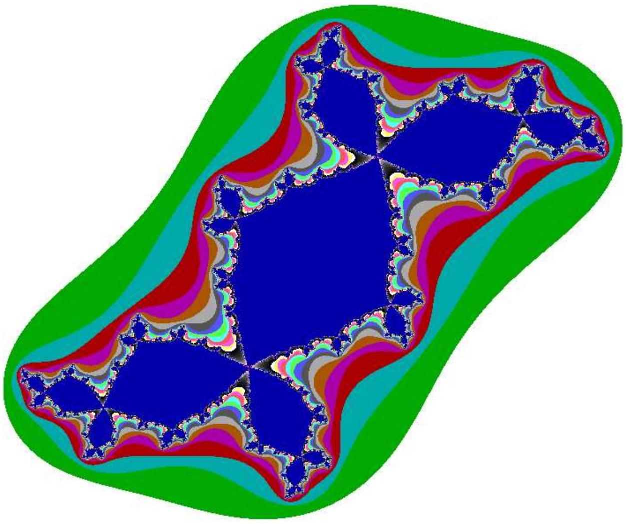
26. november 2001

Kursus om holomorf dynamik - et udviklingsarbejde

Morten Misfeldt



Københavns Universitet
Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling

Forord

Dette speciale afslutter min uddannelse i matematik ved Institut for Matematiske Fag på Københavns Universitet. Specialet udgøres af afholdelsen af kurset "Diskrete dynamiske systemer", der løb fra den 11. til den 15. juni år 2001, samt af nærværende rapport, der beskriver mine overvejelser i forbindelse med planlægningen af kurset og belyser nogle af de spørgsmål, som disse overvejelser gav anledning til.

Jeg vil gerne takke min interne vejleder Jesper Møller (KU) for inspiration til denne opgave og for et godt samarbejde undervejs, min eksterne vejleder Carl Winsløw (DPU) for solid faglig vejledning i didaktiske spørgsmål, Bodil Branner (DTU) for hjælp omkring dynamiske systemer og Mogens Niss (RUC) for at præcisere sine kompetencebegreber overfor mig. Derudover vil jeg takke Sille Jørgensen, Stefan Mabit, Åse Misfeldt, Rene Jensen, Rasmus Møgelberg, Mads Keinicke, Jacob Stubgaard og i særdeleshed Mads Blom for at læse korrektur på dette speciale, Erik Nørgård for TeXnisk assistance samt Mette Hansen og Majbrit Jensen for hjælp med statistisk databehandling. Jeg vil specielt gerne takke Sille og Otto for at støtte mig og for at passe godt på hinanden i tiden op til aflevering af mit speciale. Tilslut vil jeg takke kursusdeltagerne for at levere et stort arbejde i en positiv ånd i løbet af kurset, hvilket gjorde afholdelsen af kurset til en fornøjelse.

Indhold

Indledning

Dette speciale tager udgangspunkt i et ønske om at planlægge, afholde og evaluere et kursus om holomorf dynamik og er således både et speciale om at forstå og formidle holomorf dynamik og et pædagogisk udviklingsarbejde.

Hovedrapporten omhandler det pædagogiske udviklingsarbejde, jeg har gennemført i forbindelse med afholdelsen af kurset "Diskrete dynamiske systemer". Målet med rapporten er at forsøge at fundere kursusudviklingen i et teoretisk begrebsapparat og således både muliggøre en kvalificeret diskussion om de valg, der foretages under kursusudviklingen, og gøre det muligt for mig at stille præcise spørgsmål til kursusudviklingen samt forsøge at besvare sådanne spørgsmål gennem empiriske undersøgelser.

I kapitel 1 introduceres en ramme for kursusudviklingen, der gør det muligt at fundere denne i en læringsteori. Rammen anviser både, hvordan en læringsteori kan anvendes til planlægning af undervisning, til at stille præcise spørgsmål omkring læringen og til at besvare disse spørgsmål med kvalitative metoder. I afsnit 1.1 beskrives denne ramme i detaljer, og i afsnit 1.2 beskrives rapportens opbygning i lyset af denne ramme.

I kapitel 2 udvikles den læringsteori, der udgør det ønskede teoretiske apparat, og i kapitel 3 udvikles en metode til at omsætte teorien i konkret undervisning.

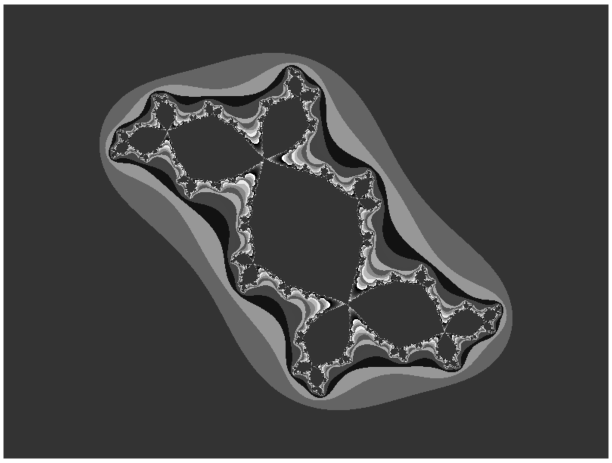
Kapitlerne 4 og 5 omhandler empiriske undersøgelser. Gennem kvalitative interview undersøger jeg i kapitel 4 den forståelse af begrebet normal familie af funktioner, som kurset giver anledning til. Jeg finder, at flere af de interviewede har problemer med at håndtere dette begreb, og at problemerne kan skyldes, at definitionen af begrebet sammenblandes med en tilstrækkelig, men ikke nødvendig, betingelse for normalitet. Ved hjælp af det teoretiske apparat beskriver jeg en fejlkonstruktion, der kan forklare de observerede problemer, og giver anbefalinger for, hvordan undervisningen kan forsøge at eliminere sandsynligheden for at danne denne fejlkonstruktion.

I kapitel 5 udvikler og tester jeg en kvantitativ metode til at undersøge, om der er en sammenhæng imellem den måde, hvorpå en kursist organiserer kursets centrale begreber i to forskellige begrebskort og denne kursists resultat ved en skriftlig prøve i kursets pensum. Derudover undersøges det, om få og systematiske forskelle på to begrebskort kan afsløre ændringer i forståelsen af de begreber, der indgår i kortene. Dette undersøges ved hjælp af kvalitative interview. Jeg har ikke opnået konkluderende resultater på disse undersøgelser, men foreslår hvordan arbejdet, specielt med den kvantitative metode, kan fortsættes.

Jeg har holdt hovedrapporten i generelle termer, således at meget af mit arbejde omkring kursusudviklingen kan anvendes i andre sammenhænge end holomorf dynamik. De overvejelser, der er knyttet direkte til de centrale begreber i holomorf dynamik, forefindes i bilag A. I bilag B forefindes det undervisningsmateriale som var udgangspunkt for kurset. I bilag C forefindes en dagbog over afviklingen af kurset. Bilagene D - K vedrører de empiriske undersøgelser, og består af de opgaver der har været udgangspunkt for mine empiriske undersøgelser, besvarelser af opgaverne om begrebskort, min spørgeguide til de gennemførte interview, interviewudskrifter og en skematisk gennemgang af de gennemførte interview.

Holomorf dynamik

Udgangsproblemet i holomorf dynamik er at studere iterationer af en kompleks funktion. Det viser sig, at så simple funktioner som andengradspolynomier, ved iteration kan give anledning til utrolig flotte og komplicerede billeder. I figur 1 angives "den udfyldte Juliamængde" for polynomiet $P(z) = z^2 - 0.12 + 0.75i$. Figuren er opstået ved at farvelægge punkter i den komplekse plan. Farvevalget i et punkt z_0 bestemmes af det mindste tal naturlige n, hvor $|P^n(z_0)| \geq R$. Hvor R er et positivt reelt tal valgt så stort, at $|P^k(z)|$ med sikkerhed vokser imod uendelig, når k gør det, for alle z med $|z| \geq R$.



Figur 1: Den udfyldte Juliamængde for $P(z) = z^2 - 0.12 + 0.75i$.

Iterationer af rationale funktioner på Riemann-sfæren er studeret grundigt af Pierre Fatou (1878-1929) og Gaston Julia (1893-1978) i starten af 1900 tallet. Disse studier kulminerede i, at de begge skrev lange afhandlinger (Memoires) [27], [35] om emnet omkring år 1918. Ifølge [1] p. 108 var begge disse afhandlinger motiveret af en prisopgave *1918 Grand Prix des Sciences mathématiques*[1]

[1] Opslaget der udgjorde baggrunden for prisopgaven findes i engelsk oversættelse i [1] p. 109.

udskrevet i 1915 af det franske videnskabsakademi. Opgaven omhandlede globale studier af iteration af funktioner og var givetvis inspireret af en ny teori af Paul Montel (1876-1975) om mængder af holomorfe funktioner, specielt såkaldte normale familier af funktioner. Fatou og Julias afhandlinger nåede meget ens resultater, og de gjorde begge brug af teorien om normale familier, specielt en tilstrækkelig betingelse for normalitet vist af Paul Montel i 1912 ([1] p. 104).

Emnet oplevede en stor opblomstring i 1980'erne, hvor introduktionen af computergrafik gav mulighed for visuel støtte i arbejdet. Dette satte igen emnet i fokus, og op gennem dette årti blev der opnået mange nye resultater indenfor emnet. Af eksempler kan nævnes studierne af Mandelbrotmængden [18], [12], og klassifikationen af Fatoukomponenterne [41], [10].

Kurset "Diskrete dynamiske systemer" omhandler iteration af polynomier i den komplekse plan med særlig vægt på familien bestående af andengradspolynomier af typen $P_c(z) = z^2 + c$. Det har jeg valgt, fordi denne ramme er velegnet til at studere mange interessante sider af dynamiske systemer. Kurset vil lægge vægt på at anvende de visualiseringsmuligheder, som computeren giver. I den forbindelse kan det også være en fordel at arbejde med polynomier i den komplekse plan frem for rationale afbildninger på Riemannsfæren.

Kurset omhandler stort set kun den matematik, der blev udviklet i Fatou og Julias klassiske teori. Kurset vil introducere de begreber som Julia og Fatou anvendte til at undersøge iterationer af rationale afbildninger og vise en del af de resultater, de opnåede. Det ene hovedresultat er, at den komplekse plan kan deles i afslutningen af de frastødende periodiske punkter for et polynomium P (Juliamængden), og den åbne mængde, hvorpå familien af iterationer $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er en normal familie (Fatoumængden). Resultatet knytter således de lokale dynamiske begreber, periodisk punkt og egenværdi, til det globale/topologiske begreb normal familie. Det andet hovedresultat siger, at de kritiske punkter for P giver interessant information om, hvorvidt Juliamængden er sammenhængende. Dette resultat vises for familien $\{P_c\}_{c\in\mathbb{C}}$, hvor det også giver anledning til Mandelbrotmængden $\mathcal{M}$, der består af de værdier c, hvor banen $\{P_c^k(0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ for det kritiske punkt 0 er begrænset. Til sidst i kurset anvendes Eulerkarakteristikken til at studere den dynamiske opførsel af sammenhængskomponenterne i Fatoumængden, de såkaldte Fatoukomponenter.

Studiet af den matematiske teori om holomorf dynamik har udgjort en væsentlig del af mit arbejde med specialet. Dette arbejde fremgår alene af kursusmaterialet (bilag B).

Kapitel 1

Metode og læsevejledning

Som beskrevet i indledningen er målet for denne opgave at planlægge, gennemføre og evaluere et matematikkursus funderet i et teoretisk begrebsapparat og at undersøge hvilken forståelse af begrebet *normal familie af funktioner*[1], kurset giver anledning til. Planlægning og evaluering af et kursus kan beskrives som et pædagogisk udviklingsarbejde, hvorimod undersøgelsen af forståelsen af begrebet "normal familie af funktioner" er et didaktisk spørgsmål.

I afsnit 1.1 beskrives en konkret forskningsramme for didaktikforskning i forbindelse med matematikundervisning. Jeg opfatter denne ramme som en opskrift på hvordan man laver pædagogisk udviklingsarbejde og didaktisk forskning med det formål at forbedre udviklingsarbejdet.

I afsnit 1.2 beskrives min implementering af denne ramme.

1.1 En ramme for planlægning af undervisning

I dette afsnit beskrives en matematikdidaktisk forskningsramme, der er udviklet af et netværk kaldet RUMEC[2] i artiklen [6]. Ankermanden i dette arbejde er den amerikanske matematiker og matematikdidaktiker Ed Dubinsky. Rammen er en forskningsramme for didaktikforskning, der bedrives i *forbindelse* med konkrete undervisningsforløb, og RUMECs målsætning er derfor også flertydig. Selv siger RUMEC om deres mål:

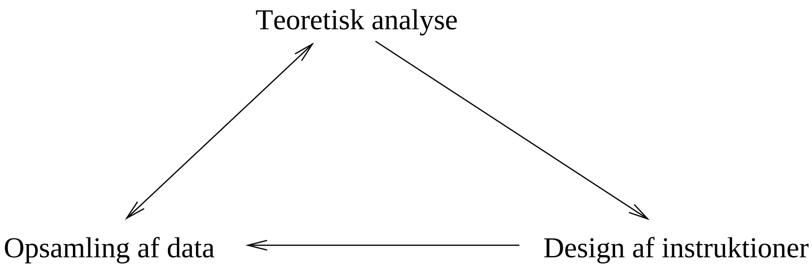
> "to increase our understanding of how learning mathematics take place, to develop a theory-based pedagogy for use in undergraduate mathmatics instructions, and to develop a base of information and assessment techniques which shed light on the epistemology and pedagogy associated with particular concepts." [6] p. 6.

Det første mål er et udtryk for, at RUMEC vil bedrive didaktisk grundforskning. De to efterfølgende mål stemmer derimod godt overens med målsætningen om at fundere kursusudviklingen i et teoretisk begrebsapparat.

[1]Begrebet *normal familie* er defineret i definition B.3.5 på side 69.

[2]Reseach in Undergraduate Mathematics Education Community.

Rammens grundide er at anvende en *læringsteori* til at lave en analyse af det stofområde, man vil undervise i og undersøge de studerendes læring af. Denne *teoretiske analyse* danner grundlag for udarbejdelsen af *instruktioner*, men samtidig er analysen udgangspunkt for tilrettelæggelse af en *undersøgelse* bestående af en dataopsamling og behandling. Målet for databehandlingen er at revidere den teoretiske analyse. Den reviderede teoretiske analyse kan så danne grundlag for nye instruktioner og en ny dataopsamling. Denne proces bør fortsættes indtil overensstemmelsen mellem den teoretiske analyse og databehandlingen er god og ikke forbedres ved nye gennemløb. Processen er illustreret på figur 1.1.



Figur 1.1: Rammen

Artiklen [6] beskriver metoder til at udfylde denne ramme. For Dubinsky og RUMEC består den teoretiske analyse i en *genetisk dekomponering*, der udarbejdes med udgangspunkt i *APOS-teori*[3]. APOS-teori er en teori for, hvordan matematik læres. Den beskrives i afsnit 2.4. Til gennemførelse af undervisning har RUMEC og Dubinsky udviklet den *didaktiske platform ACE*[4]*-teaching cycle of activities*, der berøres i afsnit 3.2.

Forskningsgruppen har udarbejdet nogle retningslinier for opsamling og analyse af data. Disse retningslinier omhandler skriftlige prøver og forskningsinterview, specielt forskningsinterview afholdt på baggrund af en skriftlig prøve. Retningslinierne er beskrevet i afsnit 4.1.1.

Fordelen ved RUMEC og Dubinskys forskningsramme, er at den er så konkret, at det, inden for en overskuelig tidsramme, er muligt at planlægge og evaluere et helt kursusforløb mere eller mindre med udgangspunkt i denne ramme. Udover at de giver en metode til kursusudvikling, gør deres pragmatiske forhold til lærings-, evaluerings- og undersøgelsesteori deres ramme til et skoleeksempel på *didaktisk ingeniørarbejde*[5].

[3]APOS er akronym for Action, Proces Object og Scheme, der er teoriens hovedbegreber.

[4]ACE er akronym for Activities, Class og Exercises, der er platformens ingredienser.

[5] Den franske matematikdidaktiker Michèlle Artigue beskriver i artiklerne [4] og [5] disciplinen didaktisk ingeniørarbejde. Ingeniøren kan ved at underkaste sig den videnskabelige viden og have et pragmatisk forhold til denne, arbejde med komplekse problemstillinger og løse komplicerede opgaver. Didaktisk ingeniørarbejde har udviklet en metodik, der beskrives i [5] p.13 som bestående af dels en *a priori* analyse og kontrol af den forestående didaktiske situation og dels en *a posteriori* analyse af den overståede didaktiske situation. Valideringen af resultater består i at *sammenligne* a priori analysen med a posteriori analysen.

1.2 Implementering af rammen

Jeg vil i mit projekt gennemføre en a priori analyse, udarbejde instruktioner, afholde et kursus og foretage en opsamling af data. Disse data er udgangspunkt for en a posteriori analyse, der skal give anledning til en revision af den teoretiske analyse.

A priori analysen er en tese for, hvordan læring af stofområdet kan foregå. Som beskrevet i afsnit 1.1 laves denne analyse med udgangspunkt i en læringsteori, der vil blive udviklet i kapitel 2. Teorien tager udgangspunkt i Sfard[6] og Dubinskys teorier om matematisk begrebsdannelse, og derudover inddrages Tall og Vinners[7] ide om begrebsbillede. Resultatet er den læringsteori, der udgør grundlaget for den a priori analyse, der er gennemført i afsnit 4.2 og tildels i bilag A. Teorien skal ligeledes anvendes til at analysere og forstå det empiriske arbejde.

Den teoretiske analyse danner grundlag for udarbejdelsen af instruktioner. Det vil sige, at jeg i analysen identificerer de vigtigste begreber og sammenhænge, samt får en ide om, hvordan disse kan konstrueres. På trods af at jeg anvender en læringsteori, vil analysen i høj grad konstrueres udfra min egen erfaring og forståelse af stoffet. Den er som udgangspunkt subjektiv, men noget af ideen med dette projekt er at validere visse dele af analysen. I afsnit 4.2 er der gennemført en grundig analyse af begrebet "normal familie af funktioner", og i bilag A gives en kort analyse af resten af kursets begreber.

For at planlægge og gennemføre konkret undervisning er denne analyse utilstrækkelig. Der er behov for en didaktisk platform, en metode til undervisning. I kapitel 3 udvikles en didaktisk platform målrettet imod korte kurser på kandidatuddannelsen i matematik. Platformen gør brug af gruppelæring samt individuel indskrivning og afrapportering. Platformens målsætning er at befordre konstruktion af *viden* og udvikle relevante *kompetencer*.

Undersøgelsesdelen af opgaven falder i to dele. I kapitel 4 undersøges kursisternes forståelse af begrebet normal familie af funktioner, og i kapitel 5 undersøges det om udviklingen af *begrebskort*, lavet af kursisterne, kan afsløre, hvilke begreber der foregår læring af i løbet af kurset. Undersøgelserne består en kvantitativ databehandling af resultaterne af dels en skriftlig prøve og dels to øvelser, hvor kursisterne blev bedt om at lave begrebskort over nogle af kursets begreber, samt kvalitative interview afholdt på baggrund af prøven og øvelserne.

Artigues a priori analyse svarer til Dubinskys teoretiske analyse. A priori kontrollen består, i denne ramme af designet af instruktioner og a posteriori analysen i opsamling og analyse af data.

RUMEC beskriver ikke deres projekt i forhold til begrebet didaktisk ingeniørarbejde. Der kan naturligvis være flere grunde til dette, selv gætter jeg på, at sprogbarrieren er den væsentligste, da det meste litteratur om didaktisk ingeniørarbejde er på fransk.

[6] Anna Sfard er en israelsk matematikdidaktikker, hendes arbejde beskrives i afsnit 2.3.

[7] David Tall og Shlomo Vinners arbejde med begrebsbilledet beskrives i afsnit 2.2.

Kapitel 2

Læringsteori

I dette kapitel udvikles den læringsteori, der er udgangspunkt for resten af rapporten. Teorien skal anvendes dels til at lave en a priori analyse af den matematik, der skal indgå i kurset, og dels til at beskrive og forstå kursisternes udbytte. Læringsteorien er konstruktivistisk, det vil sige at der er en gennemgående antagelse om, at individet selv konstruerer sin viden. De grundlæggende begreber fra konstruktivismen jeg vil få brug for er gennemgået i afsnit 2.1. I afsnit 2.2 omtales Tall og Vinners ide om begrebsbillede, der gør os i stand til at tale om, *hvordan* et individ forstår en definition. I afsnittene 2.3, 2.4 og 2.5 udvikles den egentlige læringsteori. Dette sker ved at sammenholde Anna Sfards ide om matematiske begrebers duale natur (se afsnit 2.3) med Dubinskys APOS-teori (se afsnit 2.4). Teorierne sammenholdes i afsnit 2.5, og resultatet er den læringsteori, der udgør grundlaget for resten af arbejdet. Den læringsteori der udvikles er ret simpel og dækker derfor ikke alle aspekter af det at lære matematik. I afsnit 2.6 diskuteres, hvorvidt modellen giver en god beskrivelse af det at lære matematik.

2.1 Piagets konstruktivisme

For at give indblik i konstruktivismen vil jeg indledningsvis gennemgå noget af Piagets teori om *kognition*. Fremstillingen bygger hovedsageligt sekundær litteratur, specielt [30] og [49].

Piagets udgangspunkt for at lave en teori om kognition er biologi[1], og hans teori om individets kognitive udvikling er inspireret af evolutionsideen. Teorien går ud på at individet selv *konstruerer* sin forståelse af omverdenen gennem et stadigt forsøg på *tilpasning*. Glasersfeld udtrykker Piagets syn på kognition således:

> "he relinquished the notion of cognition as the producer of representation

[1] Faktisk startede Piaget sin akademiske karriere som biolog. I en alder af 11 år begyndte han at hjælpe til hos Paul Godet, der var leder af det naturhistoriske museum i Piagets hjemby Neuchâtel og aktiv forsker i krebs. Som teenager udgav Piaget flere videnskabelige artikler om dette emne.

> of an ontological reality, and replaced it with *cognition as an instrument of adaption the purpose of which is the construction of viable conceptual structures.*" [30] p. 59. (Min kursivering.)

Den biologiske ide om tilpasning eksisterer på flere planer i Piagets teori. Ud over den rent darwinistiske, at menneskets kognitive evner er styret af "survival of the fittest", udvikler det enkelte individs forståelse af omverdenen sig evolutionært. Det sker ved at individets mentale konstruktioner vekselvirker med individets sanseindtryk i en stadig tilpasningsproces eller *adaption*. Denne vekselvirkning beskrives af Piaget ved hjælp af begrebet *handlingsmønster* (eng. action scheme), som består af tre dele. En *genkendelse* af en situation der fører til en *handling*, samt en *forventning* om et resultat af denne handling. Adaptionen beskrives som bestående dels af *assimilation*, dvs. tilpasning af indtryk fra omgivelserne til eksisterende mentale konstruktioner og dels af *akkommodation*, dvs. tilpasning af eksisterende mentale konstruktioner til indtryk fra omgivelserne[2].

Genkendelsen er altid en assimilation af en situation. Handlingen giver et resultat, og dette resultat assimileres, hvis muligt, til forventningen. Hvis dette ikke er muligt, vil individet opleve en *perturbation*, eller forstyrrelse. Perturbationen kan afstedkomme en akkommodation, dvs. en ændring af individets mentale konstruktioner, sådan at det faktiske resultat af handlingen kan assimileres til den nye forventning. En mental konstruktion der giver anledning til få eller ingen perturbationer kaldes *levedygtig*.

Et handlingsmønster indeholder altid sansemotorisk aktivitet (interaktion med omverdenen), men helt tilsvarende mønstre kan foregå på det mentale plan. Sådanne mønstre betegnes *operative mønstre*.

Piaget skelner mellem *genkendelse* (eng. re-cognition) og *genkaldelse* (eng. representation). At genkende en situation er at knytte situationen til et handlingsmønster. At genkalde en situation er derimod at genetablere situationen fra hukommelsen. Forskellen på genkendelse og genkaldelse illustreres af Glasersfeld ([30] p. 59) ved forskellen på, at et individ forstår et læst ord, og at individet selv anvender ordet i en tekst.

Kan man genkende og genkalde situationer, er det muligt at *reflektere* over situationer, det vil sige sammenligne genkaldelse af forskellige situationer. Dette giver f.eks. mulighed for at betegne to situationer som "ens". Piaget har to enshedsbegreber, ækvivalens og identitet. *Identitet* forekommer, når vi oplever to forskellige situationer som involverende den selv samme ting. *Ækvivalens* foreligger, hvis to situationer opleves som ens i alle, på passende måde, væsentlige sammenhænge.

