,0),(a,b)) - \mu_A(0,a)\mu_B(0,b) = 0$$

præcis som ønsket. □

Lad nu G og G' være vilkårlige grupper. Deres direkte produkt $G \times G'$ har to projektioner $\pi_1 : G \times G' \to G$ og $\pi_2 : G \times G' \to G'$. Med disse to afbildninger defineres en afbildning på undergrupper $\pi : \mathcal{SG}(G \times G') \to \mathcal{SG}(G) \times \mathcal{SG}(G')$ ved $\pi(H) = (\pi_1(H), \pi_2(H))$. ($\mathcal{SG}(G)$ er som før den partielt ordnede mængde af alle undergrupper af G.) Denne afbildning er tydeligvis ordensbevarende. Der findes også en ordensbevarende afbildning den anden vej: definer $\iota : \mathcal{SG}(G) \times \mathcal{SG}(G') \to \mathcal{SG}(G \times G')$ ved $\iota((K,L)) = K \times L$. Disse to afbildninger opfylder $\pi(C_1) = (C_1, C_1)$, $\iota((C_1,C_1)) = C_1 \times C_1 = C_1$, $\pi(\iota((K,L))) = \pi(K \times L) = (K,L)$ og $\iota(\pi(H)) = \iota((\pi_1(H), \pi_2(H))) = \pi_1(H) \times \pi_2(H) \supseteq H$. De opfylder dermed betingelserne i Lemma 28, så med brug af dette lemma og Lemma 29 får vi

$$\sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))} \mu_{G\times G'}(C_1,H) = \mu_{\mathcal{SG}(G)\times\mathcal{SG}(G')}((C_1,C_1),(K,L)) = \mu_G(C_1,K)\mu_{G'}(C_1,L)$$

hvor vi som tidligere skriver μ_G i stedet for $\mu_{\mathcal{SG}(G)}$. Ved at bruge Lemma 17 og den tidligere fastlagte notation $\mu(H) = \mu_H(C_1,H)$ får vi så:

Lemma 30. *Lad $\pi : \mathcal{SG}(G \times G') \to \mathcal{SG}(G) \times \mathcal{SG}(G')$ være afbildningen induceret af projektionerne $\pi_1 : G \times G' \to G$ og $\pi_2 : G \times G' \to G'$. For ethvert par af undergrupper $K \subseteq G$ og $L \subseteq G'$ gælder så*

$$\sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))} \mu(H) = \mu(K)\mu(L)$$

Lad nu H være en elementarabelsk p-undergruppe af $G \times G'$. Da er $\pi_1(H)$ og $\pi_2(H)$ også elementarbelske p-grupper, da de er faktorgrupper af H. Omvendt gælder at hvis $\pi_1(H)$ og $\pi_2(H)$ er elementarabelske p-grupper, er $\pi_1(H) \times \pi_2(H)$ også elementarabelsk. Da $H \subseteq \pi_1(H) \times \pi_2(H)$ betyder dette at H også er en elementarabelsk p-gruppe. Ved at opfatte $\mathcal{A}_p^0(G)$, $\mathcal{A}_p^0(G')$ og $\mathcal{A}_p^0(G \times G')$ som delmængder af $\mathcal{SG}(G)$, $\mathcal{SG}(G')$ og $\mathcal{SG}(G \times G')$ kan dette resultat skrives som:

Lemma 31. *Lad G og G' være vilkårlige grupper, og lad $\pi : \mathcal{SG}(G \times G') \to \mathcal{SG}(G) \times \mathcal{SG}(G')$ være som før. Da er*

$$\mathcal{A}_p^0(G \times G') = \pi^{-1}(\mathcal{A}_p^0(G) \times \mathcal{A}_p^0(G'))$$

Tilbage er nu at undersøge centralisatorerne for undergrupperne af $G \times G'$. Her gælder følgende:

Lemma 32. *Lad H være en vilkårlig undergruppe af $G \times G'$, og lad $\pi_1 : G \times G' \to G$ og $\pi_2 : G \times G' \to G'$ være projektionerne. Da gælder*

$$C_{G \times G'}(H) = C_G(\pi_1(H)) \times C_{G'}(\pi_2(H))$$

Bevis. Idet $H \subseteq \pi_1(H) \times \pi_2(H)$, må $C_{G \times G'}(\pi_1(H) \times \pi_2(H)) \subseteq C_{G \times G'}(H)$, og det er oplagt at $C_{G \times G'}(\pi_1(H) \times \pi_2(H)) = C_G(\pi_1(H)) \times C_{G'}(\pi_2(H))$. Dermed er $C_G(\pi_1(H)) \times C_{G'}(\pi_2(H)) \subseteq C_{G \times G'}(H)$.

Lad nu (g, g') være et vilkårligt element i $C_{G \times G'}(H)$. Da gælder $(g, g')(h, h') = (h, h')(g, g')$ for ethvert $(h, h') \in H$. Dette er det samme som at der gælder $gh = hg$ og $g'h' = h'g'$ for ethvert $(h, h') \in H$. Men dette betyder umiddelbart at der gælder $gh = hg$ for ethvert $h \in \pi_1(H)$, og så må $g \in C_G(\pi_1(H))$. Tilsvarende er $g' \in C_{G'}(\pi_2(H))$, og så må $(g, g') \in C_G(\pi_1(H)) \times C_{G'}(\pi_2(H))$. Dermed er $C_{G \times G'}(H) \subseteq C_G(\pi_1(H)) \times C_{G'}(\pi_2(H))$, og ved at kombinere dette med den forrige inklusion fås det ønskede. □

Det er nu muligt at bevise produktformlen.

Sætning 33. *Lad G og G' være vilkårlige grupper og lad p være et vilkårligt primtal. Da er*

$$\chi(\mathcal{F}_p(G \times G')) = \chi(\mathcal{F}_p(G)) + \chi(\mathcal{F}_p(G')) - \chi(\mathcal{F}_p(G))\chi(\mathcal{F}_p(G'))$$

eller, ækvivalent,

$$(1 - \chi(\mathcal{F}_p(G \times G'))) = (1 - \chi(\mathcal{F}_p(G)))(1 - \chi(\mathcal{F}_p(G')))$$

Bevis. Det er en simpel udregning at vise at de to formler er ækvivalente. Jeg viser den anden variant, med udgangspunkt i Lemma 27. Vi har

$$1 - \chi(\mathcal{F}_p(G \times G')) = \frac{1}{|G \times G'|} \sum_{H \in \mathcal{A}_p^0(G \times G')} \mu(H) |C_{G \times G'}(H)|$$

Med Lemma 31 kan summationsindekset omskrives og opdeles:

$$\begin{aligned}
1-\chi(\mathcal{F}_p(G\times G')) &= \frac{1}{|G\times G'|}\sum_{H\in\mathcal{A}_p^0(G\times G')}\mu(H)|C_{G\times G'}(H)| \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{H\in\pi^{-1}(\mathcal{A}_p^0(G)\times\mathcal{A}_p^0(G'))}\mu(H)|C_{G\times G'}(H)| \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{(K,L)\in\mathcal{A}_p^0(G)\times\mathcal{A}_p^0(G')}\ \sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))}\mu(H)|C_{G\times G'}(H)| \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{K\in\mathcal{A}_p^0(G)}\ \sum_{L\in\mathcal{A}_p^0(G')}\ \sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))}\mu(H)|C_{G\times G'}(H)|
\end{aligned}$$

Lemma 32 giver nu at når $H\in\pi^{-1}((K,L))$, er $C_{G\times G'}(H)=C_G(K)\times C_{G'}(L)$:

$$\begin{aligned}
1-\chi(\mathcal{F}_p(G\times G')) &= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{K\in\mathcal{A}_p^0(G)}\ \sum_{L\in\mathcal{A}_p^0(G')}\ \sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))}\mu(H)|C_{G\times G'}(H)| \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{K\in\mathcal{A}_p^0(G)}\ \sum_{L\in\mathcal{A}_p^0(G')}\ \sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))}\mu(H)|C_G(K)\times C_{G'}(L)| \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{K\in\mathcal{A}_p^0(G)}\ \sum_{L\in\mathcal{A}_p^0(G')}\left(\sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))}\mu(H)\right)|C_G(K)|\cdot|C_{G'}(L)|
\end{aligned}$$

Nu anvendes Lemma 30 og summen faktoriseres:

$$\begin{aligned}
1-\chi(\mathcal{F}_p(G\times G')) &= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{K\in\mathcal{A}_p^0(G)}\ \sum_{L\in\mathcal{A}_p^0(G')}\left(\sum_{H\in\pi^{-1}((K,L))}\mu(H)\right)|C_G(K)|\cdot|C_{G'}(L)| \\
&= \frac{1}{|G|\cdot|G'|}\sum_{K\in\mathcal{A}_p^0(G)}\ \sum_{L\in\mathcal{A}_p^0(G')}\mu(K)\mu(L)\cdot|C_G(K)|\cdot|C_{G'}(L)| \\
&= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{K\in\mathcal{A}_p^0(G)}\mu(K)|C_G(K)|\right)\left(\frac{1}{|G'|}\sum_{L\in\mathcal{A}_p^0(G')}\mu(L)|C_{G'}(L)|\right) \\
&= (1-\chi(\mathcal{F}_p(G)))(1-\chi(\mathcal{F}_p(G')))
\end{aligned}$$

Den sidste omskrivning følger her af yderligere to anvendelser af Lemma 27. □

Jeg har her formuleret Lemma 27 som en sum over $\mathcal{A}_p^0(G)$. Idet der gælder $\mu(H)=0$ når H er en p-gruppe der ikke er elementarabelsk, kan ligningen også skrives som en sum over alle p-undergrupper af G. Dette er en smule mere naturligt, da man så summerer over alle objekter i $\mathcal{F}_p(G)$ plus den trivielle gruppe. Denne form af lemmaet følger faktisk direkte af Sætning 18, uden at det er nødvendigt at beregne andre værdier af μ end $\mu(C_1)=1$. Beviset for Sætning 33 kan gennemføres helt analogt med denne form af Lemma 27; den eneste væsentlige ændring er at Lemma 31 skal omformuleres til $\mathcal{SG}_p(G\times G')=\pi^{-1}(\mathcal{SG}_p(G)\times\mathcal{SG}_p(G'))$ hvor $\mathcal{SG}_p(G)$ er mængden af alle p-undergrupper af G. Dette bevises på helt samme måde som den her anvendte form af lemmaet. Sætning 33 kan således bevises uden at beregne andre værdier af μ end $\mu(C_1)$.

Mulige værdier af $\chi(\mathcal{F}_p(G))$

En hurtig omskrivning af den første formel i Sætning 24 giver

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{H \in \mathcal{A}_p(G)} (-1)^{r(H)+1} p^{r(H)(r(H)-1)/2} |C_G(H)|$$

Da alle leddene i summen er heltallige, fås umiddelbart at $|G|\chi(\mathcal{F}_p(G))$ er et heltal. Men der gælder et stærkere udsagn:

Sætning 34. *Lad G være en endelig gruppe med Sylow-p-undergruppe P. Da er $[G : P]\chi(\mathcal{F}_p(G))$ et heltal.*

Bevis. Lad $\mathcal{S}$ være et skelet af $\mathcal{F}_p(G)$. Fra Sætning 24 haves så

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \sum_{H \in \mathrm{ob}\mathcal{S} \cap \mathcal{A}_p(G)} \frac{(-1)^{r(H)+1} p^{r(H)(r(H)-1)/2}}{[N_G(H) : C_G(H)]}$$

Nævnerne i hvert led er divisorer i ordenen af G, da de udtrykker ordenen af en faktorgruppe af en undergruppe af G. Skriv $|G| = mp^k$ med $p \nmid m$; da er $[G : P] = m$. Det er dermed nok at bevise at når brøkerne forkortes, forsvinder alle faktorer p i nævnerne; da vil den reducerede nævner være en divisor i m, og hele summen vil dermed være et multiplum af $\frac{1}{m}$.