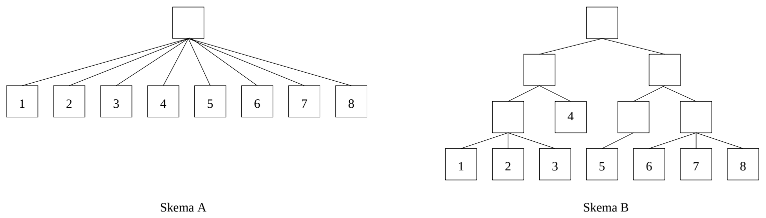
Refleksion kan give anledning til *abstraktion*. F.eks. kan oplevelsen af identitet give anledning til abstraktionen *objekt*, hvorimod oplevelsen af ækvivalens kan give anledning til abstraktionen *begreb*. Piaget skelner mellem to typer af ab-

[2] Rasmussen [49] gør en del ud af, at *enhver* adaption indeholder elementer af både assimilation og akkommodation. Det gør han tildels for at lægge afstand til Illeris [34], der taler om assimilativ og akkommodativ læring.

straktion, *empirisk* abstraktion, der foregår på baggrund af sanseoplevelser, og *refleksiv* abstraktion, der foregår på baggrund af mentale operationer[3].

Piaget beskriver læring som et handlingsmønster der, ikke resulterer i det forventede resultat, men derimod fører til en *forstyrrelse*, der opretholder eller genetablerer *ligevægt* (eng. ekvilibrium). Mental ligevægt defineres som den tilstand et individ er i, når det er i stand til at opveje forstyrrelser ved egen aktivitet ([49] p. 122).

Begreber og mønstre organiseres i *kognitive skemaer* (eng. Cognitive schemata). Et skema indeholder handlingsmønstre og operative mønstre, men det kan også indeholde andre skemaer. Dette illustreres af Anna Sfard[4] ([52] fig. 7 p. 27) på en figur som figur 2.1, hvor den samme viden (de samme mønstre) er organiseret i to forskellige skemaer. Det skema med mange lag er at foretrække, fordi den meget strukturerede viden er lettere at navigere i. Dermed giver det mere plads til viden, da et skema, der er let at navigere i, kan være forholdsvis stort uden at blive uoverskueligt.



Figur 2.1: Den samme viden organiseret i to forskellige skemaer. Det er vanskeligt at fylde mere viden ind i skema A uden, at det bliver uoverskueligt, derfor er skema B at foretrække.

Adaption kan nu beskrives som en ændring af de kognitive skemaer, bestående af assimilation og akkommodation. Assimilation er her en tilføjelse af nye handlingsmønstre og operative mønstre til eksisterende skemaer. Akkommodation er derimod en omorganisering af eksisterende skemaer.

Piagets arbejde har haft som hovedformål at beskrive den kognitive del af børns udvikling. Alligevel udgør hans arbejde en vigtig del af baggrunden for de teorier om matematisk begrebsdannelse[5], der skal danne grundlag for analysen i afsnit 4.2 og bilag A.

[3]Udover empirisk og refleksiv abstraktion arbejder Piaget også med *semiempirisk* abstraktion. Semiempirisk abstraktion beskrives som en abstraktion på baggrund af sanseoplevelser, der er et resultat af individets bevidste påvirkning af omgivelserne.

[4]Anna Sfard er matematikdidaktiker og bruger kognitive skemaer til at beskrive *reificeringsprocessen*, som kort sagt frigører et matematisk begreb fra den tilhørende proces. Hun beskriver reificering som en akkommodation, der indfører et *nyt lag* i et kognitivt skema. Hendes teori om matematisk begrebsdannelse er beskrevet i afsnit 2.3.

[5]Piaget interesserede sig selv for, hvordan forståelse af matematiske begreber udvikler sig, specielt hos børn (se [47], [48]). Piaget har i flere omgange inspireret matematikdidaktikere. I Skemps klassiker "The Psycology of Learning mathematics" [55] spiller begrebet *kognitivt skema* en central rolle. Senest har Glasersfelds *Radikal konstruktivisme* [30], der sætter *handlingsmønstret* i centrum haft, betydning for miljøet.

2.2 Begrebsbillede og begrebsdefinition

David Tall og Shlomo Vinner skelner i artiklen [57] imellem *begrebsdefinition* og *begrebsbillede*. Deres mål er at præcisere forskellen mellem en logisk/matematisk definition af et begreb og den kognitive struktur, der skal opbygges, før vi siger, at en person *har forstået* denne definition.

En *begrebsdefinition* er en sproglig forklaring af et begreb. Tall og Vinner skelner mellem en *personlig* begrebsdefinition og en *officiel* begrebsdefinition. En personlig begrebsdefinition er et individs egen sproglige forklaring af et begreb. En officiel begrebsdefinition er en definition, der er accepteret af det matematiske samfund, f.eks. gennem udgivelse i en bog eller artikel.

Tall og Vinner har følgende definition af et begrebsbillede:

> "We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes." [57] p. 152.

Bemærk at begrebsbilledet hørende til et begreb nok kan indeholde en slags mentalt billede af begrebet, men det vil næsten altid indeholde meget mere end det. F.eks. kan begrebsbilledet indeholde *symboler*, der typisk bruges i forbindelse med begrebet og *erfaringer* med begrebet herunder forbindelser til andre begreber. Det er langt fra altid, at den personlige begrebsdefinition er en del af en persons begrebsbillede.

Et begrebsbillede vil sjældent være kohærent, og det kan endog indeholde modstridende opfattelser. Sådanne *potentielle konflikter* giver, ifølge [57] p. 152, ikke nødvendigvis problemer for begrebsbilledets levedygtighed. Først, hvis der tænkes på to modstridende opfattelser på samme tid, vil den potentielle konflikt blive en *kognitiv konflikt*, der giver anledning til perturbation jf. afsnit 2.1.

En bestemt type af perturbation, forekommer hvis elevens begrebsbillede ikke stemmer overens med elevens personlige begrebsdefinition eller en forelagt officiel definition. I [61] p. 70 og [29] p. 43 beskrives tre mulige reaktioner på en sådan perturbation. Eleven kan ved akkommodation tilpasse sit begrebsbillede, så det stemmer overens med definitionen, eller eleven kan helt undlade at forholde sig til definitionen. Den sidste mulighed som foreligger er, at begrebsdefinitionen og begrebsbilledet kan leve videre sideløbende. Individet vil, forelagt en opgave, have tendens til at reflektere ved at referere til begrebsbilledet, men vil være i stand til at referere til begrebsdefinitionen.

Begrebsbilledet er således en kompliceret kognitiv struktur, der ikke umiddelbart lader sig beskrive. Resten af dette kapitel omhandler teorier, der forsøger at modellere dannelsen af et begrebsbillede. Det er vigtigt at understrege, at disse teorier er modeller, ingen af dem påstår at beskrive begrebsbilledet fuldstændigt. Teorierne kaldes under et for teorier om *matematisk begrebsdannelse*.

2.3 Sfard og den duale natur af matematiske begreber

Anna Sfard forsøger i artiklen [52] at forstå og forklare, hvorfor matematik virker så vanskeligt for mange mennesker. Hendes mål med at lave en teori for matematisk begrebsdannelse er at forstå og beskrive problemer med den måde matematik læres på, snarere end at konstruere et hjælpeværktøj til pædagogisk udviklingsarbejde. Når jeg tager hendes arbejde med her, er det dels fordi, det underbygger APOS-teorien[6], der gennemgås i afsnit 2.4, og dels fordi det indeholder nogle selvstændige pointer, der rækker ud over APOS-teorien.

Anna Sfard [52] mener, at ethvert matematisk begreb kan forstås både operationelt og strukturelt. Ved en *operationel* forståelse menes, at det matematiske begreb, f.eks. en funktion, forstås som en algoritme, der gør noget ved nogle matematiske objekter, f.eks. tal. En *strukturel* forståelse af et begreb, betyder at begrebet forstås *som* et objekt og kendetegnes *ved* relationer til andre objekter, f.eks. kan en funktion beskrives som en mængde af ordnede par.

Sfard argumenterer i [52] for, at de to måder at forstå et matematisk begreb på er komplementære. Det skal forstås på den måde, at fuld forståelse af et begreb kræver indsigt i begge forståelsesformer. Sfard fremhæver, at den operationelle forståelse altid går forud for den strukturelle.

Forskellige repræsentationer kan støtte enten den strukturelle eller den operationelle forståelse af matematiske begreber. Rent verbalsproglige tekststrenge virker ofte støttende for den operationelle forståelse. Når antallet af symboler, der indgår i tekststrengen, stiger, øges også tendensen til at styrke den strukturelle forståelse. Visuelle repræsentationer har tendens til at styrke den strukturelle forståelse (se [52] p. 6).

Med dette udgangspunkt danner Anna Sfard i [52] en model for matematisk begrebsdannelse bestående af tre stadier med stigende vægt på den strukturelle begrebsdannelse. De tre stadier er internalisering (eng. interiorization), kondensering (eng. condensation) og reificering (eng. reification). Jeg gennemgår her de tre stadier et efter et.

Et begreb siges at være *internaliseret* af et individ, når individet er *bekendt* med de processer, der ligger til grund for begrebet, istand til at *udføre* dem, og i stand til at *forestille* sig dem udført uden at behøve at gøre det.

Det er vigtigt at pointere, at Sfard her taler om processer, der ligger *til grund* for det omtalte begreb. Eksempelvis nævner Sfard ([52] p. 18), at algebraiske manipulationer og regning på de reelle tal ligger til grund for funktionsbegrebet. Senere ([52] p. 19) beskriver Sfard en succesfuld internalisering af funktionsbegrebet ved, at den lærende er bekendt med variabelbegrebet og er i stand til at udregne funktionsværdier på baggrund af en formel.

Kondenseringen består i at individet tænker på de lange processer som suc-

[6]APOS-teori er en teori, der er designet til anvendelse i pædagogisk udviklingsarbejde og didaktisk ingeniørarbejde (se side 10), altså den type arbejde der udføres i dette projekt. Sfards arbejde og APOS-teorien sammenlignes i afsnit 2.5.

cessivt færre og færre enheder. Kondenseringen foregår over et længere stykke tid. Individet ender med at tænke på processen som bestående af ret få, evt. blot en, enheder. Bemærk at individet stadig tænker operationelt på begrebet. Ifølge Sfard ([52] p. 19) er det på dette stadium, at begrebet fødes, da individet nu tænker på det som bestående af et overskueligt antal processer.

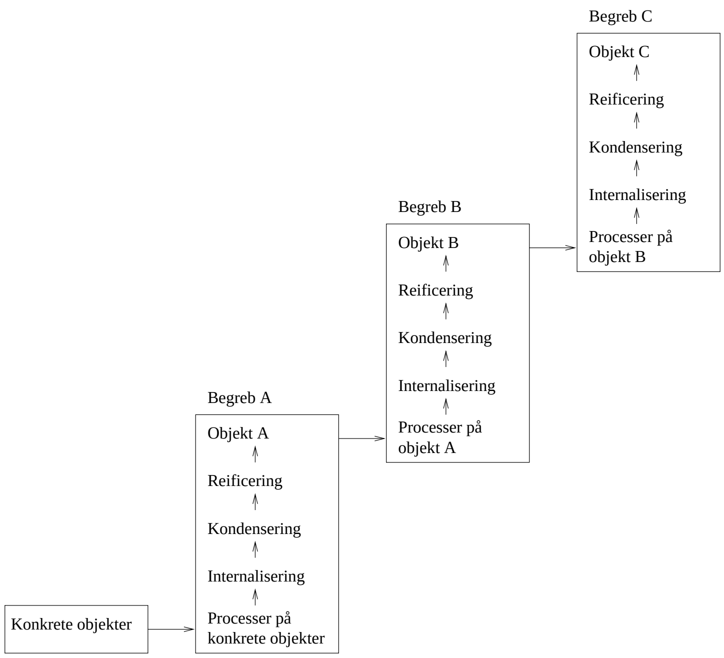
Sfard skriver ([52] p. 19), at en person, der har kondenseret funktionsbegrebet, typisk vil være i stand til at tegne grafen for en funktion, samt arbejde med sammensatte og inverse funktioner.

Når individet er i stand til at tænke på begrebet som en helhed, en ting, og ikke længere (nødvendigvis) forbinder det med en proces, siger Sfard, at begrebet er blevet *reificeret*. Reificeringen giver individet mulighed for at arbejde med begreber, der bygger ovenpå det oprindelige begreb.

Sfard beskriver ([52] p. 26) reificeringen af et begreb som indførelsen af et nyt lag i et kognitivt skema (se figur 2.1).

De tre stadier skal ifølge Sfard opfattes som et hierarki, dog pointerer hun at studerende kan udvikle sig skævt i forhold til dette hierarki. Sfard kommer med flere eksempler på dette, men fælles for dem er, at de studerende udvikler sig skævt på en uhensigtsmæssig måde. Det fremgår klart, at Sfard mener, at den sunde matematiske begrebsdannelse foregår som beskrevet ovenfor.

Når et begreb er reificeret kan begreber, der bygger oven på dette, internaliseres. F.eks. er det nødvendigt at have funktionsbegrebet reificeret for at internalisere begrebet differentialligning. Sfard beskriver dette ([52] p. 22) med en figur som figur 2.2.



Figur 2.2: Sfards hirakiske model for matematisk begrebsdannelse.

Sfard har en væsentlig pointe her; reificeringen af det ene (lavere niveau) begreb er en forudsætning for internaliseringen af det andet (højere niveau) begreb, men samtidig vil denne reificering normalt ikke komme uden, at man forsøger at internalisere processer, der bygger ovenpå den oprindelige proces. Først da har individet behov for at behandle den oprindelige proces som en helhed. Sfard siger dette meget direkte:

> "The lower-level reification and the higher level interiorization are prerequisite for each other". [52] p. 31.

Sfard betegner denne afhængighed med *reificeringens onde cirkel* og mener, at den bærer en del af forklaringen på, at reificeringsprocessen er så vanskelig for mange. Samtidig forklarer denne afhængighed, hvorfor *matematik* er så vanskeligt for nogle. Da reificeringsprocessen er vanskelig, og man i princippet kan klare sig med en operationel forståelse af begreberne, vil nogle studerende ende med at bygge et højere ordens begreb på en lang kæde af mangelfulde eller fraværende reificeringer. Det vil så kræve enorme mængder af intellektuel aktivitet at overskue selv de simpleste manipulationer af et sådant begreb.

Sfard pointerer ikke, i hvert fald ikke direkte, den mere optimistiske fortolkning af ovenstående, nemlig at reificering og internalisering går hånd i hånd. Dette kan anvendes i undervisningssammenhænge til bevidst at introducere og arbejde med højereordens begreber med det mål at sikre reificering af visse lavere ordens begreber.

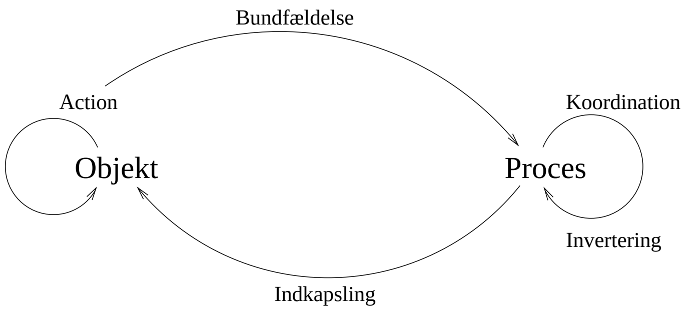
2.4 Dubinskys APOS-teori

Ed Dubinsky har f.eks. i artiklerne [6], [22] og [21], opstillet en teori for matematisk begrebsdannelse. Teorien er konstruktivistisk, og Dubinsky bekender sig i artiklen [20] til radikalkonstruktivismen som beskrevet af Glasersfeld i [30], og tildels i afsnit 2.1. Dubinskys mål med at opstille en sådan teori er at konstruere et apparat, der kan anvendes til at gennemføre den teoretiske analyse øverst i figur 1.1. Teorien er altså lavet med anvendelse i både undersøgende og udviklende arbejde for øje og er således både *deskriptiv* og *præskriptiv*.

Teorien betegnes APOS-teori og er opkaldt efter de engelske termer: *Action*, *Process*, *Object* og *Schema*, der er teoriens centrale begreber. Jeg vil oversætte disse termer med *handling*, *proces*, *objekt* og *skema*.

Dubinsky beskriver i [21] hvordan disse begreber spiller sammen. Dette er også illustreret på figur 2.3.

> "understanding a mathematical concept begins with manipulating previously constructed mental or physical objects to form actions; actions are then interiorized to form processes which are then encapsulated to form objects. Objects can be de-encapsulated back to processes from which they were formed. Finally, processes and objects can be organised in schemas."[21] p. 5.



Figur 2.3: APOS-teori

Her følger en nærmere forklaring af de enkelte begreber, der i afsnit 2.5 knyttes til Sfards begreber, der blev gennemgået i afsnit 2.3.

En *handling* er et handlingsmønster, se afsnit 2.1, der kan karakteriseres ved at være en reaktion på *ydre* stimuli. Individet har behov for detaljerede instruktioner for at gennemføre handlingen, men behersker i princippet hvert enkelt trin. Et individ, hvis funktionsbegreb er begrænset til en handlingsforståelse, vil ifølge [6] p. 9 være i stand til at beregne en funktionsværdi, såfremt individet er præsenteret for en forskrift og en x-værdi. Individet vil have vanskeligt ved at arbejde med inverse og sammensatte funktioner og vil have alvorlige problemer med at arbejde med differentialligninger, fordi sætningen: "løsningen til en differentialligning er en funktion" ikke giver megen mening uden en bedre forståelse af funktionsbegrebet (se [6] p. 10).

Ved at foretage en handling nogle gange og *reflektere* (se afsnit 2.1) over handlingen kan den *bundfældes*[7] (eng. interiorize) som en *proces*. En proces er en mental konstruktion, der muliggør udførelse af handlingen. En procesforståelse kan karakteriseres ved, at individet har fuld kontrol over handlingen, ikke har behov for ydre stimuli og kan forestille sig handlingen gjort uden eksplicit at foretage den. Når et begreb er bundfældet som proces, er det muligt at foretage *invertering* og *koordinering* af processen. Invertering er at konstruere en ny proces, der gør det modsatte, eller "ophæver", den oprindelige proces. Koordinering er at anvende to bundfældede processer til konstruktion af en ny proces (se [6] p. 10).

En procesforståelse af begrebet funktion gør individet istand til at forstå en funktion som $x \mapsto \sin(x)$, der ikke er givet ved en forskrift i de klassiske regningsarter, og giver mulighed for at arbejde abstrakt med sammensatte og inverse funktioner (jf. [6] p. 10).

Ved at reflektere over invertering, koordinering og lignende operationer anvendt på en proces kan individet, ved at foretage en refleksiv abstraktion (se afsnit 2.1), *indkapsle* processen til et *objekt*. Det indkapslede objekt er karakteriseret ved, at individet kan se objektet som en helhed og er istand til at udføre hand-

[7] Der er stor forskel på Sfard og Dubinskys anvendelse af det engelske ord interiorize. Derfor har jeg oversat Sfards interiorize med *internalisere* og Dubinskys med *bundfælde*, se evt. afsnit 2.5.

linger samt anvende processer på det. Indkapslede objekter kan *udfoldes* til de processer, de kommer fra.

Ifølge Dubinsky [6] p. 11 er indkapsling en vanskelig proces. Han begrunder dette ([6] p. 11) med, at intet i vores sansemotoriske verden svarer til at udføre handlinger på en proces.

Det kræver en indkapsling af funktionsbegrebet at arbejde med differentialligninger (se [22] p. 118).

Objekter og processer kan samles i *skemaer* (se afsnit 2.1). Et skema, der behandles som et objekt for at indgå i andre skemaer, siges at være *tematiseret* til et objekt (se [6] p. 12).

Ved hjælp af APOS-teoriens begreber kan man opstille en tese for konstruktion af et matematisk begreb ved at udføre handlinger, bundfælde disse til processer, indkapsle disse og knytte det resulterende objekt til andre objekter og processer i et skema. En sådan tese betegnes med en *genetisk dekomponering* af det matematiske begreb. I afsnit 2.5 gennemføres en genetisk dekomponering af funktionsbegrebet.

2.5 Sammenligning af Sfard og Dubinsky

Der er stor forskel på Sfard og Dubinskys motivation for at lave en teori for matematisk begrebsdannelse. Sfard ønsker at beskrive begrebsdannelsen for at forklare, hvorfor nogle studerende har vanskeligt ved at tilegne sig matematisk viden. Dubinskys mål er at lave et apparat, der kan anvendes i udviklingsarbejde og til didaktisk ingeniørarbejde. På trods af disse forskelle er der mange ligheder mellem Sfard og Dubinskys teorier for begrebsdannelse. Lidt karrikeret kan sammenhængen mellem de to teorier illustreres med nedenstående tabel, hvor specielt den nederste identifikation er klar.

Sfard	**Dubinsky**
Internalisering	Istand til handling
Kondensering	Bundfældelse
Reificering	Indkapsling

Tabel 2.1: Sammenhængen mellem de to teorier illustreres med denne tabel, hvor specielt den nederste identifikation er klar.

Sfards begreb internalisering beskrives som det stadium, hvor den lærende bliver bekendt og fortrolig med de processer, der ligger til grund for det begreb, der internaliseres. Sfard skriver om disse processer:

> "These processes are operations performed on lower-level mathematical objects."[52] p. 18.

Det er meget tæt på at være det, Dubinsky beskriver som at udføre handlinger.

Dubinsky gør en del ud af, at udførelsen af handlinger er ydre motiveret. Jeg vil, som Dubinsky, beskrive dette stadium ved "evnen til at udføre handlinger".

Dubinsky lægger vægt på, at bundfældelsen resulterer i, at individet efterhånden kan forestille sig processen udført uden konkret at skulle udføre den, samt at processen ikke længere er styret af ydre stimuli. Sfard lægger vægt på, at individet ser processen som bestående af successivt færre dele.

Sfard og Dubinsky anvender de engelske ord "interiorzation" i to forskellige betydninger. For at undgå forvirring har jeg oversat Dubinskys begreb "interiorzation" med "bundfældelse" i stedet for internalisering. Jeg vil anvende Dubinskys begreb bundfældelse for dette stadium. Sfards teori fortæller, at bundfældelsen kan beskrives som en løbende forenklingsproces.

Jeg mener ikke, at der er nogen tvivl om, at det Sfard kalder reificering, er det samme som det, Dubinsky kalder indkapsling. De taler begge om væsentlig og pludselig akkommodation på dette sted og faktisk kun på dette sted. Så hvis teorierne, som påstået, minder om hinanden, må disse to begreber være ens. Jeg vil anvende Dubinskys betegnelse "indkapsling" for dette stadium. Jeg mener, at "Reificeringens onde cirkel" udgør et vigtigt bidrag fra Sfard, i vores terminologi, der stort set er Dubinskys, kan dette fænomen beskrives ved sætningen:

Indkapslingen af en proces til objekt forudsætter, at der udføres handlinger på denne proces, men sådanne handlinger kan principielt kun udføres på allerede indkapslede objekter.

Eller udtrykt mere optimistisk.

Forsøg på at udføre handlinger på endnu ikke indkapslede processer kan virke befordrende for denne indkapsling.

Man skal naturligvis, i praksis, være varsom med at anlægge denne optimistiske vinkel på reificeringens onde cirkel. Ikke desto mindre vil jeg gøre det enkelte steder i bilag A.

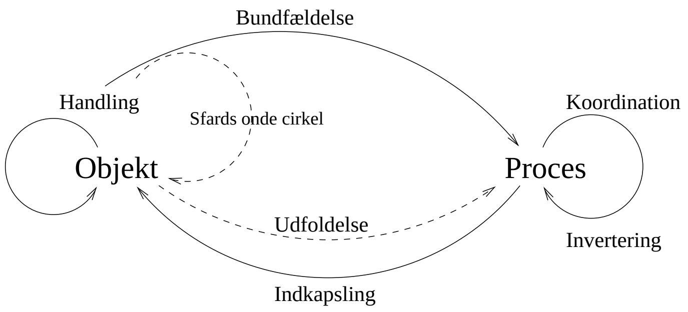
Den model, jeg vil anvende til udarbejdning af instruktioner, kan opsummeres med figur 2.4. Pilen markeret med *Sfards onde cirkel* skal udtrykke, at handlinger, der udføres på et endnu ikke indkapslet objekt, er med til at danne objektet. Pilen *udfoldelse* er medtaget for at understrege den dualitet, der ifølge Sfard er mellem objekt og procesforståelsen af et matematisk begreb.

Genetisk dekomponering af funktion

Med ovenstående begrebsapparat kan en genetisk dekomponering af en funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se ud som følger.

1. *Handlingen* at beregne f.eks. $f(7)$ når $f(x) = x^3 - 1$, samt lignende opgaver. Handlingen foregår *på* reelle tal $x \in \mathbb{R}$, der antages at være indkapslet som objekt. Mange gentagelser virker befordrende for refleksion, eller bundfældelse. Ad den vej dannes processen *funktion.*

2. Ved at udføre *invertering* (f^{-1}) og *koordinering* (f.eks. $f + g$, $f \circ g$ og



Figur 2.4: Læringsteorien

modellering v.h.a. funktionsbegrebet) på processen funktion og reflektere over dette, kan man opleve en *indkapsling* af f som *objekt*. Her kan arbejde med *grafer* for funktioner virke befordrende for indkapslingen.