Nævnerens værdi, $[N_G(H) : C_G(H)]$, udtrykker ordenen af gruppen $N_G(H)/C_G(H)$. Denne gruppe betegnes også $\mathrm{Aut}_G(H)$; den består af de automorfier af H som fremkommer ved konjugering med et element i G. Den er naturligvis en undergruppe af $\mathrm{Aut}(H)$, gruppen af alle automorfier af H. Dermed er dens orden en divisor i ordenen af $\mathrm{Aut}(H)$. Men når H er elementarabelsk af rang n, er det let at beregne ordenen af $\mathrm{Aut}(H)$. Lad $(a_1, \ldots, a_n)$ være et sæt af frembringere for H. Givet et vilkårligt sæt af elementer $(b_1, \ldots, b_n)$ i H findes der så en unik endomorfi $\varphi : H \to H$ som opfylder $\varphi(a_i) = b_i$. Denne endomorfi er en automorfi netop hvis $(b_1, \ldots, b_n)$ også er et sæt af frembringere for H. Ordenen af $\mathrm{Aut}(H)$ er altså lig antallet af n-tupler af elementer i H der frembringer H. Dette antal blev beregnet i beviset for Lemma 22; det er lig $\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$. Dette omskrives en smule:

$$|\mathrm{Aut}(H)| = \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} p^i\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}(p^{n-i} - 1)\right) = p^{n(n-1)/2}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(p^{n-i} - 1)\right)$$

Her går p ikke op i den højre faktor, så den potens af p der indgår i ordenen af $\mathrm{Aut}(H)$ er netop $p^{n(n-1)/2}$. Ordenen af $\mathrm{Aut}_G(H)$ er nu en divisor i dette, så den potens af p der indgår i $[N_G(H) : C_G(H)]$ er højst $p^{n(n-1)/2} = p^{r(H)(r(H)-1)/2}$. Men dette er netop den potens af p der indgår i brøkens tæller. Altså går alle faktorerne p i nævneren ud når brøken forkortes. □

I de tilfælde hvor G har en *normal* Sylow-p-undergruppe P, gælder der en særlig simpel formel for $\chi(\mathcal{F}_p(G))$:

Sætning 35. *Lad G være en endelig gruppe med normal Sylow-p-undergruppe P. Definer mængden $\mathcal{M}$ ved*

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in G \;\middle|\; p \mid |C_G(x)| \right\}$$

Da gælder

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{|\mathcal{M}|}{|G|}$$

Bevis. Begynd med den første formel i Sætning 24:

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{H \in \mathcal{A}_p(G)} -\mu(H)|C_G(H)|$$

For vilkårlige delmængder A og B af G defineres $\iota(A, B)$ ved $\iota(A, B) = 1$ hvis $A \subseteq B$ og $\iota(A, B) = 0$ hvis $A \nsubseteq B$. Da gælder oplagt $|C_G(H)| = \sum_{x \in G} \iota(\{x\}, C_G(H))$. Dette indsættes:

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{H \in \mathcal{A}_p(G)} \sum_{x \in G} -\mu(H)\iota(\{x\}, C_G(H))$$

Men nu gælder $\iota(\{x\}, C_G(H)) = 1$ netop hvis x kommuterer med alle elementer i H, altså netop hvis $H \subseteq C_G(x)$. Dermed er $\iota(\{x\}, C_G(H)) = \iota(H, C_G(x))$. Altså fås:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}_p(G)) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{H \in \mathcal{A}_p(G)} -\mu(H)\iota(H, C_G(x)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{H \in \mathcal{A}_p(C_G(x))} -\mu(H)\end{aligned}$$

Nu anvendes at P er normal i G. Da P er den eneste Sylow-p-undergruppe af G, må alle p-undergrupper af G være indeholdt i P. Dermed gælder $\mathcal{A}_p(C_G(x)) = \mathcal{A}_p(C_G(x) \cap P)$. $C_G(x) \cap P$ er en undergruppe af p-gruppen P, og er dermed selv en p-gruppe. Hvis det er den trivielle gruppe, er $\mathcal{A}_p(C_G(x) \cap P)$ tom, og der gælder $\sum_{H \in \mathcal{A}_p(C_G(x) \cap P)} -\mu(H) = 0$. I modsat fald giver Lemma 20 at $\sum_{H \in \mathcal{A}_p(C_G(x) \cap P)} -\mu(H) = 1$. Desuden ses at hvis $C_G(x) \cap P$ er ikke-triviel, har $C_G(x)$ orden delelig med p, da den har en ikke-triviel p-undergruppe. Omvendt gælder at hvis $C_G(x)$ har orden delelig med p, har den en ikke-triviel Sylow-p-undergruppe. Denne gruppe må også være indeholdt i P, da P er den unikke Sylow-p-undergruppe af G. Dermed er $C_G(x) \cap P$ ikke-triviel. Altså er $C_G(x) \cap P$ ikke-triviel netop hvis $C_G(x)$ har orden delelig med p. Kombineret med det ovenstående giver dette at $\sum_{H \in \mathcal{A}_p(C_G(x) \cap P)} -\mu(H)$ er lig 1 hvis $C_G(x)$ har orden delelig med p, og det er lig 0 ellers. Dermed haves:

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{H \in \mathcal{A}_p(C_G(x))} -\mu(H) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \iota(\{x\}, \mathcal{M}) = \frac{|\mathcal{M}|}{|G|}$$

□

Specielt haves:

Korollar 36. *Lad G være en gruppe med normal Sylow-p-undergruppe. Da er $0 \leq \chi(\mathcal{F}_p(G)) \leq 1$.*

Eksempel 5. Formlen $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{H \in \mathcal{A}_p(C_G(x))} -\mu(H)$ som indgår i beviset for Sætning 35 gælder for alle grupper G. Den sidste del af beviset anvender at G har normal Sylow-p-undergruppe til at konkludere at størrelsen $\sum_{H \in \mathcal{A}_p(C_G(x))} -\mu(H)$ for ethvert $x \in G$ enten er 0 eller 1. Dette gælder ikke nødvendigvis hvis G ikke har en normal Sylow-p-undergruppe. Betragt for eksempel gruppen D_n. $\mathcal{A}_2(D_n)$ består af de n grupper $\langle SD^i \rangle$, $0 \leq i < n$, som alle har orden 2. Lad e være det neutrale element i D_n. Da der gælder $C_{D_n}(e) = D_n$ fås så $\sum_{H \in \mathcal{A}_2(C_G(e))} -\mu(H) = n$.

Summen kan også blive negativ. $\mathcal{A}_2(D_n \times D_m)$ består af de n grupper $\langle (SD^i, e) \rangle$ af orden 2, de m grupper $\langle (e, SD^j) \rangle$ af orden 2, de nm grupper $\langle (SD^i, SD^j) \rangle$ af orden 2 og de nm grupper $\langle (SD^i, e), (e, SD^j) \rangle$ af orden 4. Da bliver $\sum_{H \in \mathcal{A}_2(C_G((e,e)))} -\mu(H) = n + m + nm - 2 \cdot nm = n + m - nm = 1 - (n-1)(m-1)$.

I det tilfælde hvor G ikke har en normal undergruppe, findes der en svagere begrænsning på de mulige værdier af $\chi(\mathcal{F}_p(G))$. Denne fremkommer ved at bruge princippet om inklusion og eksklusion til at opdele $\mathcal{A}_p(G)$ i mindre mængder af formen $\mathcal{A}_p(P)$, hvor P er en p-gruppe. Der findes flere varianter af princippet om inklusion og eksklusion; den her anvendte udgave har den fordel at den er let at bevise.

Lemma 37 (Princippet om inklusion og eksklusion)**.** *Lad f være en Lebesgue-integrabel funktion på et målrum X med mål μ, lad $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ være målelige delmængder af X, og sæt $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i$. Lad $V_n = \{1, \dots, n\}$, og definer for enhver ikke-tom delmængde α af V_n $\mathcal{M}_\alpha = \bigcap_{i\in\alpha} \mathcal{M}_i$. Da gælder*

$$\int_{\mathcal{M}} f \, d\mu = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)\\ \alpha\neq\emptyset}} (-1)^{|\alpha|+1} \int_{\mathcal{M}_\alpha} f \, d\mu$$

Bevis. Betegn indikatorfunktionen for en målelig mængde A med 1_A, og betragt funktionerne $(1_{\mathcal{M}} - 1_{\mathcal{M}_i})$, $1 \leq i \leq n$. For $x \notin \mathcal{M}$ gælder $(1_{\mathcal{M}} - 1_{\mathcal{M}_i})(x) = 1_{\mathcal{M}}(x) - 1_{\mathcal{M}_i}(x) = 0 - 0 = 0$ for alle i. Hvis $x \in \mathcal{M}$, må der findes et i så $x \in \mathcal{M}_i$, og så gælder $(1_{\mathcal{M}} - 1_{\mathcal{M}_i})(x) = 1 - 1 = 0$. Dermed må $\prod_{i=1}^n (1_{\mathcal{M}} - 1_{\mathcal{M}_i}) = 0$. Ved at gange parenteserne ud og flytte leddet $1_{\mathcal{M}}$ til den anden side af ligningen fås så

$$-1_{\mathcal{M}} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)\\ \alpha\neq\emptyset}} \prod_{i\in\alpha} (-1_{\mathcal{M}_i})$$

hvilket er ækvivalent med

$$1_{\mathcal{M}} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)\\ \alpha\neq\emptyset}} (-1)^{|\alpha|+1} 1_{\mathcal{M}_\alpha}$$

Ved at gange denne ligning med f og integrere fås det ønskede. □

Sætning 38. *Lad G være en gruppe med n forskellige Sylow-p-undergrupper. Da er $1 - 2^{n-1} \leq \chi(\mathcal{F}_p(G)) \leq 2^{n-1}$.*

Bevis. Beviset tager udgangspunkt i formlen

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} \sum_{H\in\mathcal{A}_p(G)} -\mu(H)\iota(H, C_G(x))$$

som fremkom i beviset for Sætning 36. Ideen er at omskrive den indre sum ved brug af princippet om inklusion og eksklusion. Dette er muligt da en endelig sum er et specialtilfælde af Lebesgue-integralet.

Lad $P_1, \dots, P_n$ være Sylow-p-undergrupperne af G. Eftersom enhver p-undergruppe af G er indeholdt i en Sylow-p-undergruppe, er $\mathcal{A}_p(G) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_p(P_i)$. Lad som vanlig $V_n = \{1, \dots, n\}$ og definer for ethvert $\alpha \in \mathcal{P}(V_n)$ med $\alpha \neq \emptyset$ P_α ved $P_\alpha = \bigcap_{i\in\alpha} P_i$. Da er $\bigcap_{i\in\alpha} \mathcal{A}_p(P_i) = \mathcal{A}_p(\bigcap_{i\in\alpha} P_i) = \mathcal{A}_p(P_\alpha)$. Lemma 37 giver da

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_p(G)} -\mu(H)\iota(H, C_G(x)) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)\\ \alpha\neq\emptyset}} (-1)^{|\alpha|+1} \sum_{H\in\mathcal{A}_p(P_\alpha)} -\mu(H)\iota(H, C_G(x))$$

Dermed haves

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}_p(G)) &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)\\ \alpha\neq\emptyset}}(-1)^{|\alpha|+1}\sum_{H\in\mathcal{A}_p(P_\alpha)}-\mu(H)\iota(H,C_G(x))\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)\\ \alpha\neq\emptyset}}(-1)^{|\alpha|+1}\sum_{H\in\mathcal{A}_p(P_\alpha\cap C_G(x))}-\mu(H)\end{aligned}$$