3. Udfør *handlinger* på objektet funktion ($\frac{df}{dx}$, $\int f(x)dx$) for at slå indkapslingen fast.

Den læringsteori, der er gennemgået her, skal udgøre grundlaget for arbejdet med at planlægge kursusforløbet. Derudover skal den bruges til at analysere de empiriske data, jeg opsamler.

2.6 Modellens rækkevidde

Der kan rejses flere anker imod den model for læring, jeg har udviklet. Modellen er meget simpel og stiliseret. Dette er tildels en nødvendighed, fordi modellen både skal anvendes til at analysere *hele* det stofområde, der skal indgå i et kursus og til at lave kvalitative undersøgelser efter at kurset er gennemført, hvilket en kompliceret model ville besværliggøre. Ønsket om at lave en simpel model, der er både deskriptiv og præskriptiv, er efterkommet på bekostning af, at teorien ikke dækker alle aspekter af det at lære matematik. Dette afsnit har som hovedformål at påpege disse problemer. I kapitel 3 udvikles en didaktisk platform, der forsøger at tage højde for nogle af disse problemer.

Problemerne med modellen bunder i, at den udelukkende beskæftiger sig med matematisk begrebsdannelse. Dermed er modellen utilstrækkelig til at beskrive, hvordan individet opnår visse typer af matematisk indsigt og bliver istand til at anvende matematisk viden. Problemerne kan opsumeres i følgende punkter.

- Modellen er lavet til at beskrive tilblivelsen af abstrakte objekter i matematik. Men ifølge Tall[8] (se [58] p. 254) kan matematisk indsigt være andet end indkapsling af successivt mere abstrakte begreber.

[8] Tall fremhæver, at visse typer af matematisk indsigt består i at afsøge og beskrive matematiske strukturer.

- Modellen bekymrer sig ikke om, hvordan individet skal blive istand til at bruge de dannede begreber i matematisk aktivitet, det vil sige, hvilke *kompetencer* det er væsentligt at udvikle.

For at belyse ovenstående problemer vil jeg i de følgende afsnit inddrage dels Mogens Niss arbejde med at beskrive matematik i kompetencetermer og dels Carl Winsløws beskrivelse af, hvordan matematisk viden og matematiske kompetencer er flettet ind i hinanden.

2.6.1 Kompetencer

I erkendelse af at kendskab til fagligt stof ikke alene beskriver, hvad der adskiller en god matematikker fra en dårlig, har Mogens Niss i artiklerne [44], [45] og [46] forsøgt at beskrive matematisk viden i kompetencetermer. Han har som formål at opstille nogle kompetencer, der er globale i den forstand, at de er uafhængige af indhold og niveau. Hans arbejde er stadig i gang, men det har indtil videre resulteret i en udnævnelse af otte matematiske kernekompetencer, der kort beskrives her (en grundig beskrivelse af de enkelte kompetencer forefindes i [45]):

Tankegangskompetence: Evnen for at stille matematiske spørgsmål og vide, hvad der er relevante spørgsmål indenfor matematik. Kende til de matematiske begrebers rækkevidde, herunder generalisere og abstrahere indenfor matematik. At kende forskel på forskellige typer af udsagn og påstande indenfor matematik.

Ræsonnementskompetence: At kunne følge og bedømme ræsonnementer på skrift og i tale, at forstå hvad der adskiller et *bevis* fra andre typer af ræsonnementer, samt at kunne gennemføre og konstruere forskellige typer af ræsonnementer herunder beviser.

Problembehandlingskompetence: At kunne formulere og løse matematiske problemer.

Repræsentationskompetence: At kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold. Herunder vælge den rigtige repræsentation til en given opgave og have fornemmelse for repræsentationernes indbyrdes relation.

Symbol- og formalismekompetence: At kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme.

Modelleringskompetence: At kunne analysere og bygge matematiske modeller.

Komunikationskompetence: At kunne kommunikere i, med og om matematik.

Hjælpemiddelskompetence: At kunne betjene sig af, og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder IT.

Mogens Niss udnævner derudover tre former for overblik og dømmekraft, disse beskrives som indsigt i og forståelse af:

- Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder.
- Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning.
- Matematikkens særlige karakter som fagområde.

Som Mogens Niss arbejde foreligger på nuværende tidspunkt, ser jeg flere problemer.

Det væsentligste problem er, at Mogens Niss endnu ikke har offentliggjort, hvilke overvejelser der ligger bag udvælgelsen af disse otte kompetencer[9]. Det er et problem, fordi det gør hans arbejde uangribeligt i den forstand, at en præcis kritik af f.eks. valget af netop disse otte kompetencer er vanskelig, når der ikke foreligger nogle argumenter for dette valg. Derudover ville en argumentation for det fornuftige i at vælge disse otte kompetencer muligvis få dem til at fremstå klarere.

Niss beskriver kompetencerne som uafhængige af konkret matematisk indhold [45] p. 2 og p.11. En anke imod på denne måde at give kompetencerne eget liv er at, disse kompetencer kun manifesterer sig som performance i forbindelse med et matematisk indhold, ja faktisk er matematisk indhold en forudsætning for, at vi overhovedet kan tale om disse kompetencer. Derfor er denne uafhængighed i høj grad en påstand. Jeg vil komme tilbage til denne diskussion i afsnit 2.6.2.

Niss mener, at de otte kompetencer dækker begrebet matematisk kompetence og udgør selvstændige, rimeligt afgrænsede komponenter heri. Om disse to påstande siger Mogens Niss dog at:

> det ligger i sagens natur, at det er umuligt at levere videnskabelig dokumentation af at det både teoretisk og empirisk forholder sig sådan. [45] p. 3.

Jeg mener, det er uheldigt, at Mogens Niss først påstår uafhængighed og tilstrækkelighed af kompetencerne for straks derefter at sige, det er umuligt at gøre rede for rigtigheden af denne påstand. De otte kompetencer udgør stadigvæk konklusionen på Niss arbejde og bliver på denne måde gjort uangribelige, da ethvert angreb på kompetencernes uafhængighed og tilstrækkelighed kan affejes med ovenstående citat.

Det er ikke helt klart for mig præcist, hvad Mogens Niss mener, det er umuligt at dokumentere. Men læser man citatet, som om det skulle være umuligt at *underbygge* uafhængighed og tilstrækkelighed af kompetencerne med teori eller empiri, mener jeg faktisk, at det er et udtryk for en forkert opfattelse. For at illustrere dette vil jeg i skitseform vise, hvordan man kunne søge at underbygge de to påstande om uafhængighed og tilstrækkelighed.

[9] Ifølge privat samtale med Mogens Niss er der "en mere systematisk analyse af kompetencerne" på vej.

Påstanden om at de otte kompetencer dækker matematisk kompetence er nok vanskelig at verificere, men jeg mener alligevel, at den gennem falsifikation kan betragtes videnskabeligt. Ser man matematisk aktivitet defineret, som det der foregår i matematikundervisning og blandt professionelle matematikere, kan man sige, at påstanden, om at de otte kompetencer dækker matematisk kompetence, er falsificerbar[10]. Et eksempel på socialt accepteret matematisk aktivitet, der ikke kan beskrives med de otte kompetencer, vil vise, at de otte kompetencer ikke er dækkende.

Påstanden om, at de otte kompetencer udgør selvstændige rimeligt afgrænsede komponenter i matematisk kompetence [45] p. 3, er temmelig vag og derfor vanskelig at falsificere. Jeg mener alligevel, at det vil være muligt og relevant at sandsynliggøre rigtigheden af en sådan påstand. Det kan man f.eks. gøre ved at søge historiske eksempler på matematik-kulturer eller undervisningsmiljøer, der enten undgår at dyrke en bestemt kompetence eller dyrker en kompetence i "ekstrem" grad. Jeg vil ikke gå i gang med et sådant projekt, men giver i stikordsform et par illustrerende eksempler på, hvordan man kan argumentere for, at de tre første kompetencer er selvstændige og rimeligt afgrænsede komponenter i matematisk kompetence:

Tankegangskompetencen overses i matematikundervisning, der består i at træne løsning af standard opgaver, måske ved at finde og modificere et passende eksempel i en lærebog.

Ræsonnementskompetencen dyrkes isoleret i logik og filosofi.

Problembehandlingskompetencen dyrkes visse steder i selvstændige kurser. Man kan også forestille sig matematikundervisning, der overser problembehandlingskompetencen, f.eks. en forelæsningsrække der afsluttes med en mundtlig eksamen, hvor eksaminanten udelukkende bliver bedt om at recitere sætninger og beviser fra kursets pensum.

En helt anden fare ved programmer med det formål at lave en kompetencebeskrivelse *af* et fag er, at man i sin fokusering på kompetenceudvikling glemmer indholdsdimensionen, og at det således bliver lige meget, *hvad* man lærer, bare man udvikler de rigtige kompetencer. Programmet med at lave kompetencebeskrivelser af forskellige naturvidenskabelige fag har som udgangspunkt set sig i opposition til klassiske pensumbeskrivelser. Problemet er, at disse programmer har fået stor politisk opbakning[11], hovedsageligt fordi de pensumbaserede læseplaner som de angriber faktisk *er* utilstrækkelige. Der er således lagt op til en revolution i udgangspunktet for læseplansarbejdet, hvor det meget relevante bidrag, at vi må tænke over, hvilke kompetencer undervisningen skal

[10] Her skal falsificerbar måske ikke forstås i streng Poppersk forstand, men snarere som et udtryk for, at man, gennem case studies, kan argumentere fornuftigt *imod* påstanden om at kompetencerne dækker matematisk kompetence.

[11] Som eksempel herpå kan nævnes KOM(Kompetencer Og Matematiklæring)-projektet, der er igangsat af Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og støttet af Undervisningsministeriet. Projektet skal ses som et spydspids-projekt for en senere tilsvarende udvikling inden for andre fag (se [65]).

udvikle, risikerer at blive et dogme, hvor kompetenceudviklingen bliver meget væsentligere end indholdet af undervisningen.

I lyset af de undervisningspolitiske konsekvenser af kompetencebeskrivelserne[12] er det særligt uheldigt, at de, i hvert fald på nuværende tidspunkt, er karakteriseret ved at være temmelig postulerende og ikke særligt argumenterende.

Jeg vil, på trods af de beskrevne problemer, anvende de otte kompetencer til at beskrive, hvilke kompetencer min didaktiske platform sigter på at udvikle. Dette er gjort i afsnit 3.6. Grunden til dette er, at jeg mener, at kompetenceprojekterne med tiden kan ende med at udgøre vigtige bidrag til de fagbeskrivelser, vi kender i dag. Jeg mener dog, at projekterne, i stedet for at give en egentlig *beskrivelse af faget X i kompetencetermer*, burde *fastlægge, hvilke kompetencer der er væsentlige i forbindelse med faget X*. Jeg vil derfor anvende kompetencebegrebet som et supplement til de mere indholdsmæssige beskrivelser.

2.6.2 Viden og kompetencer eller indhold og performance

I et forsøg på dels at finde en fornuftig balance mellem kompetencebeskrivelser og pensumbaserede beskrivelser og dels at forklare nogle problemer med, hvordan matematik indgår i andre uddannelser, har Carl Winsløw i [63] opstillet en model. En vigtig pointe i Winsløws arbejde, er at man ikke kan studere disse abstrakte kompetencer. Man kan kun observere *diskursiv aktivitet*, dvs. hvad der bliver sagt, skrevet og givet udtryk for. Derved kan man danne sig et indtryk af en persons *performance*. Den diskursive aktivitet foregår altid indenfor en *diskurs*, som altid vil være præget af det aktuelle stofområde. Winsløws model beskriver matematisk viden og kompetencer i form af de observerbare størrelser indhold og performance. Disse størrelser manifesterer sig både indenfor og udenfor en rent matematisk sammenhæng (se Tabel 2.6.2).

	Indhold	**Peformance**
Intern	Strukturen af matematiske begreber og resultater	Forstå og producere matematisk dikurs
Ekstern	Matematiske metoders betydning i anvendelse	Forstå og producere matematiske modeller

Tabel 2.2: Winsløws model

Carl Winsløws pointe er, at disse fire felter alle afhænger af hinanden, hvilket bør tages i betragtning i enhver undervisningssituation. Situationen må afgøre, hvilke af disse felter der fokuseres på, men ikke alt er lige hensigtsmæssigt. Winsløw fremhæver ([63] p. 3) f.eks., at det er uheldigt alene at lære at forstå og producere matematiske modeller, da dette trækker kraftigt på modellens tre andre felter. Jeg vil i afsnit 3.6 anvende denne model til at belyse den didaktiske platform, jeg udarbejder.

[12]Når jeg her tillader mig at omtale kompetencebeskrivelserne af samtlige naturfag under et, er det fordi de, så vidt jeg kan se, tager udgangspunkt i Mogens Niss' arbejde (se f.eks. [7]), både ved, i første omgang, at publicere resultater uden argumenter og i valget af kompetencerne.

En vigtig pointe fra Winsløw er, at viden og kompetencer er vævet ind i hinanden og kun manifesterer sig som performance i *forbindelse* med et bestemt stofområde. En kompetencebeskrivelse af matematik kan derfor ikke give et dækkende billede af matematisk aktivitet.

Kapitel 3

Udvikling af didaktisk platform

Jeg vil i det følgende kapitel beskrive udviklingen af den didaktiske platform[1], jeg har brugt ved afholdelsen af det kursus, der ligger til grund for denne rapport. Generelt er udgangspunktet for platformen et ønske om at øge kursistens matematiske viden, f.eks. ved at give kendskab til et nyt stofområde, samt udvikle kursistens matematiske kompetencer.

Platformen søger inspiration i ACE-cyklen[2] og Moores metode[3], der beskrives i afsnittene 3.2 og 3.3.

Platformen forsøger at tage hensyn til de didaktiske anbefalinger der kan udledes af Sfard og Dubinskys teorier om begrebsdannelse. Derudover skal platformen respektere de overvejelser, der er gjort i afsnit 2.6. Det sikres ved dels at belyse platformen i kompetencetermer og dels ved at søge et sundt samspil imellem indhold og performance. Desuden vil platformen gøre alsidigt brug af IT (se afsnit 3.4).

3.1 Didaktiske anbefalinger fra Sfard og Dubinsky

I specialet [29] p. 36 fremhæves to didaktiske principper som Anna Sfard udleder af teorien beskrevet i 2.3. De to principper er:

- Nye begreber bør ikke introduceres i strukturelle termer.
- Et strukturelt begreb bør ikke forudsættes, hvis eleven kan klare sig uden.

[1]En didaktisk platform er en metode til at planlægge og gennemføre undervisning efter.

[2]ACE-cyklen er en konstruktivistisk platform, der anvendes af RUMEC og Dubinsky [6] i forbindelse med forskningsrammen beskrevet i 1.1. ACE-cyklen gør i vid udstrækning brug af gruppelæring og designede programmeringsopgaver.

[3]Moores metode er udviklet af topologen R. L. Moore og beskrevet af Halmos i [31]. Metoden gør brug af selvstændig teoribygning i konkurrence med medstuderende.

Det første forbud kommer af Sfards models hierarkiske struktur (se figur 2.2) der siger, at den operationelle forståelse altid går forud for den strukturelle. Det andet forbud kommer af *reificeringens onde cirkel.*

Dubinsky beskriver i artiklen [6] matematisk viden med sætningen:

> "An individuals mathematical knowlege is her or his tendency to respond to percieved mathematical problem situations by reflecting on problem and their solutions in a social context and by constructing or reconstructing mathematical actions, processes and objects and organizing these in scemas to use in dealing with the situations." [6] p. 7.

Bemærk at Dubinskys definition af viden kan opfattes som to-dimensionel. For det første kan man øge sin tendens til refleksion og konstruktion i social kontekst, og for det andet kan man øge det problemfelt, man opfører sig reflekteret indenfor, dvs. øge mængden af matematisk indhold man har kendskab til.

Jeg skal altså sikre mig, at platformen gør det muligt for individet, at reflektere over matematiske problemstillinger i en social kontekst, samt at platformen giver hver enkelt deltager mulighed for at konstruere og rekonstruere matematiske handlinger, processer og objekter og organisere dem i skemaer. Kort skriver jeg, at *platformen skal virke befordrende for den matematiske begrebsdannelse.* Derudover skal jeg sikre mig, at platformen giver kursusdeltagerne kendskab til nyt matematisk indhold.

Med udgangspunkt i denne definition af viden og de deraf afledte didaktiske anbefalinger, har Dubinsky udviklet ACE-cyklen der beskrives nedenfor.

3.2 ACE-cyklen

Dubinsky har (f.eks. i [6] og [21]) udviklet en didaktisk platform beregnet til matematikundervisning på collegeniveau svarende til den sidste del af gymnasiet, samt de første par år på universitetet i Danmark. Platformen gør brug af *gruppelæring* (eng. Cooperative learning), og af at kursisterne udfører programmeringsopgaver, specielt designet til at styrke den matematiske begrebsdannelse (se afsnit 3.4). ACE står for Activities, Class og Exercices, der er platformens komponenter. Nedenfor beskrives disse komponenter en efter en.

Activities eller aktiviteter foregår i et computerlokale. Der arbejdes i grupper med programmeringsopgaver hvis mål er at hjælpe studerende med at danne bestemte mentale konstruktioner som beskrevet i afsnit 3.4. Aktiviteterne løses i timerne, men færdiggøres hjemme eller i computerlokalet på egen hånd.

Class står for klasseaktiviteter. Grupperne arbejder i klasseværelset med papir og blyant opgaver, der tager udgangspunkt i computeraktiviteterne. Der afholdes diskussioner med det formål at få eleverne til at reflektere over de beregninger, der er foretaget.

Exercices er klassiske opgaver, der laves som hjemmearbejde i grupper.

I ACE-cyklen er læringen tilrettelagt efter en spiralerende model, der betegnes *holistic spray* [6] p. 13. Modellen kan ses som en modpol til den lineære fremstilling, der er karakteristisk for klassiske lærebøger og forelæsninger. Formålet er at anerkende, at læring foregår på en ikke-lineær måde, og at individet undervejs opbygger partielle forståelser. Ved at returnere til de samme begreber og resultater igen og igen er håbet, at disse partielle forståelser med tiden bliver hele og sunde forståelser af de indgående begreber.

Metoden går ud på at skubbe kursisterne ud i omgivelser, der udfordrer dem, og bevidst bringer dem ud af *ligevægt* (se afsnit 2.1). Så stor en del som muligt af kursets pensum skal være tilstede i disse situationer. Kursisterne vil ikke alle lære det samme, men håbet er, at alle vil lære noget.

ACE-cyklen er alene målrettet imod begrebsdannelse. Dubinsky forklarer i artiklen [24], at han mener at konstruktion af mentale objekter bør indtage en central position i forbindelse med matematik på collegeniveau og argumenterer for, at egentlig teoribygning båret af definitioner, sætninger og beviser hører hjemme senere i uddannelsesforløbet.

På det niveau, som den undervisning der ligger til grund for denne rapport er på, mener jeg, at teoridannelse bør indgå. Jeg vil derfor kort beskrive en metode, der er målrettet imod *aktiv* teoridannelse[4].

3.3 Moores metode

I dette afsnit beskrives *Moores metode*. Metoden er er udviklet af topologen R. L. Moore og beskrevet af Halmos i [31] p. 255. Metodens hovedide er, at kursisterne selv, på egen hånd, skal opdage kursets resultater og beviser.

Halmos beskriver Moores undervisning på baggrund af flere besøg hos Moore, hvor de diskuterede denne metode, og Halmos sad med ved konkret undervisning. Et kort resume af beskrivelsen følger her.

Inden undervisningen startede interviewede Moore samtlige tilmeldte kursister om deres matematiske baggrund. Hvis de allerede kendte til kursets indhold, var de *ikke* velkomne, alle måtte starte på samme niveau. Derudover rygtedes det, at Moore ved disse interview bad kursisterne sværge at de, mens kurset stod på, *ikke* ville læse om emnet. For en sikkerheds skyld fjernede Moore samtlige relevante bøger fra biblioteket, og kurset kunne begynde:

> At the first meeting of the class Moore would define the basic terms an either challenge the class to discover the relations among them, or, depending on the subject, the level, and the students, explicitly state a theorem or two or three. Class dismissed. Next meeting: Mr. Smith, please prove Theorem 1. Oh you can't? Very well, Mr. Jones you? No? Mr. Robinson? No? Well, lets skip Theorem 1 and come back to it later. How about Theorem 2, Mr. Smith? Someone almost always could do something. If not, class dismissed. [31] p. 257.

[4]Betegnelsen aktiv teoridannelse dækker over, at et matematisk fagområde organiseres som definitioner, (aksiomer,) sætninger og beviser. Det, at teoridannelsen er *aktiv*, består i, at dele af denne organisering foretages af kursisterne.

Som det fremgår af citatet ovenfor er metodens grundide at organisere undervisningen omkring et mere eller mindre komplet fagligt skelet bestående af definitioner og resultater, men *uden* beviser. Kursisten må så på egen hånd udfylde resten. Den studerende bruger *alene* sit hoved og hverken medstuderende eller bøger i dette arbejde.

Det, jeg tager med fra Moores metode, er at organisere stoffet omkring et fagligt skelet og lade kursisterne om at udfylde skelettet ved blandt andet at gennemføre beviserne. Jeg vil til forskel fra Moore opfordre til samarbejde og anvendelse af litteratur.

3.4 Anvendelse af IT

Der er forskellige måder, hvorpå computere kan anvendes i forbindelse med matematikundervisning, og jeg vil i det følgende afsnit beskrive de væsentligste.

Man kan anvende computeren på samme måde som forskningsmatematikerne gør det, nemlig som hjælpemiddel og laboratorium (se [25] p. 231). Computeren kan udføre store beregninger og af den vej checke resultater eller beregne resultater, der er en nødvendig del af et rigoristisk bevis som i løsningen af 4-farve problemet[5]. Beregningsevnen kan ligesåvel anvendes i eksperimentel øjemed til at fremsætte påstande og udforske bestemte objekter. Dette kan ske dels ved at se efter systematik i et stort antal gennemregnede eksempler, som det er gjort i artiklen [16][6] og dels igennem visualisering af centrale problemstillinger. Holomorf dynamik er et eksempel på et fagområde, der har været helt afhængig af computervisualisering til at støtte intuitionen[7].

Udover at søge inspiration i forskningsmatematikken kan man også gennemføre specielt designede aktiviteter med det mål at udvikle den studerendes matematiske evner. En mulighed er at designe specielle programmer, der gør det let at udføre undersøgende aktiviteter som beskrevet ovenfor (se f.eks. [59]). En anden mulighed er at anvende programmeringsopgaver til at styrke begrebsdannelsen. Undervisningen tilrettelægges så kursisten programmerer de objekter, hvis indkapsling er mål for undervisningen. Ideen er, at konstruktionen på com-

[5] Påstanden om at ethvert landkort bestående af sammenhængende lande kan farvelægges med fire farver på en måde så ingen lande, der grænser op til hinanden, har samme farve, blev først vist af Apel , Haken & Koch i 1977 [2] og [3]. Beviset bestod i at reducere påstanden til et stort antal specialtilfælde, der blev regnet igennem på computer. Der findes simple beviser for, at tre farver er utilstrækkeligt, og at fem farver er nok, men der er endnu ikke fundet et bevis, der ikke anvender computere for påstanden. Se [15] for en grundig og let tilgængelig behandling.

[6] I artiklen [16] undersøges det om knudeinvarianten *Jonespolynomiet* kan skelne den simpleste knude, *uknuden*, fra enhver anden knude. Forfatterne har anvendt en computer til at beregne Jonespolynomiet for samtlige knuder med *krydstal* (en knudeinvariant i form af et ikke-negativt helt tal) mindre end 14. De har vist, at Jonespolynomiet faktisk skelner uknuden fra enhver anden knude med krydstal mindre end 14.

[7] Som eksempel herpå kan nævnes artiklen [39], der giver et bevis for at *Mandelbrotmængden* (se afsnit B.6) indeholder uendeligt mange kopier af Juliamængder. Fænomenet blev observeret ved undersøgende arbejde med computervisualisering, hvor der blev zoomet i Mandelbrotmængden og er altså senere bevist.

puter er befordrende for den mentale konstruktion. Dubinsky beskriver, f.eks. i artiklerne [6], [21] og [23], positive erfaringer med denne fremgangsmåde.

Denne platform anvender IT på flere måder. Programmering anvendes både som eksperiment og med det formål at styrke begrebsdannelsen. For eksempel skal kursisterne lave et program, der producerer banen for et polynomium og eksperimentere med forskelligt input (aktivitet B.2.1). Derudover skal kursisterne lave et program, der viser den udfyldte Juliamængde (aktivitet B.3.24). I det hele taget anvendes visualisering på flere måder og med forskellige mål. Eksempelvis arbejdes med grafisk analyse (se afsnit B.2.2) for at hjælpe den strukturelle forståelse, og computervisualisering anvendes til at få ideer til et bevis (se aktivitet B.5.6). Endelig anvendes programmet `fractint` til at lave visuelle eksperimenter (se aktivitet B.7.8). Computerens evne som resultatchecker anvendes ikke målrettet.

3.5 Platformen

3.5.1 Målsætning

Ønsket om at øge kursistens matematiske viden, f.eks. ved at give kendskab til et nyt stofområde, samt at udvikle kursistens matematiske kompetencer, kan nu præciseres i følgende mål.

Kurset skal:

- Øge kursistens matematiske viden, som denne er defineret af Dubinsky i afsnit 3.1 ved at gøre det muligt for kursisten at reflektere over matematiske problemstillinger i en social kontekst samt at konstruere og rekonstruere matematiske handlinger, processer og objekter og organisere dem i skemaer.
- Udvikle kursistens matematiske kompetencer, tildels gennem træning.
- Sikre at kursisten deltager i aktiv teoridannelse og således bliver istand til at organisere kursets indhold i definitioner, sætninger og beviser.

Jeg har altså valgt en opdeling af min målsætning i *viden* og *kompetencer*, på trods af at disse begreber, jf. afsnit 2.6.2 er flettet ind i hinanden. Her følger en kort redegørelse for, hvordan Mogens Niss' otte kompetencer (se afsnit 2.6.1) hænger sammen med Dubinskys definition af viden (se afsnit 3.1) samt begrebet aktiv teoridannelse (se fodnote på side 30).

Tankegangskompetencen og *kommunikationskompetencen* er i funktion, når vi reflekterer i en social kontekst. Derudover har Anna Sfard i artiklen [54] gjort rede for, at brugen af symboler også er væsentlig i begrebsdannelsen, hvorfor *symbol- og formalismekompetencen* er væsentlig for vidensbegrebet. Forskellige repræsentationer har også betydning (jf. afsnit 2.3), hvilket også knytter vidensbegrebet til *repræsentationskompetencen*. Ideen om *aktiv* teoridannelse, som beskrevet i afsnit 3.3, trækker på *tankegangs-*, *ræsonnements-*, *kommunikations-*

og tildels *problembehandlingskompetencen*. Dette efterlader *modellerings-* og *hjælpemiddelskompetencen*, som ikke strengt nødvendige for resten af målsætningen. Jeg vil gøre flittigt brug af IT (se afsnit 3.4), mens modelleringskompetencen ikke vil blive trænet målrettet.

3.5.2 Rammerne

Kurset vil strække sig over en uge, dvs. fem dage, på fuld tid. Kurset planlægges efter en deltagelse på mellem fem og ti kursister. Vi vil få tildelt et almindeligt klasselokale og have adgang til PC-lokale, samt de mest almindelige pædagogiske værktøjer (tavle, OH, video og lignende).

Det mest interessante ved disse rammer er, at der er tale om fem *hele* dage i forlængelse af hinanden. Der er derfor ikke mulighed for, at hverken lærer eller kursister kan forberede sig nævneværdigt fra dag til dag. Platformen må tage hensyn til dette f.eks. ved at muliggøre aktiviteter af en type, der kan forberedes lang tid i forvejen.

3.5.3 Platformen

Ønsket om at hver enkelt kursusdeltager skal reflektere over matematiske problemstillinger i en social kontekst, samt det faktum at hverken studerende eller lærer kan forberede sig fra dag til dag, har fået mig til at vælge en *opgave- og aktivitetsbaseret* undervisning gennemført delvist som gruppelæring. Hver dag vil gruppearbejdet blive efterfulgt af indskrivningsarbejde, hvor deltagerne hver især laver en skriftlig afrapportering af dagens arbejde. Ved arbejdsdagens afslutning afleverer den enkelte deltager sin indskrivning, enten som fil eller på papir. De elektroniske afleveringer lægges på en webside og de håndskrevne i en mappe.

På den måde kan hele forløbet planlægges på forhånd, og lærerens rolle bliver at hjælpe til, hvis nogen kører fast, samt finde relevant litteratur hvis noget skulle undersøges nærmere og selvfølgelig afhjælpe eventuelle fejl i notematerialet.

Gruppelæringen giver kursusdeltagerne mulighed for at reflektere over opgaverne og aktiviteterne i en social kontekst.

Begrebsdannelsen respekteres ved at planlægge undervisningen efter en spekulativ genetisk dekomponering af kursets væsentlige begreber (se bilag A). Således introduceres nye begreber, hvis muligt, først som handlinger og processer, f.eks. ved at gennemregne eksempler og konstruere processer på computer.

Den aktive teoridannelse dyrkes ved at organisere undervisningen omkring et fagligt skelet bestående af sætninger og definitioner som i Moores metode. En del af formålet med kurset er at vise disse sætninger. Dette skelet udbygges med andre aktiviteter, gennemregning af eksempler, udførelse af simple handlinger og forskellige computeraktiviteter både af eksperimenterende og konstruerende karakter.

Den spiralerende grundide fra ACE-cyklen er selvsagt svær at forene med det korte kursusforløb og ideen om at organisere stoffet omkring et fagligt skelet. Det forsøges dog på flere måder. Stoffet gennemarbejdes først i grupper og derefter selvstændigt. Kursets mest centrale begreber og pointer gennemarbejdes to gange, først i sammenhæng med reelle dynamiske systemer[8] og derefter igen i det komplekse tilfælde. Derudover indeholder kurset *opsamlende aktiviteter*[9], og dele af kurset[10] er organiseret sådan, at grupperne først gennemfører hovedideerne i et bevis som computereksperimenter i et konkret tilfælde og derefter gennemarbejder et generelt bevis i hånden.

3.6 Belysning af platformen

I dette afsnit belyses platformen vha. Niss' kompetencebegreber (se afsnit 2.6.1), og sammenhængen mellem indhold og performance diskuteres med udgangspunkt i Winsløws model (se afsnit 2.6.2).

Kompetencerne dyrkes på følgende måde

Tankegangskompetencen bliver tildels trænet ved gruppearbejdet. Kurset indeholder nogle få opgaver, der målrettet træner tankegangskompetencen. F.eks. skal man i aktivitet B.3.17 afsøge *rækkevidden* af Montels sætning B.3.16 og i opgave B.4.8 skal man *karakterisere* Juliamængden.

Ræsonnementskompetencen Denne platform træner ræsonnement meget. For det første sikrer ideen om aktiv teoridannelse, at kursisterne tvinges til aktivt at gennemføre samtlige kursets argumenter. Der kræves indskrivning og web-publicering af samtlige opgaver. Således skal kursisterne gennemføre argumenterne to gange.

Problembehandlingskompetencen udgør til dels en svaghed ved platformen eller et forhold, man bør tage i betragtning. De teoriudviklende opgaver er, for at opnå passende drive, udstyret med vink i en grad så det kan diskuteres, i hvor høj grad disse opgaver træner problembehandlingkompetencen.

Repræsentationskompetencen er meget kontekstafhængig, og det er derfor ikke muligt for mig at give nogle generelle anvisninger for, hvordan platformen skal sikre at repræsentationskompetencen trænes. I det konkrete notemateriale der er udviklet her (bilag B), trænes repræsentationskompetencen f.eks. ved at se på grafisk analyse (afsnit B.2.2) og ved at veksle mellem symbolsk og grafisk tilgang til Juliamængden og konstruere den grafiske udfra den symbolske (afsnit B.3.5). Desuden vises der i hhv. opgave B.3.20 og afsnit B.4 to alternative karakteristikker af Juliamængen.

[8] Afsnit B.2 gennemgår ideerne *bane*, *fikspunkt* og *egenværdi* i forbindelse med reele dynamiske systemer.

[9] Opgave B.4.8, er et eksempel på en opsamlende aktivitet.

[10] Afsnit B.5 er organiseret så beviset for hovedsætningen først illustreres på computer, og derefter gennemføres.

Symbol- og formalismekompetencen indgår i de fleste typer af matematisk aktivitet (se [54]). I denne platform trænes symbol- og formalismekompetencen målrettet ved at kræve indskrivning og offentliggørelse af samtlige løsninger. Det, at kurset har en gruppelærings- og en indskrivningsfase, mener jeg vil virke befordrende for oversættelsen mellem talt sprog og præcis formalisme.

Modelleringskompetencen Denne kompetence dyrkes ikke umiddelbart af platformen, men særlige opgaver i modellering kan naturligvis medtages. Det er ikke sket i nærværende kursus. Jeg mener ikke, at et kursus der på en uge skal introducere et nyt fagområde, er det rigtige sted at dyrke modellering.

Kommunikationskompetencen dyrkes i høj grad af denne platform. Dels anvendes gruppelæring, der tvinger kursisterne til at deltage i diskursiv aktivitet, typisk mundtligt, med skriftlige elementer i form af symboler og simple tekststrenge. Derudover anvendes offentliggørelse af kursisternes arbejde som et rent skriftligt kommunikationselement. Kursisterne opfordredes til at se på, hvordan de andre grupper har løst dagens aktiviteter.

Derudover anvendes litteraturen på den måde, at de fleste af bøgerne, der indgår i litteraturlisten til kurset, vil være tilstede i klasselokalet og blive brugt.

Hjælpemiddelskompetencen dyrkes af platformen ved den meget alsidige brug at IT (se afsnit 3.4).

Jeg mener at ideen om at basere kurset på at løse opgaver og gennemføre aktiviteter, tildels med det mål at udfylde et ufærdigt fagligt skelet, giver en god balance mellem indhold og performance. Kravet om indskrivning og webpublicering er med til at sikre at performancedelen respekteres, og det faglige skelet sikrer indholdet.

Platformen er orienteret imod det, der i Winsløws model betegnes som den *interne* del af matematisk aktivitet. Det finder jeg naturligt, dels fordi kurset er et kort kursus, der skal introducere et nyt fagområde, og dels fordi kurset er en del af en universitetsuddannelse i matematik.

Kapitel 4

Begrebet normal familie

Undersøgelsens overordnede formål er at checke, hvorvidt de genetiske dekomponeringer, der er foretaget i bilag A, stemmer overens med den læring kursisterne oplever. Det er ikke muligt at checke alle dekomponeringerne, hvorfor undersøgelsen er koncentreret om to spørgsmål. I dette kapitel undersøges kursusdeltagernes forståelse af begrebet normal familie, specielt familien $\{P^k\}$. Jeg vil undersøge, hvorvidt den forståelse, kursisterne udviser, stemmer overens med den genetiske dekomponering, der er angivet i afsnit 4.2.

I kapitel 5 vil jeg undersøge det andet spørgsmål, der går på, hvorvidt afgrænsede afvigelser i begrebskort kan antyde interessante ændringer i respondentens begrebsbillede, samt hvilke ændringer der i bekræftende fald antydes. Tanken er, at sådanne antydninger senere kan anvendes til at finde frem til begreber, som det kunne være interessant at gennemføre en grundig undersøgelse af svarende til den, jeg i nærværende kapitel gennemfører for begrebet normal familie. Derudover undersøges det, hvorvidt mængden af ændringer af disse begrebskort er korreleret med performance.

Undersøgelsen af begrebet normal familie sker med udgangspunkt i den genetiske dekomponering gennemført i afsnit 4.2 og består til dels af en *test* med fire opgaver (bilag D). Med udgangspunkt i kursisternes besvarelse af testen har jeg udvalgt tre *respondenter*. Med hver af disse respondenter har jeg gennemført et interview ved hjælp af *spørgeguiden* i bilag G. Interviewene kredser om respondenternes løsning af opgaverne D.0.5 og D.0.7 i testen (bilag D). Metodikken i forbindelse med udvælgelse af respondenter, udarbejdning af spørgeguide, afholdelse og analyse af interview er beskrevet i afsnit 4.1.

4.1 Metode

Artiklen [6] giver retningslinier for forberedelse, gennemførelse og analyse af interview, afholdt på baggrund af en skriftlig prøve. I afsnit 4.1.1 vil jeg kort gøre rede for disse retningslinier, og i afsnit 4.1.2 vil jeg, med udgangspunkt i disse retningslinier, udvikle en konkret metode.

4.1.1 Dubinskys retningslinier

Dubinsky og RUMEC [6] angiver en række retningslinier for afholdelse af kvalitative forskningsinterview på baggrund af en skriftlig prøve. Dubinskys mål med at afholde disse interview er at revidere en foreslået genetisk dekomponering (se afsnit 2.4).

Der afholdes en prøve for hele holdet, og på baggrund af besvarelserne designes en *spørgeguide*. Guiden kan indeholde spørgsmål, hvor respondenten bedes gøre rede for, eller uddybe, hvad han har skrevet i sin skriftlige besvarelse. Spørgeguiden testes ved at gennemføre pilotinterview, inden de egentlige interview gennemføres.

Udvælgelsen af respondenter foregår på baggrund af den skriftlige prøve. Dubinskys ide er, at det ikke er nødvendigt at interviewe alle kursister, der giver en bestemt type svar. Han foreslår, at man forsøger at nå hele spektret af korrekthed og så vidt muligt vælger respondenter, der giver indtryk af at være *i* en læreproces fremfor respondenter, der tydeligvis mestrer det begreb der undersøges, eller tydeligvis er gået glip af pointen.

Artiklen [6] giver nogle helt klare retningslinier for, hvordan interviewdata skal behandles. Interviewet optages på bånd, og undervejs skal interviewer og respondent have adgang til papir og blyant. Det skriftlige materiale der udarbejdes undervejs skal arkiveres. Båndoptagelsen transskriberes i et to spalteformat, hvor den ene spalte er transskriptionen, og den anden er kommentarer. Derefter laves en indholdsfortegnelse over interviewet, hvor overskrifterne skal svare til indholdet af kommentarspalten, der skal betragtes som en uddybning af indholdsfortegnelsen. Det skal også noteres, hvilke matematiske begreber og ideer der indgår i interviewet og hvor. Det foreslås, at indholdsfortegnelsen og listen med begreber og ideer laves af flere forskere uafhængigt af hinanden (se [6] p. 27).

4.1.2 Metode

I dette afsnit vil jeg gøre rede for, hvordan jeg har anvendt Dubinskys retningslinier til at gennemføre og analysere den del af interviewundersøgelsen, der handler om forståelsen af begrebet normal familie. Jeg har i forbindelse med undersøgelsen af begrebet ladet kursisterne besvare en skriftlig prøve, der forefindes i bilag D. Derudover er deltagerne to gange i løbet af kurset blevet bedt om at lave *begrebskort* over centrale begreber i kurset. Der er derefter gennemført en interviewundersøgelse, der uddyber *både* prøven og begrebskortene.

På baggrund af besvarelserne af den skriftlige prøve har jeg lavet den første halvdel af spørgeguiden (bilag G). Spørgsmålene i guiden kredser om to af de fire opgaver i prøven, nemlig opgave D.0.5 og D.0.7. Inden spørgsmålene stilles, får respondenten sin besvarelse at se. Respondenten skal have god tid til at læse sin besvarelse med henblik på, om han har nogle tilføjelser eller kommentarer til besvarelsen.

Målet med interviewet er at undersøge respondentens begrebsbillede for begrebet normal familie af funktioner. Herunder skal de undersøges om begrebet er bundfældet eller eventuelt indkapslet og om respondentens begrebsbillede indeholder respondentens personlige begrebsdefinition samt hvordan denne ser denne ud.

Udvælgelsen af respondenter er sket ved en afvejning af på den ene side hensynet til bredde i niveau og ønsket om at vælge respondenter *i* en læreproces (se afsnit 4.1.1) og på den anden side at tilgodese undersøgelsen i kapitel 5.

Interviewene optages på bånd og transskriberes. Jeg har ikke anvendt nogen officiel transskriberingsmetode, men søgt en systematisk nedskrivning af hvad der blev sagt samt noteret længere pauser. Afbrydelser er ikke noteret. Transskriptionen gennemlæses, og det noteres, hvad der overordnet sker i interviewet, f.eks i margin. Disse notater struktureres i en indholdsfortegnelse over interviewet. Dernæst søges at identificere relevante *temaer* i interviewet. Dette kan være temaer på flere planer, f.eks. matematiske temaer, metaforiske temaer, sociale interaktioner osv. Temaerne struktureres til et resume af interviewet, hvor stikordene i margin udgør overskrifter i resumeet. Jeg har således erstattet tospaltetransskriptionen med et resume, der både indeholder temaer og overskrifter. Til slut fortolkes de udsagn respondenterne kommer med om "normale familier" i lyset af den genetiske dekomponering og den gennemførte analyse.

Min analysemetode bygger på de pragmatiske retningslinier fra artiklen [6], der er opsummeret i afsnit 4.1.1 og på den metode, der angives på side 126-134 i [36], hvor metoden funderes i *psykologisk diskursanalyse*.

Det er naturligvis kritisabelt, at transskriptionen er udført på en ad hoc måde, men jeg har vurderet at målet, at revidere den genetiske dekomponering af begrebet normal familie, kan nås med denne metode. Ville man gennemføre en fuld diskursanalyse og forsøge at beskrive konflikter, magtforhold og lignende i interviewet, ville det være nødvendigt med et større teoretisk apparat, herunder en transskription der følger en egnet metode.

Mængden af empiri er desuden et væsentligt kritikpunkt. For at holde opgaven på en passende størrelse har jeg kun foretaget et pilotinterview og to egentlige interview. Pilotinterviewet gik fint, og der var ikke behov for ændringer i spørgeguiden, hvorfor pilotinterviewet (bilag H) indgår i rapporten på linie med de andre interview.

4.2 A priori analyse

I dette afsnit udarbejder jeg en genetisk dekomponering af begrebet normal familie af funktioner, specielt familien $\{P^k\}$. Det gør jeg ved at analysere definitionen af begrebet normal familie af funktioner. Nedenfor angives denne definition, der er definition B.3.5 i kursusmaterialet bilag B.

Definition 4.2.1
Lad U være et område. En delmængde $\mathcal{F} \subset H(U)$ kaldes en familie *af ho-*

lomorfe funktioner. En sådan familie kaldes normal[1]*, såfremt enhver følge fra $\mathcal{F}$ har en delfølge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, der opfylder en af nedenstående betingelser.*

1. *Der findes $f \in H(U)$ så $f_n \longrightarrow f$ uniformt på samtlige kompakte delmængder af U.*
2. *$\frac{1}{f_n}$ er defineret fra et vist trin, derfra konvergerer $\frac{1}{f_n}$ uniformt imod 0 på samtlige kompakte delmængder af U.*

I tilfældet 1. siger vi, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer normalt på U og i tilfældet 2., at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergerer normalt.

Udsagnet, at $\mathcal{F} \subset H(U)$ er normal, er et udsagn om *enhver* funktionsfølge fra $\mathcal{F}$ og fortæller, at følgen *enten* har en delfølge, der konvergerer normalt imod en funktion f på samtlige kompakte delmængder af U *eller* har en delfølge, der divergerer normalt på samtlige kompakte delmængder af U. For at forstå et udsagn af denne type er det nødvendigt, at funktionsfølgebegrebet er indkapslet, da det ellers ikke er muligt at betragte *samtlige* funktionsfølger, der opfylder en bestemt betingelse. Normalitetsbegrebet bygger således på begrebet *funktionsfølge* og på egenskaben, for en funktionsfølge, at konvergere *uniformt* på kompakte delmængder af definitionsmængden for funktionerne fra følgen. Begrebet funktionsfølge bygger direkte på begrebet *komplekse funktioner*, som jeg antager er indkapslet.

Jeg vil betegne funktionsfølgebegrebet som bundfældet, hvis kursisten er istand til at arbejde selvstændigt med begrebet, f.eks. ved at undersøge forskellige typer af konvergens og finde grænsefunktioner. Funktionsfølgebegrebet betegnes som indkapslet, såfremt kursisten er istand til at betragte *alle* funktionsfølger af en bestemt type og kan lade en funktionsfølge være input for en proces[2].

Forståelse af begrebet normal familie kræver en viden om, hvad det vil sige, at en funktionsfølge er uniformt konvergent. Jeg vil anvende terminologien, at begrebet uniform konvergens er bundfældet, såfremt kursisten har kendskab til egenskaben og er i stand til at checke egenskaben for en forelagt følge, samt at *forestille* sig egenskaben checket for alle følger af en bestemt type. Dette karakteriserer det kendskab til uniform konvergens, der er nødvendigt for at opnå en bundfældelse af begrebet normal familie af funktioner.

Handlingen, at afgøre om en familie $\mathcal{F}$ af holomorfe funktioner er normal, består i, givet en vilkårlig følge af funktioner fra $\mathcal{F}$, at afgøre, hvorvidt denne har en delfølge, der konvergerer/divergerer normalt. Normalitet afgøres således ved en koordinering af funktionsfølgebegrebet med kompakte mængder og begrebet uniform konvergens. Da handlingen består i at afgøre dette for samtlige følger fra $\mathcal{F}$, kræver det principielt en indkapsling af funktionsfølgebegrebet.

[1]Strengt taget har vi defineret, hvad det vil sige, at en familie af holomorfe funktioner er normal som familie af funktioner fra U ind i *Riemann-sfæren* (se evt. [64]). Riemann-sfæren er 1-punktskompaktificeringen, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, af den komplekse plan, udstyret med metrikken fra kuglen S^2, der er homeomorf med $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ved stereografisk projektion.

[2]I praksis har jeg ikke kunnet komme på en velkendt proces, der tager en funktionsfølge som input og ikke kan forklares ved en koordinering af funktionsfølge begrebet og et andet begreb i stil med at koordinere en operator T med en funktionsfølge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og opnå følgen $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bundfældelse af begrebet normal familie vil jeg beskrive ved, at kursisten, forelagt en familie af funktioner, er i stand til på egen hånd at afgøre, om denne er normal. Derudover skal individet kunne forestille sig dette afgjort abstrakt.

Jeg tror, det vanskelige i normalitetsbegrebet ligger i, at det for det første er nødvendigt at have funktionsfølge begrebet indkapslet og for det andet, at definitionen simpelthen er kompliceret, idet kravet er, at *enhver* funktionsfølge fra $\mathcal{F}$ har en delfølge, der opfylder en af to mulige betingelser. Den genetiske dekomponering af normal familie af holomorfe funktioner kan opsumeres på følgende måde:

1. *Bundfældelse* af begreberne funktionsfølge og uniform konvergens.
2. *Indkapsling* af funktionsfølge begrebet.
3. Udfoldning af funktionsfølge samt koordinering med uniform konvergens, for at danne *handlingen*, at afgøre hvorvidt en forelagt familie af holomorfe funktioner er normal.
4. *Bundfældelse* af normalitetsbegrebet.

Reificeringens onde cirkel (se afsnit 2.3) fortæller os, at punkt 2 og punkt 4 går hånd i hånd.

4.3 A posteriori analyse

Målet med dette afsnit er at revidere den genetiske dekomponering, der er beskrevet i afsnit 4.2. Dette opnås gennem en interviewundersøgelse som beskrevet i afsnit 4.1.2. Målet med undersøgelsen er at studere respondenternes begrebsbilleder af begrebet normal familie af funktioner. I interviewanalysen indgår en tilstrækkelig, men ikke nødvendig betingelse for normalitet, der beskrives i afsnit 4.3.1. Væsentlige pointer fra interviewene beskrives i afsnittene 4.3.2, 4.3.3 og 4.3.4. I afsnit 4.3.5 angives en dekomponering af et uheldigt begrebsbillede af normal familie af funktioner, som jeg mener, at interviewene har sandsynliggjort, og i afsnit 4.3.6 angives en revideret genetisk dekomponering, der forsøger at sikre, at denne uheldige opfattelse ikke konstrueres.

4.3.1 En tilstrækkelig betingelse for normalitet

Jeg mener at kunne påvise, at respondenternes begrebsbillede er farvet af en tilstrækkelig, men ikke nødvendig, betingelse for normalitet, der gælder for tællelige familier. Flere af respondenterne blander denne betingelse sammen med definitionen, og ad den vej mener jeg, at de opnår et normalitetsbegreb, der ikke er helt korrekt, men hvis genetiske dekomponering er lettere at følge, end den jeg angav i a priori analysen. Den omtalte betingelse indgik ikke som en selvstændig sætning eller opgave i pensumet for kurset, hvilket bærer en del af ansvaret for problemerne.

Den tilstrækkelige betingelse for normalitet af en tællelig familie $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H(U)$, er at *følgen* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer eller divergerer normalt (det vil sige uniformt på samtlige kompakte delmængder af U).

Argumentet for at dette sikrer normalitet af familien $\mathcal{F}$ er, at enhver følge fra $\mathcal{F}$, der ikke har en konstant delfølge, må have en delfølge med voksende indeks[3]. En konstant delfølge er uniformt konvergent, og en delfølge med voksende indeks er uniformt konvergent henholdsvis divergent, når $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er det.

Som sagt indgik denne betingelse ikke i notematerialet, men mange af de opgaver, der blev regnet i kurset, gik ud på at vise normalitet af en familie ved hjælp af argumenter, der minder meget om ovenstående.