Nu er $P_\alpha \cap C_G(x)$ en p-gruppe, da den er indeholdt i P_α som er en p-gruppe. Hvis det er den trivielle gruppe, er $\sum_{H\in\mathcal{A}_p(P_\alpha\cap C_G(x))}-\mu(H) = 0$, da der er tale om den tomme sum. I modsat fald giver Lemma 19 at $\sum_{H\in\mathcal{A}_p(P_\alpha\cap C_G(x))}-\mu(H) = 1$. Vi har dermed

$$\chi(\mathcal{F}_p(G)) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{P}(V_n)\\ \alpha\neq\emptyset}}(-1)^{|\alpha|+1}T(P_\alpha\cap C_G(x))$$

hvor vi definerer $T(H) = 0$ hvis H er den trivielle gruppe og $T(H) = 1$ ellers. Summen består nu af $|G|\cdot(2^n-1)$ led hvoraf de $|G|\cdot(2^{n-1})$ kan antage værdien 0 eller 1 og de $|G|\cdot(2^{n-1}-1)$ andre kan antage værdien -1 eller 0. Dermed har summen en værdi mellem $|G|\cdot(1-2^{n-1})$ og $|G|\cdot(2^{n-1})$. Ved at gange faktoren $\frac{1}{|G|}$ på disse to grænser fås så det ønskede. □

Når G har en abelsk Sylow-p-undergruppe P, findes der en stærkere begrænsning. Den fås ved at bruge den generelle teori for fusionssystemer på p-grupper til at konkludere at $\mathcal{F}_P(G)$ er isomorf med $\mathcal{F}_P(G')$ hvor G' er en gruppe der har P som normal Sylow-p-undergruppe. Jeg anvender her den fremstilling af teorien der præsenteres i [BLO]. Forfatterne definerer et fusionssystem $\mathcal{F}$ på en p-gruppe P til at være en kategori der opfylder følgende to krav:

- Objekterne i $\mathcal{F}$ er undergrupperne af P. Afbildningerne i $\mathcal{F}$ er injektive gruppehomomorfier, og enhver homomorfi der er givet ved konjugering med et element i P er faktisk en afbildning i $\mathcal{F}$. Kompositionen af afbildninger er den sædvanelige komposition af gruppehomomorfier.
- Enhver afbildning i $\mathcal{F}$ kan faktoriseres unikt som en isomorfi i $\mathcal{F}$ efterfulgt af en inklusion. (Lemma 3.)

En umiddelbar konsekvens af disse krav er at hvis $\varphi : K \to L$ er en afbildning i $\mathcal{F}$ og H er en undergruppe af K, så er restriktionen af φ til H, $\varphi|_H : H \to \varphi(H)$, også en afbildning i $\mathcal{F}$. Per det første krav findes nemlig $\varphi_1 : H \to K$, og dermed er $\varphi \circ \varphi_1 : H \to L$ en afbildning i $\mathcal{F}$. Det andet krav giver så at denne afbildning kan faktoriseres som isomorfien $\varphi' : H \to H'$ efterfulgt af inklusionen $\varphi_1 : H' \to L$. Endelig ses at for ethvert $x \in H$ er $\varphi'(x) = \varphi_1(\varphi'(x)) = (\varphi_1 \circ \varphi')(x) = (\varphi \circ \varphi_1)(x) = \varphi(x)$, og dermed er $\varphi' = \varphi|_H$ og $H' = \varphi(H)$.

Det er klart når G er en gruppe med Sylow-p-undergruppe P, vil $\mathcal{F}_P(G)$ opfylde de to ovenstående krav og dermed være et fusionssystem på P. Men det viser sig at man kan opstille to yderligere betingelser der altid er opfyldt af $\mathcal{F}_P(G)$. [BLO] kalder systemer der opfylder disse to betingelser for *mættede* fusionssystemer (engelsk: “saturated”). En undergruppe H af P siges at være *fuldt centraliseret* (engelsk: “fully centralized”) hvis der gælder $|C_P(H)| \geq |C_P(K)|$ for alle K med $H \cong K$ i $\mathcal{F}$. Tilsvarende siges H at være fuldt normaliseret (engelsk: “fully normalized”) hvis der gælder $|N_P(H)| \geq |N_P(K)|$ for alle K med $H \cong K$. $\mathcal{F}$ siges da at være mættet hvis følgende to krav er opfyldt:

- Enhver undergruppe H af P der er fuldt normaliseret er også fuldt centraliseret, og $\mathrm{Aut}_P(H)$ er en Sylow-p-undergruppe af $\mathcal{F}(H,H)$.
- Lad $\varphi : H \to P$ være en afbildning som opfylder at $\varphi(H)$ er fuldt centraliseret, og definer

$$N_\varphi = \{x \in N_P(H) \mid \varphi \circ \varphi_x \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_P(\varphi(H))\}$$

  Da findes en afbildning $\varphi' : N_\varphi \to P$ i $\mathcal{F}$ som opfylder at $\varphi'|_H = \varphi$.

$\mathcal{F}_P(G)$ er altså altid et mættet fusionssystem på P.

Når P er en abelsk gruppe, kan de to sidste betingelser forenkles ganske meget. I dette tilfælde gælder nemlig $C_P(H) = N_P(H) = P$ for alle undergrupper P af H, så alle undergrupper er fuldt centraliserede og fuldt normaliserede. Desuden er $\varphi_x : P \to P$ identitetsafbildningen for alle $x \in P$, så for enhver afbildning $\varphi : H \to P$ i $\mathcal{F}$ vil $\varphi \circ \varphi_x \circ \varphi^{-1} : \varphi(H) \to \varphi(H)$ være identitetsafbildningen på $\varphi(H)$ for alle $x \in P$. Dermed er $N_\varphi = P$. Den anden betingelse reduceres dermed til at for enhver afbildning $\varphi : H \to P$ findes $\varphi' : P \to P$ så $\varphi'|_H = \varphi$. Dermed er de eneste mulige afbildninger i $\mathcal{F}$ dem der er restriktioner af afbildninger i $\mathcal{F}(P,P)$. Da vi allerede har set at alle de mulige restriktioner af disse afbildninger skal være afbildninger i $\mathcal{F}$, betyder dette at $\mathcal{F}$ er bestemt fuldstændigt ved $\mathcal{F}(P,P)$.