4.3.2 Interview med Peter[4]

Følgende interview af Peter tager udgangspunkt i Peters besvarelse af opgave D.0.5, hvor Peter viser at $f_k \longrightarrow 0$ uniformt på enhver kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Derefter noterer han, at alle følger fra $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ derfor vil gå uniformt imod 0 eller være konstante fra et vist trin. Det virker som om, at Peters begrebsbillede for begrebet tællelig normal familie ikke arbejder dynamisk sammen med begrebsdefinitionen af normal familie (se afsnit 2.2), samt at begrebsbilledet kan tolkes i lyset af ovenstående betingelse.

Peter bliver bedt om at gøre rede for, hvad han bør checke for at se, at en tællelig familie af funktioner er normal:

> Peter: ja, men det er jo at enten så skal den konvergere uniformt imod en eller anden bestemt funktion på alle kompakte delmængder, eller også så skal 1 over funktionerne gå uniformt imod 0.

personlig begrebsdefinition

Peter taler om, at *familien* skal konvergere eller divergere uniformt. Det virker som om han her ikke tænker på definitionen af normal familie, men på den tilstrækkelige betingelse i afsnit 4.3.1. Gået på klingen kan Peter godt den *officielle* definition, og da han senere bliver han bedt om at opsummere, hvad definitionen af en normal familie er, svarer han:

> Interviewer: Ok, så hvis du præcist opsummerer kravet for at en eller anden familie af funktioner er normal, så er det?
>
> Peter: Så er det at enhver følge fra familien har en delfølge som opfylder et af de her to krav om uniform konvergens på kompakte delmængder.
>
> Interviewer: Yes.
>
> Peter: Men den er meget tung det er jo også derfor det bliver svært at besvare opgaven[5] præcist ikk'?
>
> Interviewer: Hvad er det præcist du har checket der?
>
> Peter: Faktisk har jeg bare set på hele familien og betragtet den som en følge ikk', i første omgang, og så påstår jeg bare sådan uden videre at når

erkendelse af problem

[3]Dette skyldes essentielt Dirichlets skuffeprincip. Hvis ingen afsnitsfølge indeholder det samme indeks uendeligt mange gange, vil enhver afsnitsfølge indeholde vilkårligt store indeks,

> jeg så har at den konvergerer uniformt så hvis jeg så tager en følge ud fra her, tager en delfølge, så må den også opfylde det samme.

Peter siger altså her, at den korrekte definition er meget tung og erkender, at det han har gjort, ikke er at tjekke den korrekte definition. Peter giver udtryk for at have lavet en *forenkling* af problematikken ved at have "set på hele familien og betragtet den som en følge". Desværre kommer interviewet aldrig til bunds i, hvorfor det er korrekt at tjekke normalitet af familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ved at se på uniform konvergens af følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Det nærmeste interviewet kommer på dette er, at Peter siger at han *"bare sådan uden videre"* påstår at dette sikrer normalitet. Det tyder på, at Peter på dette tidspunkt, hvor han har adgang til sin besvarelse, ikke er klar over, hvorfor det han gør er i orden.

Det virker som om, Peters begrebsbillede for begrebet normal familie *ikke* arbejder dynamisk sammen med Peters begrebsdefinition (se afsnit 2.2). Han siger selv, at definitionen er tung og vanskelig at arbejde med og har svært ved at præcisere, hvordan den betingelse, han har checket, hænger sammen med definition 4.2.1. Jeg tror, at Peters begrebsbillede er farvet af betingelsen i afsnit 4.3.1, og at Peter tænker på denne betingelse som et alternativ til definitionen 4.2.1. Der ligger en potentiel fare i dette, fordi betingelsen i afsnit 4.3.1 kun er en tilstrækkelig betingelse og således ikke kan fungere som et godt alternativ til definitionen 4.2.1.

4.3.3 Interview med Lars[6]

Faren for sammenblanding af betingelsen i afsnit 4.3.1 og definition 4.2.1, der blev observeret i interviewet med Peter (i afsnit 4.3.2), underbygges tildels af interviewet med Lars. Lars besvarer opgave D.0.5 ved at se på en omegn U af z_0 og vise at $f_k \longrightarrow 0$ uniformt på U (hvis U er indeholdt i en kompakt mængde) ved hjælp af vurderingen $f_k(z) \leq \frac{R}{k}$, hvor $R < \{|z||z \in U\}$.

Her taler vi om Lars besvarelse af opgave D.0.5:

> Interviewer: Ok, du viser at den f_k udgør en normal familie.
>
> Lars: Ja
>
> Interviewer: Hvad er det præcist man skal checke, for at checke det?
>
> Lars: Man skal vise at enhver delfølge har en delfølge der enten konvergerer eller divergerer normalt.

Personlig begrebsdefinition

Lars angiver en begrebsdefinition, der er meget tæt på den officielle (definition 4.2.1), men læg mærke til, at Lars taler om enhver *del*følges mulige delfølger. Det viser sig, at dette ikke er en fortalelse, men faktisk afslører noget om Lars

hvorfor følgen har en delfølge med voksende indeks.

[4]Navnet ændret.

[5]Opgave D.0.5.

[6]Navnet ændret.

begrebsbillede for begrebet normal familie af funktioner. Adspurgt om hvorvidt hans besvarelse checker normalitet af den konkrete familie, svarer han:

> Lars: Jeg viser at den i sig selv divergerer[7] normalt. — implementering
>
> ...
>
> Interviewer: Ok, men hvad er forskellen på det du har vist der og så det du sagde du ligesom skulle checke?
>
> Lars: Det jeg har vist der er lidt stærkere, jeg har ikke eksplicit skrevet at man så deraf kan udlede at enhver delfølge har en delfølge, som der vil være den selv, og der også må konvergere. Fordi at når hele følgen konvergerer så gør enhver delfølge også. — præcisering
>
> Interviewer: Jah, nu viser jeg dig lige noget så, og det jeg viser dig er en følge fra den der familie.
>
> *viser følgen:* $f_1, f_2, f_1, f_2, \ldots$
>
> Lars: Ok den, (pause) den konvergerer jo nok ikke. — modeksempel
>
> Interviewer: Den konvergerer ikke nej, men det er en følge fra familien ikke?
>
> Lars: Ja, jeg har tænkt, at man ikke udtog den samme funktion mere en gang.

Da Lars siger, at han checker, at "den i sig selv" konvergerer eller divergerer, tyder det på, at han tænker på familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ som en følge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, hvilket hans opgavebesvarelse underbygger. Ved mærket præcisering forklarer Lars, at han opfatter normaliteten af $\mathcal{F}$ som en simpel konsekvens af det, han har skrevet, hvilket er korrekt. Men forelagt følgen $f_1, f_2, f_1, \ldots$ svarer Lars, at han havde tænkt, at man ikke udtog den samme funktion mere end en gang. Det tyder på, at Lars har tænkt på mulige delfølger af en delfølge af følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. At konvergens af en sådan er sikret ved konvergens af følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er oplagt.

Det er svært at sige, hvordan Lars forstår begrebet normal familie. På den ene side siger han helt korrekt, at normalitet af familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er sikret ved, at følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er uniform konvergent på samtlige kompakte delmængder af $\mathbb{C}$. På den anden side virker det som om, at forståelsen af normalitet er noget i retning af, at alle delfølger af følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er normalt konvergente (hhv. divergente), hvilket er ensbetydende med, at $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er normal konvergent (hhv. divergent). Bemærk at denne forståelse har konsekvensen, at den tilstrækkelige betingelse fra afsnit 4.3.1 kan udgøre et alternativ til definitionen 4.2.1. Fordi den tilstrækkelige betingelse for normalitet jo netop checkes ved at undersøge normal konvergens af følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (se afsnitbetingelse).

4.3.4 Interview med Søren[8]

Den sidste respondent Søren, angiver et strømlinet argument for, at det er nok at se på følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Udgangspunktet for interviewet er Sørens besvarelse

[7] Jeg tror, *divergerer* er en fortalelse, der går lige et par linier med at afklare dette.

[8] Navnet ændret.

af opgave D.0.5, hvor Søren viser, at $f_k \longrightarrow 0$ uniformt på enhver kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Søren noterer, at alle følger fra $\{f_k\}$ enten har en delfølge, der også er en delfølge af (f_k), eller har en konstant delfølge.

> Søren: Ja jeg bemærker det er nok at vise at det den der følge f_n går uniformt imod 0, fordi hvis man tager en eller anden følge i familien f_k så er den enten en delfølge, ja den har enten en konstant delfølge hvis den rammer et punkt uendeligt mange gange, bevis
>
> Interviewer: ok.
>
> Søren: Hvis den ikke har det, jamen så har den så at sige en voksende delfølge, dvs. en delfølge af den der følge der er en delfølge af den der (peger på[9] (H.1)).
>
> Interviewer: ok så den har en følge hvor,
>
> Søren: hvor indekset ligesom vokser.

Ud fra ovenstående citat virker det ikke som om, Søren har problemer med at skelne mellem definitionen og den tilstrækkelige betingelse i afsnit 4.3.1. Han vælger stadig at anvende en fremgangsmåde, hvor han checker normalitet af familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ved at vise, at følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer normalt. Han undgår indkapslingen af funktionsfølgebegrebet, idet han siger, at det er nok at checke betingelsen.

4.3.5 En mulig fejlkonstruktion

Set i lyset af den indledende genetiske dekomponering (afsnit 4.2), og APOS-teori generelt, er det bemærkelsesværdigt, at alle tre respondenter i deres besvarelse undgår at se på *alle følger*, der opfylder en eller anden betingelse. Det kunne tyde på, at funktionsfølgebegrebet ikke er indkapslet. Derudover kan interviewene med både Peter og Lars tolkes i retning af, at deres begrebsbilleder snarere refererer til betingelsen i afsnit 4.3.1 end til definition 4.2.1. Dette kan forklares med, at Peter og Lars ikke har et indkapslet funktionsfølgebegreb, men kan lige såvel skyldes, at definition 4.2.1 er kompliceret. Under alle omstændigheder mener jeg ikke, det er urimeligt at forestille sig, at det vil være let at lave en fejlkonstruktion, der kan dekomponeres således.

1. Bundfældelse af funktionsfølgebegrebet og uniform konvergens.

2. *Fejlslutningen*; at en tællelig familie $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er normal netop, hvis følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer eller divergerer normalt.

3. Koordinering af fejlslutningen i punkt 2 med funktionsfølgebegrebet og begrebet uniform konvergens danner begrebet *normal tællelig familie.*

Denne konstruktion er væsentlig mere økonomisk end den dekomponering, der er angivet i afsnit 4.2, eftersom den ikke indeholder indkapsling af funktionsfølgebegrebet,

[9] Søren har tidligere i interviewet noteret følgen $(f_k) = (f_1, f_2, f_3, \dots)$, og det er den, han peger på.

og fordi betingelsen i afsnit 4.3.1 rent logisk er langt simplere end definition 4.2.1. Jeg mener hermed at have sandsynliggjort, at Peter og Lars har et begrebsbillede, der minder om denne dekomponering.

4.3.6 Revideret genetisk dekomponering og didaktiske anbefalinger

Der kan, så vidt jeg kan se, være to årsager til, at fejlkonstruktionen beskrevet i afsnit 4.3.5 dannes. For det første kan det skyldes, at funktionsfølgebegrebet ikke er indkapslet og for det andet, at betingelsen i afsnit 4.3.1 er langt simplere at arbejde med end selve definitionen 4.2.1. Den reviderede genetiske dekomponering, der angives nedenfor, forsøger at mindske sandsynligheden for at danne ovenstående fejlkonstruktion. Det gør den på den ene side ved at arbejde målrettet med indkapsling af funktionsfølgebegrebet og på den anden side ved at sikre, at betingelsen i afsnit 4.3.1 introduceres på en måde, så rækkevidden af betingelsen fremstår klart.

1. Bundfældelse af funktionsfølgebegrebet.
2. Erkendelse af at en tællelig familie $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er normal, såfremt følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer eller divergerer normalt. Dette giver mulighed for at checke normalitet i en masse konkrete tilfælde. På dette stadium skal man også se eksempler på normale familier, der *ikke* opfylder betingelsen.
3. Indkapsling af funktionsfølgebegrebet.
4. Koordinering af 2, 3 og begrebet uniform konvergens danner begrebet *normal familie.*

Det er interessant, at der muligvis er problemer med indkapsling af funktionsfølgebegrebet. På den ene side er det et forholdsvist elementært begreb, i hvert tilfælde på den måde at det introduceres tidligt i uddannelsesforløbet (2. år på matematikuddannelsen), men på den anden side har jeg ikke kunnet finde gode eksempler på processer, der tager en funktionsfølge som input (se afsnit 4.2). Det er svært at sige hvorvidt tendensen til, at respondenternes begrebsbilleder refererer til betingelsen i afsnit 4.3.1 fremfor definition 4.2.1, skyldes at funktionsfølgebegrebet ikke er indkapslet. Problemet kan også være, at betingelsen ikke indgik som en sætning i notematerialet eller, at definitionen 4.2.1 er kompliceret. At definitionen er kompliceret, er der ikke umiddelbart noget at gøre ved. Den reviderede genetiske dekomponering tager hensyn til de to andre forhold ved at arbejde målrettet med indkapsling af funktionsfølge begrebet, og vigtigere, ved at kræve at en revision af undervisningsmaterialet sikrer, at betingelsen i afsnit 4.3.1 bliver en selvstændig sætning, og at der ses eksempler på, hvorfor denne betingelse kun er tilstrækkelig.

Kapitel 5

Begrebskort

I dette kapitel vil jeg beskrive min behandling af kursisternes arbejde med at lave *begrebskort* over kursets begreber. To gange i løbet af kurset blev kursisterne bedt om at lave begrebskort over kursets centrale begreber. Disse begrebskort har jeg behandlet på to forskellige måder.

For det første har jeg undersøgt Tall og McGowens [42] påstand om, at konsistens i udvidelser af begrebskort er korreleret med høj performance. Med en konsistent udvidelse af et begrebskort forstås, at strukturen fra det første begrebskort kan genfindes i det sidste, selvom det sidste indeholder flere begreber. Tall og McGowen argumenterer for dette med *kvalitative* metoder. Med udgangspunkt i Tall og McGowens metoder udvikles og testes en *kvantitativ* metode til at undersøge sammenhængen mellem konsistens af udvidelser og performance. Metoden udvikles i afsnit 5.1 og testes i afsnit 5.2.

For det andet vil jeg undersøge, om forskellene på de to begrebskort kan anvendes til at spore udvikling i begrebsbilleder. Dette undersøges ved at studere respondentens refleksion over *mindre* uoverensstemmelser i begrebskort gennem samtale. Målet er at finde at finde steder, hvor det kunne være interessant at gennemføre en grundig undersøgelse af læringen, som den der er gennemført i kapitel 4. Denne metode beskrives i afsnit 5.1 og testes i afsnit 5.3. Da jeg har ikke fundet lignende metoder beskrevet i litteraturen, skal afsnit 5.3 i høj grad ses som en *test* af denne metode.

5.1 Teori og metode

Mercedes McGowen og David Tall undersøger i artiklen [42], hvordan forskellige elever vælger at fremstille den matematik, der indgår i et kursus som begrebskort. Specielt undersøger de udviklingen af disse begrebskort over tid. Det gør de ved at konstruere et *skematisk diagram* udfra en serie af begrebskort, der er udarbejdet af den samme person. Et skematisk diagram er et diagram, der skitserer hvert begrebskort i serien og viser, hvilke begreber der er videreført fra tidligere begrebskort, hvilke der er flyttet, og hvilke nye begreber der er kommet til. Figur 5.1 viser et skematisk diagram. Tall og McGowen finder, at høj performance og konsistente udvidelser af begrebskortene er korrelerede.

Jeg har to formål med at anvende begrebskort. For det første vil jeg se, om jeg kan reproducere Tall og McGowens resultater ved at sammenligne performance i testen bilag D med antallet af flyttede begreber i det skematiske diagram. Derudover vil jeg undersøge, om enkelte flyttede objekter i et skematisk diagram der ellers er konsistent, kan anvise steder, hvor personens begrebsbillede er blevet ændret. Målet med dette er at danne et overblik over stoffet, og se hvor det kan være interessant at gennemføre en grundigere undersøgelse, som den der er gennemført i kapitel 4.

For at blive istand til at sammenligne begrebskortene valgte jeg, at det på forhånd var givet, hvilke begreber der skulle indgå i begrebskortene.

Kursisterne lavede hver to begrebskort med to dages mellemrum (onsdag og fredag). Den enkelte kursusdeltager placerede begreberne i forhold til hinanden på et stort ark og tegnede kommenterede pile imellem begreberne. På begge begrebskortene indgik begreberne "Juliamængden", "Fatoumængden", "$A_P(\infty)$", "Normalitet af $\{P^k | k \in \mathbb{N}\}$" og "Banen $P_c^k(z)$". På fredagskortet indgik tillige begreberne: "Det kritiske punkt for P_c", "Mandelbrotmængden" og "Tiltrækkende og frastødende periodiske punkter". Det skriftlige udgangspunkt for disse aktiviteter forefindes i bilag E.

For at undersøge korrelationen mellem performance og konsistens i udvidelse har jeg konstrueret skematiske diagrammer for samtlige par af begrebskort. Antallet af flyttede begreber tælles. Hvis to begreber er forbundet med pile på det ene kort, men ikke det andet, og de ellers ikke er flyttet, henregnes dette som et flyttet begreb. Nogle respondenter angav flere pile mellem to begreber. Hvis to begreber er forbundet med pile på begge begrebskort, regnes det ikke som en ændring, at de er forbundet med et forskelligt antal pile på de to kort. På det skematiske diagram figur 5.1 er der to pile fra om onsdagen, der er væk om fredagen. Diagrammet udtrykker altså 2 ændringer.

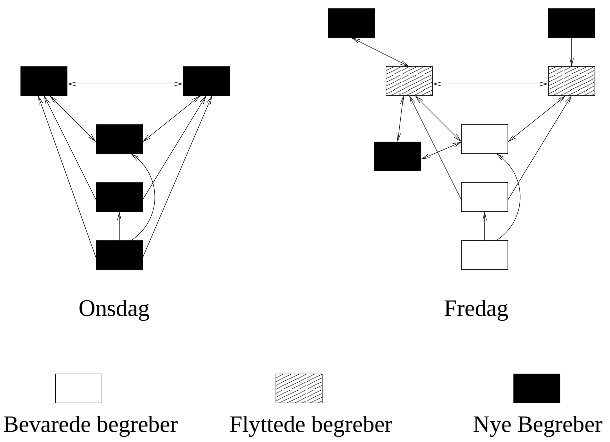
Testen (bilag D) rettes, og kursisternes besvarelser af hver af de fire opgaver gives mellem 0 og 5 point så prøvens resultat bliver et pointtal mellem 0 og 20. Antallet af flyttede begreber sammenholdes med resultatet i testen. Det skal bemærkes at testen er designet til at være udgangspunkt for en undersøgelse af begrebet normal familie af funktioner, og ikke til at være en eksamenslignende performancetest. Dette svækker absolut styrken af dette performancetal og i særdeleshed relevansen i at sammenligne det med antallet af ændringer i begrebskortene. Hvor testen zoomer ind på et begreb giver begrebskortene et bredt indtryk af kursistens overblik over *hele* stofområdet.

Hvorvidt de mindre uoverensstemmelser mellem de to begrebskort, kan afsløre udvikling i begrebsbilleder, undersøges i interviewundersøgelsen. Ideen er at studere respondentens refleksion over sine begrebskort gennem samtale.

Undersøgelsen formål er at fastlægge grunden til bestemte forskelle på begrebskortene om onsdagen og om fredagen. Jeg vil identificere hvilke forskelle der er på respondenternes begrebskort om onsdagen og om fredagen. Hvis der er en pil imellem to begreber X og Y på det ene kort men ikke på det andet og jeg finder denne ændring interessant, vil jeg først bede respondenten om at gøre rede for X og Y's indbyrdes forhold. Dernæst vil jeg vise begrebskortene og bede respondenten om at forklare de relationer der fremgår af henholdsvis onsdags- og fredagskortet. Såfremt det undervejs fremgår at der er en forskel på de opfattelser kortene giver udtryk for, skal interviewet forsøge at præcisere denne forskel, samt spørge til om respondenten kan huske en situation der fik ham til at ændre opfattelse.

Hvis det viser sig at afgrænsede afvigelser i begrebskort, kan antyde interessante ændringer i begrebsbillederne for nogle af kursets centrale begreber, vil det senere kunne anvendes til at finde steder hvor det kunne være interessant at gennemføre en grundig undersøgelse af læringen, som den jeg har foretaget i kapitel 4.

Udvælgelsen af respondenter foregår på baggrund af de skematiske diagrammer. Jeg vil gå efter at vælge respondenter med *få og systematiske* afvigelser i begrebskortene. Derudover skal udvælgelsen af respondenter tage hensyn til undersøgelsen i kapitel 4, som beskrevet i afsnit 4.1.2.



Figur 5.1: Det skematiske diagram for Peters begrebskort.

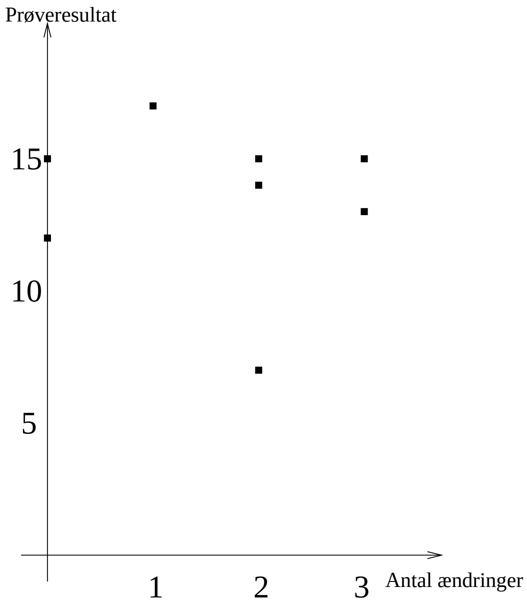
5.2 Sammenhæng mellem begrebskort og test

Ved at opstille den enkelte kursists antal ændringer i begrebskort overfor prøvens resultat fremkommer tabel 5.1.

Kursist nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Antal ændringer i begrebskort	2	0	2	0	2	3	3	1
Prøveresultat (0-20 pt.)	15	12	14	15	7	13	15	17

Tabel 5.1: Datasættet bestående af antal ændringer i begrebskort og resultatet af prøven.

For at gøre datasættet mere overskuelige plottes det i figur 5.2. Hvis dataserien er korreleret på den samme måde som det blev fundet af Tall og McGowen i artiklen [42] skulle dataserien tilnærme en monoton aftagende graf. Dette synes ikke at være tilfældet.



Figur 5.2: Datasættet fra tabel 5.1 plottet.

Ser vi bort fra den ekstreme observation (kursist nr. 5) ser det ud som om at datasættet er fordelt i et bælte mellem 12 og 17 point, med flest observationer i midten af dette bælte. Jeg synes ikke at jeg kan se nogen tendens til at (midten af) dette bælte er tilnærmer en aftagende funktion. Således mener jeg ikke at disse data underbygger Tall og McGowens påstand om at konsistens i udvidelse er korreleret med høj performance.

Dette kan naturligvis skyldes at dataserien er for lille, at respondenterne ikke er trænede nok i at lave begrebskort og disse derfor bliver tilfældige, eller at testen ikke giver et reelt udtryk for performance. Det ret lave antal ændringer, samt det indtryk jeg har efter at have studeret disse kort, tyder imidlertid på at tallene er ukorrelerede, fordi at stort set samtlige begrebskort der blev lavet fredag var meget tæt på at være konsistente udvidelser af onsdagens kort. Der kan være flere grunde til dette :

- Studerende på IMF KU er dygtige. Tall og McGowen arbejdede med undervisning på et niveau svarende til gymnasiet ([42] p. 283). Det er ikke usandsynligt at overbygningsstuderende i matematik er langt bedre til at placere abstrakte begreber i forhold til hinanden end gymnasieelever.

- Begrebskortene blev lavet tidsligt tæt. Tall og McGowen arbejdede med tre begrebskort på 15 uger ([42] p. 283), jeg havde to på en uge.

- Jeg vedtog på forhånd hvilke begreber der indgik i begrebskortet, og det gør det naturligvis lettere at lave en konsistent udvidelse end hvis respondenterne selv skulle finde på hvilke begreber der skulle indgå. Derudover indgik ret få begreber.

- Det blev af nogle opfattet som en opgave at lave en konsistent udvidelse. Dette underbygges af nedenstående citat, fra min samtale med Peter.

> Peter: Men det ikke noget jeg sådan har opdaget, for jeg var sikker på at det var det samme jeg havde lavet, til at starte med.
>
> Interviewer: Ok, så du har simpelthen tænkt at du ville lave præcist det samme kort, og så har du lavet netop den forskel.
>
> Peter: Ja, jeg troede i hvert fald at jeg havde startet med at lave det samme.

Alt i alt har jeg altså ikke kunnet genfinde nogen systematisk sammenhæng imellem høj performance og konsistente udvidelser af begrebskortene. Jeg er kommet med nogle bud på grunden til dette, men ingen af disse bud kan ses som en egentlig årsag.

Jeg mener dog at metoden med på forhånd at udvælge hvilke begreber der skal indgå i begrebskortet, og derefter anvende skematiske diagrammer til at *tælle* antallet af ændringer grundlæggende er en god ide, og kan komme til at udgøre et kvantitativt alternativ til de mere kvalitative metoder der anvendes af Tall og McGowen. Men antallet af begreber bør være en del større og der bør være længere tid imellem at kortene bliver lavet. På den måde kan man sikre sig at det er vanskeligt blot at *huske* hvad man gjorde sidst. Derudover vil et større antal respondenter sammen med det større antal begreber muliggøre bedre konklusioner på baggrund af statistiske metoder.

5.3 Ændringer i begrebsbilleder

I forlængelse af de interview jeg gennemførte om forståelsen af begrebet normal familie af funktioner, studerede jeg respondenternes refleksion over ændringer i de begrebskort, de havde lavet i løbet af kurset. I dette afsnit angives en analyse af mine interview med Søren og Peter. Lars' begrebskort fra om fredagen var en konsistent udvidelse af onsdagens, hvorfor interviewet med ham alene berørte forståelsen af normale familier. Søren og Peters begrebskort kan ses i bilag F.

5.3.1 Interview med Søren

De ændringer i begrebskortene, som interviewet med Søren kredser om, er, at der på fredagskortet er forsvundet en pil mellem banen $\{P^k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ og normalitet af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ og en pil mellem normalitet af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ og Fatoumængden (se bilag F).

Inden Søren ser sine begrebskort, bedes han redegøre for det indbyrdes forhold imellem begreberne 'banen og normalitet af familien.

> Søren: Hvis banen der den går imod uendelig så er familien normal omkring z, den der A_p uendelig det er en åben mængde så, det er det der lemma 3.10 der siger hvis man er langt ude så bliver man ved med at være langt ude. Og så hvis vi ligger der i A uendelig så opfylder vi jo kravet for 2, som giver normalitet. Med mindre selvfølgelig at det er en konstant følge. Så hvis banen går imod uendelig så er familien normal omkring z.
>
> Interviewer: ok
>
> Søren: Hvordan så hvis den ikke går imod uendelig. Så kan vi ikke sige noget.

Banen imod uendelig $\Rightarrow$ normalitet i punktet

Banen ikke imod uendelig

Søren forklarer i detaljer hvordan, banens ubegrænsethed i et punkt kan afgøre normalitet af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i dette punkt. Søren mener altså, at det, at banen i et punkt på denne måde kan sikre normalitet, er en vigtig sammenhæng.

Dernæst viser jeg Søren begrebskortene og beder ham se på banen i forhold til normalitet af familien. Han bemærker, at der er en pil mellem banen og normalitet af familien på onsdagskortet, der mangler på fredagskortet. Jeg beder derfor Søren om at forklare, hvilken opfattelse han mener, hvert af de to begrebskort udtrykker. Om onsdagskortet siger Søren:

> Søren: Der siger jeg noget med at banen af de punkter i en eller anden omegn kan sige noget om hvornår vi ikke har normalitet.

Opsummerer onsdag

Tilsvarende siger han om fredagskortet:

> Søren: Ja, der har jeg. Jeg siger at hvis banen er ubegrænset så ligger z i A uendelig og derfor er familien normal.

Ifølge Søren er der altså den forskel, at onsdagskortet udtaler sig om, at banerne for punkterne i en omegn kan fortælle, hvornår vi *ikke* har normalitet på denne omegn. Fredagskortet fortæller derimod, at banens opførsel i et enkelt punkt kan sikre normalitet i dette punkt. Søren udtaler sig præcist og sikkert om den sidste sammenhæng, hvorimod han er lidt løs om den første, der faktisk heller ikke er helt klar[1]. Det virker som om, Søren mener, at den sammenhæng, der fremgår af fredagskortet, udtrykker en mere præcis relation mellem banen og normalitet af familien, end den onsdagskortet udtrykker. Om denne forskel siger Søren selv.

> Søren: Nej, jeg syntes det blev klarere for mig onsdag til fredag at den der [A uendelig] er en åben mængde, jeg har på onsdagskortet nævnt at det er en hel omegn der skal ligge i A uendelig, men det er nok at bare punktet ligger der fordi så vil en omegn automatisk gøre det fordi A uendelig er åben.

Refleksion, $A_P(\infty)$ åben mængde

[1] Montels sætning giver, at banerne for punkterne i enhver omegn, hvorpå $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *ikke* er normal, stort set rammer hele $\mathbb{C}$, men det modsatte gælder ikke.

Søren mener altså, at det er blevet klarere for ham, at $A_P(\infty)$ er en åben mængde og mener, at dette måske kan forklare forskellen på de to kort. At $A_P(\infty)$ er åben, sikrer netop at banen i et punkt bestemmer normalitet, hvis den går imod uendelig.

Derefter vender interviewet sig imod den anden forskel på de to begrebskort. På onsdagskortet er der en pil mellem normalitet af familien og Fatoumængden, der er mærket "kan bruges til at beregne". Denne pil kan ikke genfindes på fredagskortet (se bilag F).

> Interviewer: Prøv at lægge mærke til, du har også en pil mellem normalitet at P^k og Fatoumængden om onsdagen som mangler om fredagen. Det kan være du vil sige en lille smule om det?

Normalitet og Fatou

> Søren: Onsdag har jeg skrevet "Fatoumængden defineres som punkter med omegn hvor familien P^k er normal", og så en pil den anden vej at normalitet af den der P^k bruges til at beregne Fatoumængden. Den er jeg måske ikke så glad for den pil, den er lidt vag.

Utilfredshed med pil

Søren er altså utilfreds med pilen, der er mærket "kan bruges til at beregne". Når Søren betegner denne pil som "vag", kan det skyldes, at interviewet lige har omhandlet en pil, som Søren har knyttet til den præcise sammenhæng, at banen $\{P^k(z_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ kan sikre normalitet i z_0 ved at gå imod uendelig. Denne præcise sammenhæng bragte Søren selv på banen i starten af den del af interviewet, der omhandler begrebskortene.

Adspurgt hvordan han vil udtrykke at beregne Fatoumængden, svarer Søren:

> Søren: Nej så ville jeg nok gøre det [med en pil] op på banen i stedet for.
>
> Interviewer: Du ville lave en pil?
>
> Søren: Fra banen til Fatoumængden.

Fra banen til Fatoumængden

Men det er Søren heller ikke helt tilfreds med. Umiddelbart herefter siger han:

> Søren: Ja men jeg tror allerhelst jeg ville tegne fra banen til A uendelig og så sige at det er en delmængde af Fatoumængden. Det har jeg sikkert også gjort herovre.

Fra banen til $A_P(\infty)$

Sørens sidste bemærkning tyder på, at han gerne vil tilpasse sin forklaring til fredagens begrebskort. Læg mærke til, at Søren knytter normalitet af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ til banen og det tiltrækkende bassin for uendelig. Denne sammenhæng er temaet for den anden forskel på de to begrebskort og bliver således det gennemgående tema i hele den del af interviewet, der handler om begrebskort.

Til slut beder jeg Søren om at beskrive, hvilken opfattelse pilen fra normalitet af familien til Fatoumængden, der fremgår af onsdagskortet, giver udtryk for.

> Søren: Altså opfattelsen er ligesom. Vi tager en omegn om familien og så tager vi, og så er det som om vi kan sige: "er familien normal, så har vi fundet Fatoumængden". Jeg ved ikke hvad jeg har ment. I det store hele

er det nok bare at sige et eller andet med at det er definitionen. Det at bestemme Fatoumængden eller beregne den som jeg har skrevet det er bare at checke om der er normalitet, jeg tror det er det jeg har tænkt. Så det er bare en overflødig, dårlig pil. overflødig dårlig pil

Søren lægger altså afstand til pilen markeret med "kan bruges til at beregne". Han siger, at den snarere skal tænkes som en pil, der er mærket "definerer". Hertil skal det bemærkes, at begge Sørens kort indeholdt en pil mellem normalitet af $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ og Fatoumængden mærket med "definerer". Det tyder på, at Søren på dette tidspunkt ikke kan se noget fornuftigt i den pil. Dette underbygges af Sørens eget udsagn om, at han ikke ved, hvad han har ment.

Det er bemærkelsesværdigt, at det faktum, at såfremt banen i et punkt z_0 går imod uendelig så vil familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en normal familie i dette punkt, bliver et centralt tema for hele den del af interviewet, der omhandler begrebskort. Søren udtrykker flere steder denne sammenhæng ved, at $A_P(\infty)$ er en åben mængde. Sammenhængen fremgår af både onsdags- og fredagskortet. Søren mener selv, at denne sammenhæng stod klarest for ham om fredagen, og han synes begrebskortene undebygger dette, fordi pilen mellem banen $\{P^k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ og normalitet af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ kun forefindes på onsdagskortet. Søren mener, at fredagens kort skal læses som om, at denne pil går igennem $A_P(\infty)$, og dermed udtrykker sammenhængen.

Det er umiddelbart overraskende, at Søren finder på at knytte pilen mellem normalitet af $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ og Fatoumængden til den sammenhæng, som han beskriver ved, at $A_P(\infty)$ er en åben mængde. Dette tema bliver således ikke blot centralt i forbindelse med pilen mellem banen i et punkt og normalitet af familien af iterationer af P, men i hele den del af interviewet der omhandler begrebskort. Når Søren lægger afstand til pilen, der udtrykker at normalitet kan bruges til at beregne Fatoumængden, kan det hænge sammen med, at han lige har givet et præcist argument for, at *banen* kan beregne normalitet og dermed Fatoumængden. Søren har ikke et tilsvarende præcist argument for, at normalitet kan bruges direkte til at beregne Fatoumængdens udseende. Det er sandsynligvis derfor, at Søren tager afstand fra pilen.

Søren har i løbet af kurset opdaget den sammenhæng, at såfremt banen i et punkt z_0 går imod uendelig, så vil familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en normal familie i dette punkt og udtrykker denne sammenhæng ved, at $A_P(\infty)$ er en åben mængde. At banen i et punkt, der alene bestemmes af P og dette punkt, således i visse tilfælde kan sige noget, om opførslen af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ på en hel omegn af punktet er en erkendelse, som man kunne vælge at gå i dybden med. Jeg tror imidlertid, at denne sammenhæng er for simpel til, at det er relevant at gå igang med et projekt svarende til det, der er gennemført i kapitel 4. Derimod vil en præcisering af denne sammenhæng, f.eks. som en opgave, være fornuftig i en revision af kursusmaterialet.

5.3.2 Interview med Peter

Den eneste ændring, der er i Peters begrebskort, er, at der er pile mellem (Fatou- og) Juliamængden og banen om onsdagen, og disse er væk om fredagen. Pilene er mærket med "er grundlæggende begreb for". Peters begrebskort kan ses i bilag F, og et skematisk diagram for Peters begrebskort findes i figur 5.1.

Peter bedes om at gøre rede for sammenhængen mellem på den ene side Julia- og Fatoumængden og på den anden side banen:

> Peter: Ja, Fatoumængden det er jo de punkter hvor banen er en normal familie. — Sammenblanding
>
> Interviewer: Banen er en normal familie? Prøv at skrive ned hvad banen er, i et eller andet punkt.
>
> Peter: Banen for et polynomium P så har vi så mængden af de her $P^k(z)$ ikke.
>
> Interviewer: Jo, det er rigtigt. Banen har altså noget med det her z at gøre.
>
> Peter: Ja
>
> Interviewer: så det er en mængde af? Karakteriser den der mængde.
>
> Peter: Det er jo bare en mængde af punkter. — Banen er punktmængde
>
> Interviewer: En mængde af punkter, ja. Kan sådan en mængde være?
>
> Peter: Nåh ja jeg sagde at ... Det er hvis man så ser på P^k erne her, der kan være en normal familie.

Peter kommer altså til at blande banen sammen med familien af funktioner, hvilket naturligvis er forkert. Umiddelbart herefter introduceres begrebskortet fra om onsdagen, hvorpå der er en pil mellem banen og Fatoumængden, der jo er mængden af punkter, hvori familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er normal. Peter kunne derfor få indtryk af, at det er en fejl at *knytte* banen til Fatoumængden, som han gør det på begrebskortet fra om onsdagen, hvilket det ikke behøver at være.

> Interviewer: Ok, så hvis jeg nu viser dig dit begrebskort fra onsdag, koncentrer dig om banen i forhold til Fatoumængden evt. i forhold til normalitet af den her familie. Og så kunne jeg godt tænke mig at høre præcist hvad du har at sige om de pile der går fra banen til Julia- og Fatoumængden. — Ser onsdagskort
>
> Peter: ok..
>
> Interviewer: Du må bare gerne uddybe, eller gentage det du skrev.
>
> Peter: Ja, de er jo også lidt, altså, jeg har skrevet at banen den er sådan et grundlæggende begreb for Julia- og Fatoumængden. Det tror jeg bare er i den mening at man, vi starter med banen ikke. Eller det, ja det ved jeg sgu ikke. — Utilfreds med pil fra bane til Fatoumængden
>
> Interviewer: Kan du huske hvad du har tænkt, hvad du har forestillet dig, det kan jo godt være at det ikke var, hvad kan man sige, .. Jeg kunne godt tænke mig at vide grunden til at du har tegnet de her pile.
>
> Peter: Ja nu kan jeg godt se de måske..
>
> Interviewer: Det kan godt være at de ikke er så afsindigt korrekte, men jeg — Problematisk spørgsmål

vil godt høre hvad du tænkte, hvis du kan huske det.

Peter: Ja. (pause) Så har jeg nok tænkt noget .. dumt måske, det ved jeg sgu ikke.

Interviewer: Hvad for noget dumt?

(Pause)

Peter: Jeg tror jeg på en eller anden måde har tænkt på det som om, at man brugte banen direkte, altså at der var sådan en mere direkte forbindelse, sådan kommer det også til at se ud. Den anden vej er den jo god nok ikke, man går igennem normalitet af familien P^k ikke? Gennem normalitet

Peter ser altså sin besvarelse som lidt problematisk. Det er sandsynligt, at grunden til dette er, at pilen bliver knyttet til den sammenblanding af begreber, som Peter lægger ud med. Han er lige blevet belært om, at han ikke må blande banen sammen med familien, fordi det ene er en punktmængde og det andet en mængde af funktioner. Straks herefter skal Peter så reflektere over et begrebskort, hvor der er en pil imellem netop disse to begreber. Oveni det er det problematisk, at jeg, for at få Peter til at sige noget om hvorfor han har sat pilen, siger, at det "godt kan være det ikke er afsindigt korrekt", men at jeg gerne vil høre, hvad han har tænkt. De to ting tilsammen kan ikke undgå at give Peter indtrykket af, at den pil, der diskuteres, er *dårlig*. Dette ser jeg som den væsentligste årsag til, at han i resten af interviewet lægger afstand til denne pil.

Udfra interviewet med Peter synes jeg ikke, der er et oplagt bud på et nyt begreb at gå i dybden med. De eneste bud på en årsag til forskellen på de to kort er, at Peter tror, at han om onsdagen har ment, at "der var en mere direkte forbindelse".

Interviewet med Peter afslører væsentlige metodiske problemer. Da ideen i denne metode er, at respondenten skal reflektere frit over den læring, han har oplevet, er det meget uheldigt, at interviewet foregår i forlængelse af den mere præcise interviewundersøgelse, der er omtalt i kapitel 4. Der er ikke tradition for at give lods og fortælle, hvordan man oplever læring af et begreb. Derfor er det ikke smart først at bede om præcise forklaringer, som f.eks. de uddybninger af opgavebesvarelser respondenterne var blevet afkrævet umiddelbart forinden. Hvis man igen skal forsøge sig med denne metode, er det altafgørende at skabe en fri stemning, hvor man kan tillade sig at reflektere frit med løse eller ingen argumenter, og man skal gøre sig klart, at man i forsøg på dette arbejder *imod* den matematiske tradition.

De to interview giver ikke umiddelbart nogle bud på nye begreber at gå i dybden med. De viser meget klart, men på hver deres måde, hvordan denne metode er vanskelig. Søren er glad for den sammenhæng at banen i et punkt kan sikre normalitet i dette punkt ved at gå imod uendelig. Stort set alle temaer, der bringes på banen i interviewet med Søren, ser han i forhold til, eller i lyset af, denne sammenhæng. Peter får fra starten knyttet den pil, interviewet skal handle om, til en oplevelse af noget negativ, nemlig at han har misforstået noget, derfor tager han i resten af interviewet afstand fra denne pil.

Kapitel 6

Konklusion

Målet med rapporten har været at fundere kursusudviklingen i et teoretisk begrebsapparat. Det har jeg gjort ved at anvende RUMEC og Dubinskys ide om at tage udgangspunkt i en læringsteori. Læringsteorien er en kombination af Sfards og Dubinskys konstruktivistiske teorier, og derudover inddrager jeg Vinners effektive begreb "begrebsbillede". Jeg mener, at resultatet er blevet en effektiv og enkel teori til modellering af matematisk begrebsdannelse.

Den didaktiske platform, jeg har udviklet, blev prøvekørt under kurset "Diskrete dynamiske systemer". Platformen har kombineret målet om at befordre den matematiske begrebsdannelse, der foreslås af læringsteorien, med et ønske om at udvikle kursisternes matematiske kompetencer og lade dem deltage i aktiv teoridannelse. Disse mål har jeg forsøgt at nå ved en kombination af gruppelæring og individuel indskrivning og afrapportering. Efter afholdelsen af kurset vil jeg stort set betegne denne prøvekørsel som en succes. Det, at kursets sætninger udelukkende var formuleret som opgaver, der skulle løses i fællesskab, fandt kursisterne generelt inspirerende og sjovt. Kombinationen af gruppelæring og en individuel skrivefase blev opfattet som hård, men effektiv. Niveauforskellene gav nogle problemer for gruppearbejdet, idet især en af de tre grupper led under, at en kursist gjorde stort set hele arbejdet. Det er måske ikke er så overraskende, da deltagerne niveaumæssigt fordeler sig fra 3. års studerende til Ph.d.studerende.

Det viste sig, at den forståelse af begrebet normal familie af funktioner, som de respondenter jeg interviewede gav udtryk for, var farvet af en tilstrækkelig, men ikke nødvendig, betingelse for normalitet af en tællelig familie af holomorfe funktioner. Der kan naturligvis være mange årsager til dette, men jeg vil fremhæve to som de mest sandsynlige. Det teoretiske apparat, jeg har udviklet, foreslår, at problemerne skyldes, at funktionsfølgebegrebet ikke er indkapslet. Specielt reificeringens onde cirkel underbygger denne forklaring. Det er her relevant at nævne, at jeg har haft problemer med at finde processer fra pensumet på grunduddannelsen i matematik, der tager en funktionsfølge som input og ikke kan forklares med en koordinering af funktionsfølge og et andet begreb. Hvis det er tilfældet, at grunduddannelsen ikke indeholder sådanne processer, peger reificeringens onde cirkel også på en årsag til fraværet af indkapsling. Det andet forhold, der sandsynligvis har indflydelse på respondenternes tendens til at referere til betingelsen frem for definitionen, er, at betingelsen er langt simplere og lettere at arbejde med end definitionen. Det er bemærkelsesværdigt, at det at referere til betingelsen frem for definitionen, for det første observeres empirisk og for det andet kan give anledning til et normalitetsbegreb, hvis genetiske dekomponering er lettere at følge. Jeg foreslår, at en revision af undervisningsmaterialet tager hensyn til de observerede problemer ved at lade betingelsen fremstå som en sætning og se eksempler, der gør det klart, at denne betingelse ikke er nødvendig.

Resultaterne på undersøgelserne, der involverer begrebskort, er ikke så præcise, som dem der blev opnået i forbindelse med undersøgelsen af begrebet normal familie af funktioner. Den kvantitative metode, som udvikles i kapitel 5, resulterer ikke i en verificering af Tall og McGowens resultater, men grunden til dette, tror jeg, kan forklares som en kombination af det lave antal observationer, og at begrebskortsopgaven var for let forstået på den måde, at der indgik for få begreber og var for kort tid imellem, at kortene blev lavet. Denne forklaring underbygges af, at strukturen fra det første kort kunne genfindes i det andet kort for alle kursisterne, hvilket ikke ligner resultaterne af Tall og McGowens undersøgelser. Det skal bemærkes, at Tall og McGowens undersøgelser vedrører undervisning på et lavere niveau end denne rapport. Jeg mener, det er relevant at undersøge om den kvantitative metode med et større antal respondenter, begreber og dage imellem at begrebskortene bliver lavet, kan opnå bedre resultater.

Ideen med at observere en respondents refleksion over forskellene på de begrebskort, han havde lavet, gav ikke særligt gode resultater. Metoden er problematisk, fordi ideen er, at respondenten skal fortælle løst om, hvordan begreberne relaterer til hinanden og reflektere over den læring, de har oplevet. Det er i sig selv meget vanskeligt, men i de interview jeg har gennemført, vanskeliggøres dette yderligere af, at interviewet lige har drejet sig om, at respondenterne skulle uddybe og begrunde deres besvarelser af en eksamenslignende test.

Jeg mener alt i alt, at denne opgave har vist, at det er muligt at fundere kursusudvikling på ganske højt matematisk niveau i et effektivt og rimeligt lettilgængeligt begrebsapparat. Ved at gøre det har jeg opnået en værdifuld viden om, hvordan matematik læres dels ved at anvende begrebsapparatet til at modellere læringen i planlægningsfasen og dels ved efterfølgende at undersøge den læring, kurset har givet anledning til. Med hensyn til det empiriske arbejde skal det bemærkes, at den gennemprøvede og velbeskrevne metode med at teste en foreslået genetisk dekomponering har givet langt bedre og mere sikre resultater end de nye metoder, der involverer begrebskort.

Bilag A

Dekomponering af centrale begreber

I dette afsnit udpeges de begreber og sammenhænge, kurset lægger særlig vægt på. Desuden gives en kort genetisk dekomponering af hvert begreb, ligesom det beskrives, hvordan undervisningsmaterialet respekterer denne.

A.1 Centrale begreber

Her beskrives, hvilke begreber jeg har lagt vægt på i kurset, samt hvordan jeg har dekomponeret disse.

Banen $\{P^k(z)\}$, Familien $\{P^k\}$ og det dynamiske system: Disse begreber er grundlæggende for resten af kurset, samtidigt kan man sige, at opbygningen af en god forståelse af disse begreber er kursets hovedformål.

1. Objektforståelse af reelle og komplekse funktioner. Dette betragter jeg som et fundament, vi bygger på. Kursusdeltagerne er matematikstuderende på overbygningen og antages at kende reelle og komplekse funktioner særdeles godt.
2. Procesforståelse af afbildningen der sender et tal x_0 (reelt eller komplekst) over i banen $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots$. Ved at foretage konkrete beregninger eller lave et simpelt program, der beregner f.eks. $x_0, f(x_0)$,-$f^2(x_0), \ldots, f^{100}(x_0)$, og eksperimentere med forskellige valg af x_0 håber jeg, at det at sende et tal x_0 over i banen $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots$ vil bundfældes som proces.
3. Indkapsling af denne proces til et objekt. Jeg forestiller mig denne indkapsling kan befordres af grafisk analyse (se afsnit B.2.2), specielt opgave B.2.5. I denne opgave skal man afgøre hvilke af punkterne på et interval, der med banen sendes imod ∞, og hvilke der ikke gør. Derudover støttes både objekt og proces forståelsen af programmerings opgaven i afsnit B.3.5.

Den udfyldte Juliamængde og $A_P(\infty)$ bygger direkte på grænseværdien for en punktfølge i $\mathbb{C}$. De visuelle repræsentationer, der er knyttet til den udfyldte Juliamængde kan være med til at styrke helhedsopfattelsen af det dynamiske system.

Begrebet normal familie er dekomponeret i detalje i afsnit 4.2. I kort form er denne dekomponering:

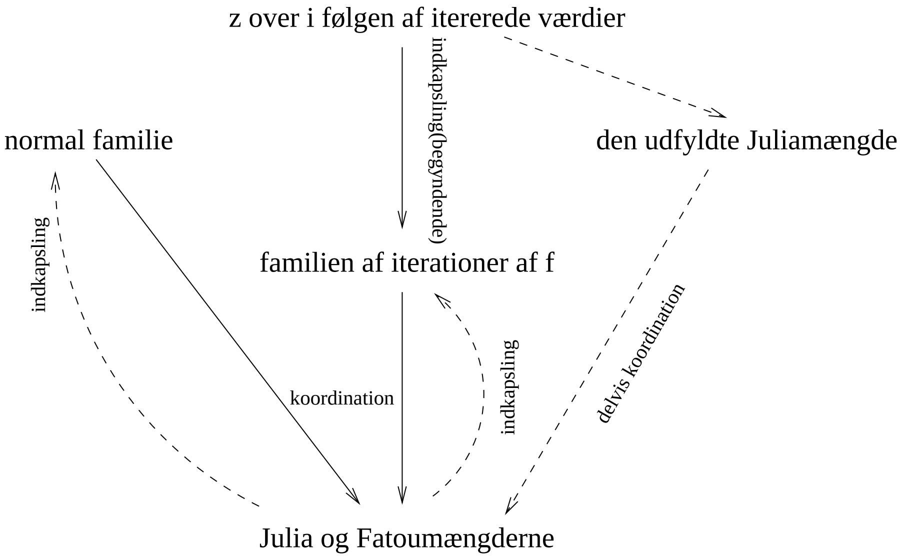
1. *Bundfældelse* af funktionsfølge begrebet.
2. *Indkapsling* af funktionsfølge begrebet.
3. Udfoldning af funktionsfølge samt koordinering med uniform konvergens, for at danne *handlingen*, at afgøre hvorvidt en forelagt familie af holomorfe funktioner er normal.
4. *Bundfældelse* af normalitetsbegrebet.