Den første betingelse kan også forenkles. $\mathrm{Aut}_P(H)$ er nemlig den trivielle gruppe for alle H, så betingelsen siger blot at $\mathcal{F}(H,H)$ skal have orden ikke delelig med P. Specielt skal $\mathcal{F}(P,P)$ være en undergruppe af $\mathrm{Aut}(P)$ med orden ikke delelig med p.

Lad omvendt L være en undergruppe af $\mathrm{Aut}(P)$ med orden ikke delelig med p. Da findes der faktisk et mættet fusionssystem $\mathcal{F}$ på P som opfylder $\mathcal{F}(P,P) = L$. Lad nemlig $\iota : L \to \mathrm{Aut}(P)$ være inklusionen, og betragt gruppen $P \rtimes_\iota L$. Da L har orden ikke delelig med p, har denne gruppe P som Sylow-p-undergruppe. Dermed er $\mathcal{F}_P(P \rtimes_\iota L)$ et mættet fusionssystem på P, og det ses let at der gælder $\mathcal{F}_P(P \rtimes_\iota L)(P,P) = L$. Altså er der en én-til-én korrespondance mellem mættede fusionssystemer på P og undergrupper af $\mathrm{Aut}(P)$ med orden ikke delelig med p, givet ved afbildningerne $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(P,P)$ og $L \mapsto \mathcal{F}_P(P \rtimes_\iota L)$.

Per konstruktion er P en normal undergruppe af $P \rtimes_\iota L$, så per Korollar 36 er $0 \leq \chi(\mathcal{F}_P(P \rtimes_\iota L)) \leq 1$. Men da ethvert mættet fusionssystem på P har formen $\mathcal{F}_P(P \rtimes_\iota L)$ for et passende L, betyder dette at der gælder $0 \leq \chi(\mathcal{F}) \leq 1$ for alle mættede fusionssystemer $\mathcal{F}$ på P. Lad nu G være en gruppe med P som Sylow-p-undergruppe. Da er $\mathcal{F}_P(G)$ et mættet fusionssystem på P, så der gælder $0 \leq \chi(\mathcal{F}_P(G)) \leq 1$. Og idet $\chi(\mathcal{F}_P(G)) = \chi(\mathcal{F}_p(G))$ fås så:

Sætning 39. *Lad G være en gruppe med abelsk Sylow-p-undergruppe. Da er* $0 \leq \chi(\mathcal{F}_p(G)) \leq 1$.

Når P er en abelsk p-gruppe der ikke er elementarabelsk, kan der foretages en yderligere forenkling. P har en unik maksimal elementarabelsk undergruppe E, nemlig gruppen bestående af alle elementer af orden p samt det neutrale element. De elementarabelske undergrupper af P er så netop undergrupperne af E. Lad nu $\mathcal{F}$ være et mættet fusionssystem på P. Da kan vi betragte delkategorien af $\mathcal{F}$ bestående af alle undergrupper af E samt alle afbildninger mellem disse; kald denne kategori $\mathcal{F}'$. $\mathcal{F}'$ er da et fusionssystem på E, da de påkrævede egenskaber nedarves direkte fra $\mathcal{F}$. (Dette gælder mere generelt: hvis $\mathcal{F}$ er et fusionssystem på P og H er en undergruppe af P, så er delkategorien af $\mathcal{F}$ bestående af alle undergrupper af H og alle afbildninger mellem dem et fusionssystem på H.)

$\mathcal{F}'$ er faktisk et *mættet* fusionssystem. Den første betingelse, at $\mathcal{F}'(H,H)$ skal have orden ikke delelig med p for alle $H \subseteq E$, følger af at der gælder $\mathcal{F}'(H,H) = \mathcal{F}(H,H)$ og $\mathcal{F}$ er et mættet fusionssystem. Den anden betingelse kræver kun en smule mere arbejde. Lad $H \subseteq E$ og lad $\varphi : H \to E$ være en afbildning i $\mathcal{F}'$; vi skal da vise at φ kan udvides til en afbildning fra E til E. Betragt φ som afbildning i $\mathcal{F}$. Ved at sammensætte med inklusionen $\varphi_1 : E \to P$ kan vi betragte φ som en afbildning fra H til P. Da $\mathcal{F}$ er et mættet fusionssystem findes der så $\varphi' : P \to P$ således at $\varphi'|_H = \varphi$. Da φ' er injektiv, er $\varphi'(E)$ en elementarabelsk p-gruppe med samme orden som E, og da E er den unikke maksimale elementarabelske undergruppe af P, betyder dette at $\varphi'(E) = E$. Eftersom en restriktion af en afbildning i et fusionssystem også er en afbildning i systemet indeholder $\mathcal{F}$ så $\varphi' : E \to E$. Dette er også en afbildning i $\mathcal{F}'$, og der gælder $\varphi'|_H = \varphi$.