Dertil skal lægges at definitionen af Julia- og Fatoumængderne bygger ovenpå, og dermed kan virke befordrende for indkapsling af begrebet normal familie.

Julia- og Fatoumængden bygger på en *koordinering* af begrebet normal familie af funktioner, med familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ af itererede polynomier. Derudover støttes dannelsen af Juliamængden, af de visuelle elementer der er knyttet til den udfyldte Juliamængde.

Koordineringen af normal familie og familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ kan virke befordrende for bundfældelse og indkapsling af disse begreber.

Figur A.1 illustrerer dekomponeringen af Julia og Fatoumængderne.



Figur A.1: Genetisk dekomponering af Fatou og Juliamængden.

Egenværdi, frastødende og tiltrækkende periodiske punkter. Begrebet *egenværdi* bygger i princippet på viden om fikspunkter og den afledte af en (sammensat) kompleks funktion. Jeg betragter ikke nogen af disse begreber som problematiske, hvorfor koordineringen af dem hurtigt danner handlings- og måske procesforståelse af egenværdibegrebet. Bundfældelse og indkapsling styrkes ved, at arbejde med reelle dynamiske systemer, hvor betydningen af den afledte kan studeres direkte med *grafisk analyse* (se afsnit B.2.2).

A.2 Vigtige sammenhænge

I kurset vises mange sætninger, der alle udgør vigtige sammenhænge. Alle disse sammenhænge vises som opgaver. I så vidt et omfang som muligt gennemregnes motiverende eksempler og eksempler der illustrerer rækkevidden af resultaterne (f.eks. et eksempel på hvorfor "den modsatte" implikation ikke gælder). Jeg fremhæver her to sammenhænge, som kurset gør særligt meget ud af.

- $J = \overline{\{\text{frastødende periodiske punkter}\}}$
- J sammenhængende $\iff \{P_c^k(0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ begrænset.

Juliamængden er afslutningen af de frastødende periodiske punkter

Karakteristikken af Juliamængden som afslutningen af de frastødende periodiske punkter udgør et af kursets hovedresultater. I afsnit B.4 vises dette resultat, der følger let af nedenstående 4 lemmaer:

1. J er uden isolerede punkter.
2. $J \supset \{\text{frastødende periodiske punkter}\}$
3. $J \subset \overline{\{\text{periodiske punkter}\}}$
4. Der er kun endeligt mange periodiske punkter, der ikke er frastødende.

Den første påstand er vist som opgave i et tidligere afsnit (opgave B.3.22). De to næste vises som opgaver med vink (opgave B.4.4 og B.4.6). At vise den sidste påstand er for vanskeligt til et så kort kursus, derfor angives den blot (sætning B.4.7), et bevis findes i [10]. For at befordre den aktive konstruktion (se afsnit 3.3) lader jeg det være en opgave at lave en karakteristik af Juliamængden udfra disse 4 lemmaer (opgave B.4.8).

Betydningen af banen for det kritiske punkt

Formålet med afsnit B.5 er at vise sætningen

$$J \text{ sammenhængende} \iff \{P_c^k(0)\} \text{ begrænset.} \tag{A.1}$$

I kursusmaterialet vises sætningen for polynomier af typen $P_c(z) = z^2 + c$, men den gælder for alle polynomier med den mindre modifikation, at det er banerne for samtlige kritiske punkter der skal være begrænsede (se f.eks. [10]).

Beviset for påstand A.1 er meget geometrisk. Derfor gennemarbejdes de centrale ideer i beviset først i et særtilfælde på computer (se f.eks. aktivitet B.5.6), hvorefter sætningen vises som to opgaver med vink (opgave B.5.12 og B.5.13). Sætningen ses i afsnit B.6, som en motivation for definitionen af Mandelbrotmængden.

Bilag B

Kursusmateriale

Dette bilag indeholder det notemateriale der var udgangspunkt for kurset. Det blev trykt og uddelt til kursusdeltagerne, som et lille hæfte med selvstændig forside, indholdsfortegnelse, litteraturliste og indeks.

Literaturlisten til dette materiale betod af: [8], [9], [10], [11], [12], [13], [17], [14], [28], [32], [33], [37], [38], [40], [43], [50], [56], [60] og [64]

Forord

Dette notemateriale omhandler diskrete dynamiske systemer med hovedvægt på holomorf dynamik. Notematerialet udgør undervisningsmaterialet til kurset “Diskrete dynamiske systemer”, der afholdes ved matematisk afdeling på Københavns Universitet fra den 11. til den 15. juni 2001, begge dage inklusive. Planlægning og afholdelse af kurset samt udarbejdelsen af nærværende notemateriale er en del af mit specialestudium.

Kurset er baseret på, at deltagerne i mindre grupper gennemfører aktiviteterne og løser opgaverne i notesættet.

Notesættet indeholder *opgaver* og *aktiviteter*. Opgaverne har karakter af påstande, der skal vises. Aktiviteterne er typisk opgaver, hvor der eksperimenteres, ofte ved hjælp af programering i `maple`.

Efter gruppearbejdet skal hver deltager enkeltvis udarbejde skriftlige besvarelser til dagens opgaver og aktiviteter. Dette kan man enten gøre i TeX(eller et andet tekstbehandlingssystem) eller i hånden. I begge tilfælde skal løsningerne være forståelige for de andre kursusdeltagere.

En kopi af løsningerne lægges i en mappe i A102. Løsninger der forefindes i elektronisk form lægges desuden på kursets website `www.math.ku.dk/~misfeldt`. Der kan vi også lægge de `maple`worksheet, der udarbejdes i forbindelse med aktiviteterne.

Under kursusforløbet vil deltagerne blive udsat for to spørgeskemaundersøgelser, en kort undersøgelse i forbindelse med kaffepausen onsdag kl. 14, og en længere fredag eftermiddag. Formålet med disse undersøgelser er at følge deltagernes læring af udvalgte begreber. Formålet er *ikke* at evaluere den enkelte kursusdeltager. Resultater af disse undersøgelser vil kun blive viderebragt på en måde så deltagerne er anonymiserede.

Nedenfor angives en plan for kurset.

kl.	Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag
10.15	Introduktion i A102	Gruppearbejde i A102 og A108			
12.00	Frokostpause				
12.30	Gruppearbejde i A102 og A108				Indskrivning
14.00	Møde og kaffepause i A102				
14.30	Indskrivning				Spørgeskema
16.00	Fri, husk at lægge løsninger i mappen og sende filer til mig				

Tabel B.1: Kursusplan

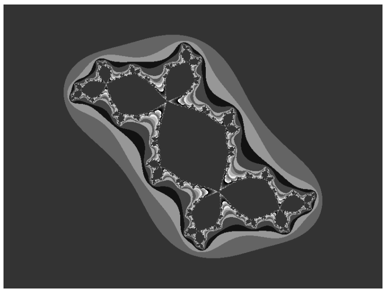
B.1 Indledning

Lad $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ være polynomiet givet ved $P(z) = z^2 - 0,12 + 0,75i$. For ethvert punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ kan man spørge hvordan *banen*

$$P(z_0), P \circ P(z_0) = P^2(z_0), P^3(z_0), \ldots \tag{B.1}$$

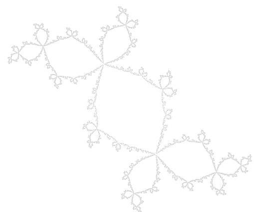
ser ud. Specielt kan man spørge om banen forsvinder imod uendelig, det vil sige om $|P^k(z_0)| \longrightarrow \infty$ for $k \longrightarrow \infty$.

Vi kan med det samme se, at hvis $|P^j(z_0)|$ bliver stor, for et eller andet j, så vil banen fortsætte imod uendelig (for tal z med stor modulus, $|z|$, er afbildningen P tæt ved at være $z \mapsto z^2$). Farvelægges punkterne i den komplekse plan efter hvorvidt, og hvor hurtigt, deres baner forsvinder imod uendelig, fås følgende figur:



Figur B.1: Den udfyldte Juliamængde for $P(z) = z^2 - 0,12 + 0,75i$.

Hvis vi i stedet forsøger at identificere randen af det område, hvorpå banerne går imod uendelig fås *Juliamængden*:



Figur B.2: Juliamængden for $P(z) = z^2 - 0.12 + 0.75i$.

I kurset vil vi indledningsvis se på dynamiske systemer frembragt af en reel funktion. Dernæst vil vi anvende kompleks analyse til at definere og karakterisere Juliamængden. Derudover skal vi forsøge at forstå dynamikken på komplementet til Juliamængden. I den forbindelse vil vi anvende en topologisk invariant, *Eulerkarakteristikken*, til at vise, at dette komplement har enten en, to eller uendeligt mange sammenhængskomponenter.

B.2 Reel diskret dynamik

Formålet med dette kapitel er at introducere de centrale begreber i dynamiske systemer. Specielt vil vi se på dynamiske systemer, der er frembragt af et reelt polynomium, inden vi i resten af kurset ser nærmere på dynamiske systemer frembragt af et komplekst polynomium.

B.2.1 Indledning til dynamiske systemer

Lad $f : A \longrightarrow A$ være en afbildning af en mængde A på sig selv. At studere det *dynamiske system* frembragt af f vil sige at undersøge opførslen af punktfølgen

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0) = f \circ f(x_0) \ldots f^k(x_0), \ldots \tag{B.2}$$

for store k, og hvordan denne opførsel afhænger af $x_0 \in A$. Følgen (B.2) betegnes *banen* for f i x_0.

Bemærk at $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k}$.

Aktivitet B.2.1 *Lad $P_{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være polynomiet $P_{-1}(x) = x^2 - 1$. Lav et program i maple der, for et givet $x_0 \in \mathbb{R}$, beregner*

$$x_0, P_{-1}(x_0), P_{-1}^2(x_0), \ldots P_{-1}^{10}(x_0) \ , \tag{B.3}$$

og udskriver alle værdierne (se hjælp nedenfor).

Afprøv programmet med forskellige x_0 værdier, og beskriv kort den kvalitative opførsel af banen (B.3).

Prøv også med $P_{0,2}(x) = x^2 + 0,2$ og $P_{0,3}(x) = x^2 + 0,3$. Er der stor forskel på systemerne frembragt af $P_{0,2}$ og $P_{0,3}$?

`Maple`hjælp: Her er et lille program, der tæller til 10:

```
> x[0]:=0;
```

$$x_0 := 0$$

```
> for i from 1 to 10 do x[i]:=x[i-1]+1; od;
```

Et punkt $\omega \in \mathbb{R}$ kaldes et *fikspunkt* for funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hvis $f(\omega) = \omega$.

Et fikspunkt $\omega \in \mathbb{R}$ for f kaldes *tiltrækkende*, såfremt der findes en omegn U af ω, sådan at $f^k(x) \longrightarrow \omega$ når $k \longrightarrow \infty$ for alle $x \in U$.

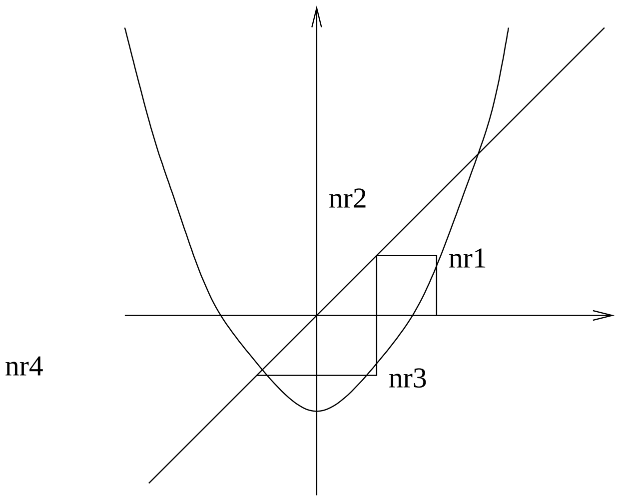
Et punkt $\omega \in \mathbb{R}$ kaldes *periodisk*[1] for f med *periode* n, såfremt $f^n(\omega) = \omega$ og $f^k(\omega) \neq \omega$ når $0 < k < n$. Mængden $\{\omega, f(\omega), \ldots f^{n-1}(\omega)\}$ kaldes en n-*cykel*. Bemærk at alle punkterne i en n-cykel er periodiske med periode n.

En n-cykel $\{\omega_1, \omega_2, \ldots , \omega_n\}$ kaldes tiltrækkende, såfremt hvert af punkterne ω_i er tiltrækkende fikspunkter for funktionen f^n.

[1] Periodiske punkter og fikspunkter betegnes med ω.

B.2.2 Grafisk analyse

En effektiv måde til analyse af et dynamisk system frembragt af f, er en såkaldt *grafisk analyse*.



Figur B.3: Grafisk analyse

Metoden fungerer som illustreret på figur B.3. Tegn grafen for f. I samme koordinatsystem tegnes linien $y = x$. Man kan nu se, hvordan banen i et punkt x_0 opfører sig ved at gå lodret langs linien $x = x_0$ til skæringspunktet $(x_0, f(x_0))$ med grafen for f. Fra dette skæringspunkt gås langs en vandret linie til linien $y = x$ $(f(x_0), f(x_0))$, hvorfra der gås lodret til grafen for f, det vil sige til punktet $(f(x_0), f^2(x_0))$ osv.

Aktivitet B.2.2 *Anvend grafisk analyse på funktionerne $P_{-1}, P^2_{-1}, \ldots, P^5_{-1}$ til, at bestemme antallet af fikspunkter og cykler af periode 2,3,4 og 5 for P_{-1}. Lav et plot med* **maple***, skriv det ud og udfør grafisk analyse i hånden.*

`Maple`hjælp: Figur B.5 (uden boksen), er lavet med maplekoden:

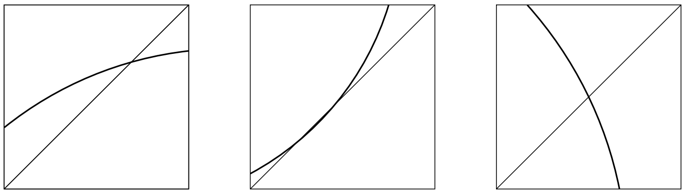
```
> plot([x^2-2.5, x], x=-3..3, scaling=constrained);
```

`scaling=constrained` kan undlades, men sikrer at enhederne på akserne er ens.

Aktivitet B.2.3 *Bestem antallet af fikspunkter for polynomierne $P_{0,2}$ og $P_{0,3}$ fra aktivitet B.2.1, ved hjælp af grafisk analyse.*

Aktivitet B.2.4 *På figur B.4 ses tre grafer for reele funktioner nær et fikspunkt. Hvilke af disse grafer viser et tiltrækende fikspunkt og hvilke gør ikke?*

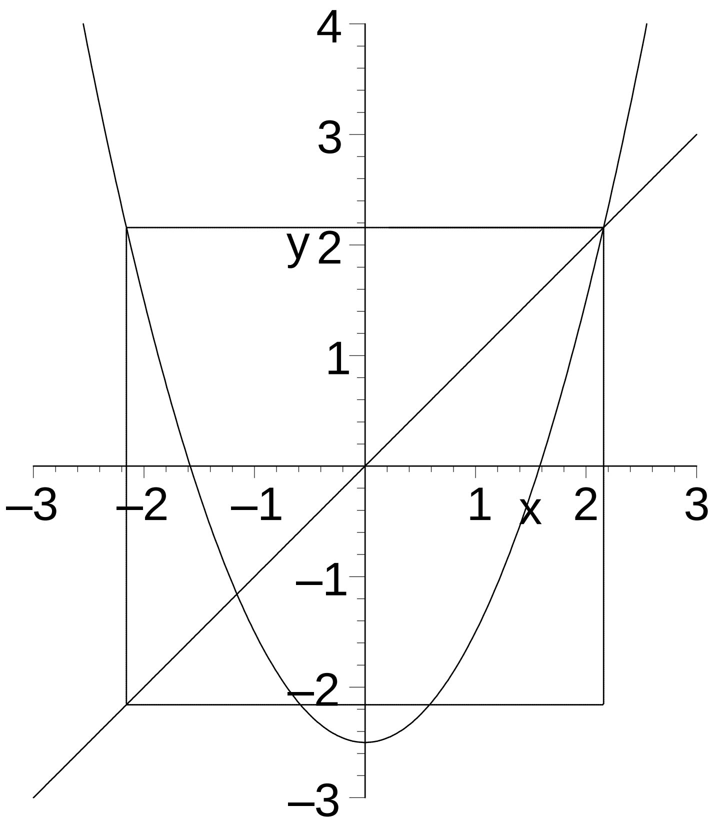
Ekstraopgave B.2.5
Se på det dynamiske system frembragt af $P_{-2,5}(x) = x^2 - 2,5$. Undersøg i hvilke punkter $x_0 \in \mathbb{R}$ banen $\left(P^k_{-2,5}(x_0)\right)_{k \in \mathbb{N} \cup 0}$ går imod uendelig. Undersøgelsen skal



Figur B.4: Grafer for tre forskellige funktioner nær et fikspunkt.

gennemføres ved grafisk analyse på figur B.5. Marker først mængden af punkter, der sendes udenfor boksen (og dermed imod uendeligt) med P. Kald denne mængde B_1. Dernæst skal du identificere $P^{-1}(B_1)$ og sætte $B_2 = B_1 \cup P^{-1}(B_1)$. B_2 er altså mængden af punkter, der sendes udenfor boksen med P^2. Generelt kan mængden, der sendes udenfor boksen med P^n, beskrives ved $B_n = B_{n-1} \cup P^{-1}(B_{n-1})$.

Hvordan tror du $C =]-\sigma, \sigma[\setminus \bigcup_i B_i$ ser ud?



Figur B.5: Grafen for $x^2 - 2.5$. Kommer banen uden for intervallet $]-\sigma, \sigma[$, hvor σ er den positive løsning til $x^2 - 2.5 = x$, vil den forsvinde imod uendelig. Dette interval er angivet som en boks på figuren. Kommer den bane man tegner ved grafisk analyse uden for boksen, forsvinder den imod uendelig.

B.3 Indledende holomorf dynamik

Lad $\Omega \subset \mathbb{C}$ være et *område*, dvs. en åben, sammenhængende delmængde af $\mathbb{C}$. Mængden af holomorfe funktioner defineret på Ω betegnes $H(\Omega)$. En funktion der er holomorf på hele den komplekse plan kaldes en *hel* funktion. Således betegnes mængden af hele funktioner med $H(\mathbb{C})$.

Vi siger, at en punktfølge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fra $\mathbb{C}$ *går imod uendelig*, såfremt $|z_n| \longrightarrow \infty$ for $n \longrightarrow \infty$. Ækvivalent hermed er at $\frac{1}{z_n} \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$, dog skal det bemærkes, at $\frac{1}{z_n}$ måske kun er derfineret fra et vist trin i følgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I resten af kurset vil vi studere *komplekse* dynamiske systemer frembragt af hele funktioner. Hovedvægten vil lægges på dynamiske systemer frembragt af polynomier af grad $d \geq 2$, specielt polynomier af typen $P_c(z) = z^2 + c$, hvor c er et komplekst tal.

B.3.1 Den udfyldte Juliamængde og det tiltrækkende bassin for uendelig

Aktivitet B.3.1 *Brug programmet fra aktivitet B.2.1 til at se hvad der sker med forskellige punkter i $\mathbb{C}$ ved iteration med afbildningen $P_{0.1+0.2i}(z) = z^2 + 0.1 + 0.2i$.*

Beskriv kvalitativt de forskellige opførsler af banen.

Definition B.3.2
Lad $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ være en hel funktion. Mængden

$$A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid f^k(z) \longrightarrow \infty \text{ for } k \longrightarrow \infty\}\ , \qquad \text{(B.4)}$$

kaldes det tiltrækkende bassin *for ∞. Komplementet $K(f) = \mathbb{C} \setminus A_f(\infty)$ kaldes den* udfyldte Juliamængde.

Opgave B.3.3
Bestem $K(P_0)$ og $A_{P_0}(\infty)$ når $P_0(z) = z^2$.

Opgave B.3.4
Vis, at $f(A_f(\infty)) = f^{-1}(A_f(\infty)) = A_f(\infty)$ for enhver hel funktion f. Vi siger, at $A_f(\infty)$ er fuldstændig invariant *under f.*

B.3.2 Normale familier og Juliamængden

I dette afsnit gives den formelle definition af *Juliamængden*. For at gøre det skal vi bruge begrebet normale familier af funktioner.

Definition B.3.5
Lad U være et område. En delmængde $\mathcal{F} \subset H(U)$ kaldes en familie *af holomorfe funktioner. En sådan familie kaldes* normal[2]*, såfremt enhver følge fra $\mathcal{F}$ har en delfølge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, der opfylder en af nedenstående betingelser.*

[2]Strengt taget har vi defineret, hvad det vil sige, at en familie af holomorfe funktioner, er

1. *Der findes $f \in H(U)$ så $f_n \longrightarrow f$ uniformt på samtlige kompakte delmængder af U.*

2. *$\frac{1}{f_n}$ er defineret fra et vist trin, derfra konvergerer $\frac{1}{f_n}$ uniformt imod 0 på samtlige kompakte delmængder af U.*

I tilfældet 1. siger vi, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer normalt på U og i tilfældet 2., at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergerer normalt.

Definition B.3.6
En familie $\mathcal{F} \subset H(U)$ kaldes normal i punktet $z_0 \in U$, *hvis der findes en omegn $V \subset U$ af z_0, hvorpå $\mathcal{F}$ er normal.*

Aktivitet B.3.7 *Se igen på eksemplet $P_0(z) = z^2$. Kan du finde nogle punkter hvori familien $\{P_0^k\}$ er normal? Hvilke?*

Definition B.3.8
Lad f være en hel funktion. Et punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ kaldes stabilt *for f, såfremt familien af itererede funktioner, $\{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, er normal i punktet z_0.*

Mængden af stabile punkter kaldes Fatoumængden *og betegnes $F(f)$ (eller blot F). Komplementet $\mathbb{C} \setminus F(f)$ kaldes* Juliamængden *og betegnes J eller $J(f)$.*

Figur B.2 på side 64 viser Juliamængden for $P_{-0,12+0,75i}(z) = z^2 - 0,12 + 0,75i$. Vi vil i opgave B.3.23 vise, at $J(P_{-0,12+0,75i})$ er randen af $A_{P_{-0,12+0,75i}}(\infty)$ som påstået i indledningen.

B.3.3 Simple egenskaber ved Julia- og Fatoumængden for et polynomium

I resten af kurset vil vi undersøge Julia- og Fatoumængderne for polynomier af grad mindst to. I dette afsnit starter vi denne undersøgelse, så lad $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ være et polynomium af grad $d \geq 2$.

Opgave B.3.9
Gør rede for, at $J(P)$ er kompakt.

Vink: Vis ved at se på komplementet, $F(P)$, at $J(P)$ er afsluttet. Her skal du ikke bruge, at P er et polynomium.

Vis dernæst at $J(P)$ er begrænset. Her kan du bruge følgende lemma:

Lemma B.3.10 *Lad $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ være et polynomium af grad $d \geq 2$. Da findes et tal $R \in \mathbb{R}$ så $|P(z)| \geq 2|z|$ når $|z| \geq R$.*

Bevis: Udelades. □

normal som familie af funktioner fra U ind i *Riemann-sfæren* (se evt. [64]). Riemann-sfæren er 1-punktskompaktificeringen, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, af den komplekse plan, udstyret med metrikken fra kuglen S^2, der er homeomorf med $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ved stereografisk projektion.

Opgave B.3.11
Bevis lemma B.3.10 for polynomier af typen $P_c(z) = z^2 + c$.

Vink:

$$|z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \ .$$

Opgave B.3.12
Kan Juliamængden $J(P)$ *være tom?*

Vink: Du skal vise, at $\{P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ikke kan være normal i ethvert punkt i $\mathbb{C}$ (altså at $J(P) \neq \emptyset$). Antag at $\{P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ er normal i ethvert punkt i $\mathbb{C}$. På den ene side viser lemma B.3.10 at $A_P(\infty) \neq \emptyset$. På den anden side giver algebraens fundamentalsætning, at P har et fikspunkt. Betegn med $K \subset \mathbb{C}$ en kompakt mængde, der indeholder punkter fra $A_P(\infty)$ samt et fikspunkt for P. Der findes så en endelig overdækning af K bestående af mængder, hvorpå $\{P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ udgør en normal familie. Hvorfor er det ikke muligt?