Nu gælder for enhver undergruppe H af E at $\zeta_{\mathcal{F}}(H, P) = \zeta_{\mathcal{F}'}(H, E)$. Per Lemma 3 er der nemlig en én-til-én korrespondance mellem afbildninger i $\mathcal{F}(H, P)$ og isomorfier i $\mathcal{F}$ med H som domæne. Lad $\varphi : H \to \varphi(H)$ være en sådan isomorfi; da er $\varphi(H)$ isomorf med H, og altså også elementarabelsk. Så er $\varphi(H) \in E$, og dermed er $\varphi : H \to \varphi(H)$ også en isomorfi i $\mathcal{F}'$. Omvendt kommer enhver afbildning i $\mathcal{F}'$ fra en afbildning i $\mathcal{F}$, så $\mathcal{F}'$ indeholder præcist lige så mange isomorfier med H som domæne som $\mathcal{F}$ gør. Da der er en én-til-én korrespondance mellem isomorfier i $\mathcal{F}'$ med H som domæne og afbildninger i $\mathcal{F}'(H, E)$, betyder dette at $\mathcal{F}(H, P)$ og $\mathcal{F}'(H, E)$ er lige store. Dette er netop hvad ligningen $\zeta_{\mathcal{F}}(H, P) = \zeta_{\mathcal{F}'}(H, E)$ udtrykker.

Da alle elementarabelske undergrupper af P er indeholdt i E, er $\mathcal{A}_p(P) = \mathcal{A}_p(E)$. Med Sætning 26 fås så

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{H \in \mathcal{A}_p(P)} \frac{-\mu(H)}{\zeta_{\mathcal{F}}(H, P)} = \sum_{H \in \mathcal{A}_p(E)} \frac{-\mu(H)}{\zeta_{\mathcal{F}'}(H, E)} = \chi(\mathcal{F}')$$

Dermed gælder:

Sætning 40. *Lad G være en gruppe med abelsk Sylow-p-undergruppe P, og lad E være den maksimale elementarabelske undergruppe af P. Da findes der et mættet fusionssystem $\mathcal{F}$ på E som opfylder $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}_p(G))$.*

For at finde de mulige værdier af $\chi(\mathcal{F}_p(G))$ når G er en gruppe med abelsk Sylow-p-undergruppe, er det altså tilstrækkeligt at se på mættede fusionssystemer på grupperne C_p^n, $n \in \mathbb{N}$. Mere præcist gælder at enhver abelsk p-gruppe har en præsentation af formen $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_i^{p^{k_i}} = 1, a_i a_j = a_j a_i \rangle$ for et vist $n \in \mathbb{N}$ og visse $k_i \in \mathbb{N}$. En sådan gruppe kan kort siges at være en abelsk p-gruppe på netop n frembringere. Denne gruppes maksimale elementarabelske undergruppe er da af isomorfiklassen C_p^n.

Eksempel 6. Når P er en lille abelsk gruppe er det relativt simpelt at opskrive alle mættede fusionssystemer på P, takket være korrespondancen mellem undergrupper af $\mathrm{Aut}(P)$ og mættede fusionssystemer på P. Her præsenteres alle mættede fusionssystemer på C_2^2 og C_2^3.

$\mathrm{Aut}(C_2^2)$ er isomorf med S_3, så den har to undergrupper af ulige orden. Altså findes der to mættede fusionssystemer på C_2^2. Den trivielle undergruppe af $\mathrm{Aut}(C_2^2)$ giver anledning til det minimale fusionssystem på C_2^2, $\mathcal{F}_2(C_2^2)$ som har Euler-karakteristik 1 per Korollar 9. Kategoriens objekter er C_2^2 og dens tre undergrupper af orden 2, og den har ikke andre afbildninger end inklusionerne.

Undergruppen af orden 3 af $\mathrm{Aut}(C_2^2)$ er frembragt af et element som virker på C_2^2 ved at permutere de tre ikke-trivielle elementer cyklisk. I dette tilfælde bliver de tre undergrupper af orden 2 altså isomorfe i kategorien. Kategoriens tilstødelsesmatrix bliver:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En mulig vægtning er $[0,0,0,\frac{1}{3}]^T$, så kategoriens Euler-karakteristik er $\frac{1}{3}$. Dermed gælder at hvis G har en abelsk Sylow-2-undergruppe på netop 2 frembringere, er $\chi(\mathcal{F}_2(G))$ enten 1 eller $\frac{1}{3}$.

For C_2^3 observeres først at hvis P er en abelsk gruppe og K og L er undergrupper af $\mathrm{Aut}(P)$ der opfylder $L = \sigma K \sigma^{-1}$ for et vist $\sigma \in \mathrm{Aut}(P)$, så er $\mathcal{F}_P(P \rtimes_\iota K)$ isomorf med $\mathcal{F}_P(P \rtimes_\iota L)$. Isomorfien er givet på objekter ved $H \mapsto \sigma(H)$ og på afbildninger ved $(\varphi : H \to H') \mapsto (\sigma\varphi\sigma^{-1} : \sigma(H) \to \sigma(H'))$. Det er dermed nok at se på konjugeringsklasser af undergrupper af $\mathrm{Aut}(P)$.

Beskriv C_2^3 ved præsentationen $\langle a,b,c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, ab = ba, bc = cb, ca = ac\rangle$; da indeholder gruppen syv undergrupper af orden 2, nemlig $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, $\langle c\rangle$, $\langle ab\rangle$, $\langle bc\rangle$, $\langle ca\rangle$ og $\langle abc\rangle$, og syv undergrupper af orden 4, nemlig $\langle a,b\rangle$, $\langle b,c\rangle$, $\langle c,a\rangle$, $\langle a,bc\rangle$, $\langle b,ca\rangle$, $\langle c,ab\rangle$ og $\langle ab,ac\rangle$. $\mathrm{Aut}(C_2^3)$ kan opfattes som en permutationsgruppe på de syv ikke-trivielle elementer.

$\mathrm{Aut}(C_2^3)$ har orden $2^3 \cdot 3 \cdot 7$, så dens undergrupper af ulige orden må have orden 1, 3, 7 eller 21. Dens trivielle undergruppe giver som før anledning til det minimale fusionssystem $\mathcal{F}_2(C_2^3)$ som har Euler-karakteristik 1.

Der findes en undergruppe af orden 3, frembragt af permutationen $(a,b,c)(ab,bc,ca)(abc)$. Alle andre undergrupper af orden 3 er indbyrdes konjugerede med denne gruppe. I fusionssystemet hørende til denne gruppe er $\langle a\rangle \cong \langle b\rangle \cong \langle c\rangle$, $\langle ab\rangle \cong \langle bc\rangle \cong \langle ca\rangle$, $\langle a,b\rangle \cong \langle b,c\rangle \cong \langle c,a\rangle$ og $\langle a,bc\rangle \cong \langle b,ca\rangle \cong \langle c,ab\rangle$. Et muligt skelet af denne kategori er således delkategorien med objekterne $\langle a\rangle$, $\langle ab\rangle$, $\langle abc\rangle$, $\langle a,b\rangle$, $\langle a,bc\rangle$, $\langle ab,ac\rangle$ og C_2^3. Med denne rækkefølge bliver tilstødelsesmatricen for skelettet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Den unikke vægtning er $[0,0,\frac{2}{3},0,0,0,\frac{1}{3}]^T$, så kategoriens Euler-karakteristik bliver $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Der findes en undergruppe af orden 7, frembragt af permutationen (a,b,ca,c,bc,ab,abc). Alle andre undergrupper af orden 7 er indbyrdes konjugerede med denne gruppe. I fusionssystemet hørende til denne gruppe er alle undergrupper af C_2^3 af orden 2 isomorfe, og alle undergrupper af orden 4 er isomorfe. Et muligt skelet af denne kategori er dermed delkategorien med objekterne $\langle a\rangle$, $\langle a,b\rangle$ og C_2^3. Tilstødelsesmatricen for denne kategori bliver:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Den unikke vægtning er $[0,0,\frac{1}{7}]^T$, så kategoriens Euler-karakteristik bliver $\frac{1}{7}$.

Endelig findes der en undergruppe af orden 21, frembragt af permutationerne $(a,b,c)(ab,bc,ca)(abc)$ og (a,b,ca,c,bc,ab,abc), og alle andre undergrupper af orden 21 er indbyrdes konjugerede med denne gruppe. Som i tilfældet med en undergruppe af orden 7 bliver alle undergrupper af orden 2 hhv. 4 isomorfe, så et muligt skelet er delkategorien med objekterne $\langle a\rangle$, $\langle a,b\rangle$ og C_2^3. Tilstødelsesmatricen er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

Den unikke vægtning er $[\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{21}]^T$, så kategoriens Euler-karakteristik bliver $\frac{2}{3} + \frac{1}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$.

Hermed ses at hvis G har en abelsk Sylow-2-undergruppe på netop 3 frembringere, er $\chi(\mathcal{F}_2(G))$ enten 1, $\frac{1}{7}$ eller $\frac{5}{7}$.

Konklusion

Det er efterhånden tydeligt at Euler-karakteristikken for $\mathcal{F}_p(G)$ faktisk indkoder noget information om p-fusionen i G. I det tilfælde hvor G har en normal Sylow-p-undergruppe, har vi set præcis hvad der er indkodet: Sætning 35 siger at $|G|\chi(\mathcal{F}_p(G))$ netop er antallet af elementer i G der kommuterer med et element af orden p. Et naturligt spørgsmål er om $|G|\chi(\mathcal{F}_p(G))$ også i det generelle tilfælde udtrykker størrelsen af en bestemt delmængde af G. I forlængelse af dette giver Sætning 34 anledning til at spørge om $[G : P]\chi(F_p(G))$ udtrykker størrelsen af en bestemt mængde af sideklasser af P i G.

Idet der gælder $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = 1$ hvis $Z(G)$ indeholder et element af orden p, kan $\chi(\mathcal{F}_p(G))$ ikke umiddelbart skelne mellem forskellige grupper der har et centralt element af orden p. Men eftersom enhver undergruppe af $Z(G)$ er normal i G, kan man systematisk fjerne disse elementer: lad $G_0 = G$ og definer iterativt $G_{n+1} = G_n/Z_p(G_n)$. Da vil følgen $G_0, G_1, G_2, \ldots$ være konstant fra et vist trin; kald den gruppe som følgen stabiliserer sig på for G_∞. Det virker så naturligt at spørge om i hvilken grad $\chi(\mathcal{F}_p(G_\infty))$ skelner mellem forskellige grupper G.

Det er også værd at spørge om produktformlen kan generaliseres. Hvis G er en gruppe med normal undergruppe H, findes der så en sammenhæng mellem $\chi(\mathcal{F}_p(G))$, $\chi(\mathcal{F}_p(H)$ og $\chi(\mathcal{F}_p(G/H))$? Alternativt kan man spørge om der findes et udtryk i disse tre størrelser der indkoder noget information om på hvilken måde G er en udvidelse af G/H ved H.

Det er ikke lykkedes mig at finde bedre begrænsninger af værdien end $\chi(\mathcal{F}_p(G))$ end Sætning 38, men alle de værdier jeg har udregnet har været mellem 0 og 1. Ydermere har jeg kun set 0 optræde som værdi af $\chi(\mathcal{F}_p(G))$ i det tilfælde hvor $p \nmid |G|$. Jeg vil derfor slutte af med denne hypotese:

Hypotese. *For enhver gruppe G og ethvert primtal p gælder $0 \leq \chi(\mathcal{F}_p(G)) \leq 1$, med $\chi(\mathcal{F}_p(G)) = 0$ hvis og kun hvis $p \nmid |G|$.*

Litteratur

[Lei] Tom Leinster: The Euler characteristic of a category. *Documenta Mathematica*, Vol. 13 (2008), 21–49.

[BLO] Carles Broto, Ran Levi, Bob Oliver: The theory of p-local groups: a survey. *Homotopy theory: relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory*, 51–84. Contemporary Mathematics 346, American Mathematical Society, 2004.

[SOD] Eugene Spiegel, Christopher O'Donnell: Incidence Algebras. Marcel Dekker, Inc., 1997.

[Pui] Lluís Puig: Frobenius Categories versus Brauer Blocks: The Grothendieck Group of the Frobenius Category of a Brauer Block. Birkhäuser Verlag AG, 2009.