Opgave B.3.13
Vis at $J(P)$ *er fuldstændig invariant under* P, *dvs.* $P(J) = P^{-1}(J) = J$.

Vink: Vis i stedet at $P(F) = P^{-1}(F) = F$. Antag at $\{P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ er normal i z_0. Konkluder at $\{P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ er normal i $P(z_0)$ og i punkterne i $P^{-1}(z_0)$.

Opgave B.3.14
Vis at $J(P) = J(P^k)$ *for ethvert* $k \in \mathbb{N}$.

Vink: Igen ser vi på Fatoumængden. At $F(P) \subset F(P^n)$ følger direkte fra definitionen af normal familie.

For at vise at $F(P^n) \subset F(P)$, kan du bruge nedenstående simple resultat fra talteori.

Lemma B.3.15 *Givet en uendelig følge* $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *af naturlige tal, og et tal* $k \in \mathbb{N}$. *Da findes et naturligt tal* $0 \leq r < k$ *sådan at* $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indeholder uendelig mange tal af typen* $kn + r$, *hvor* $n \in \mathbb{N}$.

Bevis: Ethvert tal m fra $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kan jvf. divisionssætningen [60] p. 14 skrives $m = kn + r$, hvor $n, r \in \mathbb{N}$ og $0 \leq r < k$. Påstanden følger nu af skuffeprincippet (put uendelig mange tal ned i k skuffer, mindst en af skufferne bliver svær at lukke). $\square$

B.3.4 Konsekvenser af Montels sætning

Paul Montel[3] har vist følgende meget anvendelige kriterium for normalitet. Resultatet kaldes også Montel-Carathéodorys sætning.

Sætning B.3.16 (Montels sætning)
Lad $U \subset \mathbb{C}$ være et område. En familie $\mathcal{F} \subset H(U)$ er normal på U, såfremt der findes to punkter i $\mathbb{C}$, der ikke ligger i billedet $f(U)$ for nogen funktion $f \in \mathcal{F}$.

Bevis: Se [14] p. 302. $\square$ Bemærk at Montels sætning angiver en tilstrækkelig betingelse for normalitet. Betingelsen er *ikke* nødvendig.

Aktivitet B.3.17 *Find et eksempel på en familie af funktioner $\mathcal{F} \subset H(U)$, der er normal og rammer hele $\mathbb{C}$.*

Lad, som før, $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ betegne et polynomium af grad $d \geq 2$.

Opgave B.3.18
Lad $z_0 \in J(P)$ og lad U være en omegn af z_0. Vis at mængden

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P^k(U)$$

udgør hele $\mathbb{C}$, evt. pånær et enkelt punkt. Hvis et sådant punkt findes, kaldes det for det exceptionelle punkt.

Sætning B.3.19
Et sådant exceptionelt punkt afhænger kun af P (dvs. ikke af z_0 og U) og ligger ikke i $J(P)$.

Bevis: Udelades, men findes i [28] p. 201. $\square$

Opgave B.3.20
Vis at Juliamængden for polynomiet P kan beskrives som afslutningen af $\bigcup_{k=1}^{\infty} P^{-k}(z_0)$, hvor z_0 er et vilkårligt punkt i $J(P)$.

Vink: Vis først følgende korollar til resultatet fra opgave B.3.18. Brug dernæst korollaret samt at $P(J) = P^{-1}(J) = J$.

Korollar B.3.21 *Lad U være en åben mængde med $J(P) \cap U \neq \emptyset$. Til ethvert punkt $z \in \mathbb{C}$, der ikke er det exceptionelle punkt, findes et tal $k \in \mathbb{N}$ sådan at*

$$P^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset \; .$$

[3] Paul Montel er manden bag begrebet normal familie og Montels sætning. Historisk er hans arbejde interessant, fordi det fremkom lige inden Fatou og Julia startede forskningsområdet holomorf dynamik. Det gjorde de uafhængigt af hinanden omkring år 1920. Man kan sige, at normale familier og Montels sætning var nødvendige forudsætninger for at starte området, ligesom fremkomsten af EDB var nødvendig for den renæssance og videreudvikling, som området oplevede i 80'erne.

Opgave B.3.22
Eftervis at $J(P)$ er uden isolerede punkter.

Vink: Du skal vise, at enhver omegn U af et punkt $z_0 \in J(P)$ indeholder andre punkter fra $J(P)$.

Antag først at z_0 *ikke* er periodisk[4] og vælg et af urbillederne $v \in P^{-1}(\omega)$. Opgave B.3.20 giver, at der findes et punkt fra $\bigcup_{k=1}^{\infty} P^{-k}(v)$ i U.

Antag nu at z_0 er et fikspunkt for P. Vis først at z_0 ikke kan være den eneste løsning til $P(z) = z_0$ (hvordan ville P så se ud). Der findes altså et punkt $v \neq \omega$, der opfylder at $P(v) = z_0$. Se (som før) på $\bigcup_{k=1}^{\infty} P^{-k}(z)$.

Du mangler at se på et periodisk punkt z_0 med periode $p > 1$. Gør det ved at se på P^p.

Opgave B.3.23
Vis at $\partial A_P(\infty) = J(P)$.

Vink: $\partial A_P(\infty) \subset J(P)$ ses direkte ved at se, at $\{P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ikke kan være normal i $z_0 \in \partial A_P(\infty)$. Montels sætning giver, at $\{P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ antager vilkårligt store værdier, på enhver omegn af $z_0 \in J(P)$, derfor er $J(P) \subset \overline{A_P(\infty)}$. Dette er nok til at konkludere at $J(P) \subset \partial A_P(\infty)$.

B.3.5 Mapleprogram der viser K og J

Målet med dette afsnit er at lave et program i `maple`, der plotter et billede, der ligner figur B.1. Det program I skal lave bliver sikkert længere end en linie. Derfor er det lettest at skrive programmet i en teksteditor og flytte det over i `maple`-worksheetet med udklipsholderen. Det er en god ide at starte dit program med komandoen `restart;`, der nulstiller alle variable.

Aktivitet B.3.24 *Betragt polynomiet $P_{-0,12+0,75i}$ givet ved $P_{-0,12+0,75i}(z) = z^2 - 0,12 + 0,75i$. Lav et program der farvelægger punkterne i den komplekse plan efter hvorvidt, og hvor hurtigt, banen $\big(P^k(z_0)\big)$ går imod uendelig.*

Jeres mål skal være at lave en funktion $J : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 30\}$, der til et punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ beregner det mindste $k \in \{0, 1, \ldots, 30\}$, der opfylder at $|P^k_{-0,12+0,75i}(x + iy)| > 3$.

En sådan funktion skrives:

```
J := (x,y) -> f(x,y);
```

I `maple` kan man lave en `for` løkke der kun kører så længe en bestemt betingelse er opfyldt. Nedenstående program tæller til 24:

```
for i from 1 to 30 while(i<25) do
    i;
od;
```

[4]En præcis definition af periodisk findes på side 66 samt øverst side 75.

I vil måske få brug for at definere en procedure *i* ***maple****. Her er en procedure, der lægger to tal sammen.*

```
plus := proc(x,y)
  local c;
  c:=x+y;
 c
end:
```

Variable der bruges inden for proceduren defineres med komandoen ***local*** *(I skal* ikke *angive hvilken type variablen er). Den variabel der skrives umiddelbart inden* ***end:****, er procedurens output.*

Et farveplot af funktionen J, kan opnås med følgende komandolinie:

```
plot3d(0, -2 .. 2, -1.3 ..1.3, style=patchnogrid,
orientation=[-90,0], grid=[128, 128], scaling=constrained, color=J);
```

For at kunne bruge ***plot3d*** *kommandoen skal du skrive* ***with(plots);*** *i begyndelsen af programmet.*

Aktivitet B.3.25 *Angiv Juliamængden på et papir-plot fra aktivitet B.3.24. Du kan også angive J på figur B.1.*

B.4 Periodiske punkter

Lad f være en hel funktion. *Periodiske punkter*, *fikspunkter* og *cykler* defineres helt, som vi gjorde det for reelle funktioner på side 66. Altså kaldes et punkt $\omega \in \mathbb{C}$ *periodisk* for f med *periode* p hvis $f^p(\omega) = \omega$ og $f^k(\omega) \neq \omega$ når $1 \leq k < p$. Mængden $\{\omega, f(\omega), \ldots, f^{p-1}(\omega)\}$ kaldes i så fald en p-*cykel*. Hvis $f(\omega) = \omega$ kaldes ω et fikspunkt for f.

B.4.1 Egenværdi

Dette afsnit generaliserer aktiviteten B.2.4 til hele funktioner.

Definition B.4.1
Lad $\omega \in \mathbb{C}$ være et periodisk punkt for $f \in H(\mathbb{C})$ med periode p. Tallet $(f^p)'(\omega)$ kaldes egenværdien *for ω.*

Opgave B.4.2
Bevis, ved hjælp af kædereglen, at egenværdien er den samme i alle punkter i p-cyklen $\{\omega, f(\omega), \ldots, f^{p-1}(\omega)\}$.

Definition B.4.3
Lad ω være et periodisk punkt for $f \in H(\mathbb{C})$ med periode $p \geq 1$. Betragt p-cyklen $\{\omega, f(\omega), \ldots, f^{p-1}(\omega)\}$. Opgave B.4.2 sikrer, at vi kan tale om denne cykels egenværdi λ. Vi kalder cyklen $\{\omega, f(\omega), \ldots, f^{p-1}(\omega)\}$ for

1. Tiltrækkende *hvis* $|\lambda| < 1$
2. Frastødende *hvis* $|\lambda| > 1$
3. Neutral *hvis* $|\lambda| = 1$.

B.4.2 Lokal karakteristik af Juliamængden

Juliamængden kan karakteriseres ved hjælp egenværdier.

Opgave B.4.4
Lad ω være et frastødende periodisk punkt for $f \in H(\mathbb{C})$. Vis at $\omega \in J$.

Vink 1: Se på $g = f^p$ hvor p er ω's periode. Vis at $\{g^k\}$ ikke er normal i ω, og derved, at $\{f^k\}$ ikke er normal i ω (hvorfor?).

Vink 2: Brug nedenstående sætning fra kompleks analyse (uden at vise den).

Sætning B.4.5
Lad Ω være et område, og $f_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, en følge af holomorfe funktioner. Hvis følgen konvergerer uniformt imod f på alle kompakte delmængder af Ω, så vil f være holomorf på Ω. Derudover vil følgen af afledte funktioner f_i' konvergere imod f' uniformt på alle kompakte delmængder af Ω.

Bevis: Se [50] p. 214. □

Opgave B.4.6
Lad $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ være et polynomium af grad $d \geq 2$. Vis at $J(P)$ er indeholdt i afslutningen af de periodiske punkter.

I skal vise, at enhver omegn V, af et punkt $z_0 \in J(P)$, indeholder et periodisk punkt.

Vink 1: Se på mængden

$$K = \{z_0 \in J(P) \mid \exists z \neq z_0 : P(z) = z_0 \wedge P'(z) \neq 0\} \ . \tag{B.5}$$

Vis at K udgør hele $J(P)$ pånær et endeligt antal punkter.

Vink 2: I en omegn V omkring et punkt $z_0 \in K$ findes der en invers g til P sådan at $g(V) \cap V = \emptyset$ (vis det!). Anvend dette til at se på familien

$$h_k(z) = \frac{P^k(z) - z}{g(z) - z} \ , \tag{B.6}$$

Montels sætning giver så, at enten 0 eller 1 rammes af en af h_k'erne. Vis i hvert af disse tilfælde, at omegnen V indeholder et periodisk punkt.

Der gælder følgende sætning:

Sætning B.4.7
Der er kun endeligt mange periodiske punkter, der ikke er frastødende.

Bevis: Beviset er ret kompliceret, hvorfor det udelades. Beviset findes i [10]. □

Opgave B.4.8
Lav en præcis karakteristik af Juliamængden ved hjælp af definition B.4.3, opgaverne B.3.22, B.4.4, B.4.6 og sætning B.4.7 .

B.5 Betydningen af placeringen af den kritiske værdi for P_c

Formålet med dette kapitel er at finde en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at Juliamængden for et polynomium af typen P_c er sammenhængende.

Begreberne *kritisk punkt* og *kritisk værdi*, der defineres nedenfor, er centrale i denne undersøgelse.

I afsnit B.5.1 introduceres de centrale ideer, der indgår i beviset for hovedsætningen. Dette gøres ved hjælp af computer-eksperimenter.

Til slut præciseres ideerne, og hovedsætningen vises i opgaverne B.5.12 og B.5.13.

B.5.1 Kritiske punkter og værdier

Definition B.5.1
Lad $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ være et polynomium. Et punkt $k \in \mathbb{C}$ kaldes et kritisk punkt for P, hvis $P'(k) = 0$. Billedet $P(k) = v$ kaldes en kritisk værdi for P.

De kritiske værdier kan karakteriseres algebraisk:

Sætning B.5.2
Polynomiet $P(z) - v$ har en dobbeltrod, netop hvis v er en kritisk værdi for P.

Bevis: Fra 2AL ([60] p. 241) ved vi, at $P(z) - v$ har en dobbeltrod α, netop hvis α er rod i både $P(z) - v$ og $\frac{d}{dz}(P(z) - v)$. Det betyder, at $P(\alpha) = v$ og $P'(\alpha) = 0$ som påstået. □

Lemma B.5.3 *Lad $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ være et polynomium med grad $d \geq 1$, og lad A være et område der ikke indeholder nogle kritiske værdier for P. Så er $P : P^{-1}(A) \longrightarrow A$ en d-fold* overlejring *(se [9] p. 3.20).*

Bevis: $P : P^{-1}(A) \longrightarrow A$ er kontinuert og surjektiv per konstruktion. Vi skal altså blot vise, at ethvert punkt $\tilde{z} \in A$ har en jævnt overlejret omegn. Da A ikke indeholder nogle kritiske værdier, vil $P^{-1}(\tilde{z})$ bestå af *d forskellige* punkter $z_1, \ldots, z_d \in P^{-1}(A)$. $P^{-1}(A)$ er en åben mængde, så hvert af punkterne z_j har en omegn U_i, der er helt indeholdt i $P^{-1}(A)$. Vi kan antage at $U_i \cap U_j = \emptyset$ når $i \neq j$, f.eks. ved at kræve, at U_i er indeholdt i disken $D(z_i, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_i| \leq r\}$, hvor $r = \frac{1}{2}\min_{j \neq k}(|z_j - z_k|)$. $P(U_i)$ vil så være en omegn af $\tilde{z}$ og $P\big|_{U_i}$ en homeomorfi.

Mængden $\bigcap_{i=1}^{d} P(U_i)$ er dermed en jævnt overlejret omegn af $\tilde{z}$. □

Betegn med K og V mængderne af kritiske punkter og kritiske værdier for polynomiet P.

Korollar B.5.4 *$P : \mathbb{C} \setminus K \longrightarrow \mathbb{C} \setminus V$ er en d-fold overlejring, hvor $d \geq 1$ er graden af P.*

B.5.2 Eksperimenter

Vi vil i resten af dette kapitel udelukkende se på andengradspolynomier af typen

$$P_c(z) = z^2 + c \; . \tag{B.7}$$

Opgave B.5.5
Find de kritiske punkter og de kritiske værdier for polynomier af typen P_c.

Lad $S(0, R)$ være en cirkel med radius R og centrum i 0. Ifølge lemma B.3.10 kan R vælges så stor at punkterne uden for $S(0, R)$ alle ligger i $A_{P_c}(\infty)$.

Det vil vise sig, at banen for P_c i det kritiske punkt 0 er af central betydning for udseendet af $J(P_c)$.

Aktivitet B.5.6 *Test v.h.a.* **`maple`** *hvordan $P_c^{-1}(S(0, R))$ ser ud, når den kritiske værdi ligger indenfor, udenfor eller på cirklen $S(0, R)$.*

Vink: Se worksheetet nedenfor hvor jeg anvender `implicitplot` funktionen samt, at $S(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\} \Rightarrow f^{-1}(S(0, R)) = \{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| = R\}$.

```
> with(plots):
> z:=x+I*y;
```

$$z := x + I\,y$$

```
> f:=z-> z^2+.5;
```

$$f := z \to z^2 + .5$$

```
> implicitplot(abs(f(z))=1, x=-2..2,y=-2..2, grid=[25,25]);
```

Aktiviteten B.5.6 præciseres i lemma B.5.11, som vi dog ikke viser.

Aktivitet B.5.7 *Beskriv forskellige opførsler af $P_c^{-k}(S(0, R))$, for forskellige værdier af c. $f \circ f$ skrives* **`f@f`** *i maple, f^k skrives* **`(f@@k)`**.

NB: **`Maple`** *har tendens til at gå i selvsving, hvis k bliver for stor (f.eks. større end 5).*

Eksperimenter sideløbende med programmet fra aktivitet B.3.24 for at få et billede af hvordan Juliamængderne for disse P_c'er ser ud.

B.5.3 Sammenhæng af $J(P_c)$

Dette afsnit præciserer eksperimenterne fra sidste afsnit og viser kapitelets hovedsætning. Nemlig at $J(P_c)$ er sammenhængende netop hvis banen $P_c(0)$ er begrænset, denne sætning vises i opgaverne B.5.12 og B.5.13.

Definition B.5.8
En lukket kurve uden selvgennemskæringer kaldes en simpel lukket kurve.

En lukket kurve med netop en selvgennemskæring kaldes en 8-tals kurve.

Bemærk at en 8-tals kurve bestemmer 2 simple lukkede kurver.

Vi får brug for følgende resultater, som vi ikke vil vise.

Sætning B.5.9 (Jordans kurvesætning)
Lad $\gamma \subset \mathbb{C}$ være en simpel lukket kurve. Komplementet $\mathbb{C} \setminus \gamma$ har to sammenhængskomponenter, hvoraf netop den ene er begrænset.

Et bevis findes i [13] p. 233.

Givet en simpel lukket kurve γ, vil vi omtale den begrænsede komponent af $\mathbb{C} \setminus \gamma$ som det *indre* af γ. Den ubegrænsede komponent kaldes det *ydre* af γ.

Sætning B.5.10 (Schönflies sætning)
Afslutningen af det indre af γ er homeomorft med den afsluttede disk $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Et bevis findes i [33] p. 367.

Lemma B.5.11 *Lad γ være en simpel lukket kurve og lad $P_c(z) = z^2 + c$. Da gælder:*

1. *Hvis den kritiske værdi c ligger i det indre af γ er $P_c^{-1}(\gamma)$ en simpel lukket kurve. Urbilledet ved P_c af det indre af γ er netop det indre af $P_c^{-1}(\gamma)$.*
2. *Hvis den kritiske værdi ligger på γ vil $P_c^{-1}(\gamma)$ være en 8-tals kurve. Urbilledet af det indre af γ er netop det indre af hver af de to simple lukkede kurver bestemt af $P_c^{-1}(\gamma)$.*

Bevis: Findes i [28]. □

Lemma B.5.11 kan bruges til at vise en sammenhæng mellem opførslen af Banen $(P_c^k(0))$ og topologien af $J(P_c)$.

Opgave B.5.12
Vis at $J(P_c)$ er sammenhængende, hvis mængden $\{P_c^k(0)\}$ er begrænset.

Vink: Vi skal bruge ideen fra de eksperimenterende opgaver, dvs. vi skal vise, at $P_c^{-k}(S(0,R))$ tilnærmer $J(P_c)$ for store k, og bruge lemma B.5.11 til at vise sammenhæng af J, under forudsætning af at mængden $\{P_c^k(0)\}$ er begrænset.

Vis at $R > 0$ kan vælges så stor at:

1. Samtlige punkter i det ydre af $S(0,R)$ opfylder at $|P_c(z)| \geq 2|z|$.
2. Punkterne $\{P_c^k(0)\}$ forbliver i det indre af $S(0,R)$.

Konkluder at $P_c^{-1}(S(0,R))$ er en simpel lukket kurve, og at samtlige punkter i det ydre af $P_c^{-1}(S)$ ligger i $A(\infty)$.

Vis at afslutningen af punkterne indenfor $P_c^{-1}(S(0,R))$ udgør en mængde D_1, der er homeomorf med en disk.

Brug induktion til at opnå en følge af diske $D_1, D_2, \dots, D_k, \dots$, hvor $\partial D_k = P_c^{-k}(S(0,R))$.

Konkluder at mængden $K = \bigcap_k D_k$ er enkeltsammenhængende og kompakt.

Vis at $\mathbb{C} \setminus K = A(\infty)$ og dermed at $\partial K = J$.

Sætning B.8.2 sikrer, at ∂K er sammenhængende.

Opgave B.5.13
Vis at hvis mængden $\{P_c^k(0)\}$ er ubegrænset, så er $J(P_c)$ ikke sammenhængende.

Vink: Ideen er som før at vælge en cirkel $S(0,R)$. Vælg denne gang et $R > 0$ sådan at:

1. Der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $P_c^n(0) \in S$.
2. Samtlige punkter udenfor S opfylder, at $|P_c(z)| \geq 2|z|$.

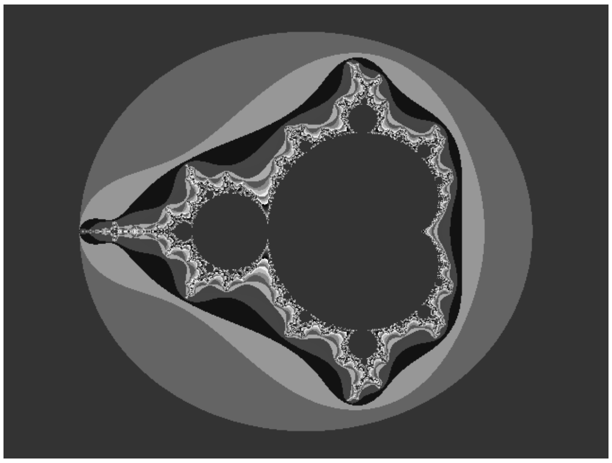
Konkluder, ved hjælp af lemma B.5.11, at $P_c^{-k}(S)$ er en simpel lukket kurve når $k \leq n-1$, og at $P_c^{-n}(S)$ er en 8-tals kurve.

Vis, at J er indeholdt i de to begrænsede sammenhængskomponenter af $\mathbb{C} \setminus P_c^{-n}(S)$.

Du mangler altså blot at vise, at der ligger noget af J i begge disse komponenter. Brug at $J^{-1}(P_c) = P_c$ og at $P_c : P_c^{-1}\text{indre}(P_c^{-(n-1)}(S)) \longrightarrow \text{indre}(P_c^{-(n-1)}(S))$ er en overlejring. Kan man så forestille sig, at de to punkter i $P_c^{-1}(z_0)$, hvor $z_0 \in J$, ligger i samme komponent af $\mathbb{C} \setminus P_c^{-n}(S)$?

B.6 Mandelbrotmængden

Definition B.6.1
Mandelbrotmængden $\mathcal{M}$ defineres som de $c \in \mathbb{C}$ for hvilke $J(P_c)$ er sammenhængende.



Figur B.6: Mandelbrotmængden

Opgave B.6.2
Beskriv en algoritme der producerer $\mathcal{M}$. Brug sætningerne fra sidste kapitel.

Aktivitet B.6.3 *Lav et program der tegner et billede af $\mathcal{M}$. Tag udgangspunkt i programmet fra aktivitet B.3.24 eller i worksheetet* ***`julia.mws`****, der kan hentes på* ***`misfeldt@math.ku.dk`****.*

B.7 Dynamikken på Fatoumængden

I dette kapitel undersøges Fatoumængden for et vilkårligt polynomium $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ af grad ≥ 2.

En sammenhængskomponent i Fatoumængden kaldes en *Fatoukomponent*.

Fatoukomponeneterne er åbne, fordi de er sammenhængskomponenter i Fatoumængden, der er åben jævnfør opgave B.3.9.

For at undersøge dynamikken på Fatoukomponenterne kan vi anvende redskaber fra topologi specielt lemma B.5.3 samt *Eulerkarakteristiken*, se [13] p 215.

Opgave B.7.1
Vis at en Fatoukomponent sendes surjektivt på en (evt. anden) Fatoukomponent, ved P.

Vink: Lad F_i være en Fatoukomponent. Kontinuitet af P sikrer, at $P(F_i)$ er sammehængende og derfor indeholdt i en Fatoukomponent F_j.

For at vise, at $P(F_i) = F_j$ bruges at kurvesammenhæng er det samme som sammenhæng for åbne mængder, lemma B.5.3 samt sætningen om løft af stier [9] p. 3.20. Se eventuelt på følgende diagram:

$$\begin{tikzcd} P^{-1}(F_j) \setminus K \arrow[r, "P"] & F_j \setminus V \\ F_i \setminus K \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, dotted, "P \circ i"'] & \end{tikzcd} \tag{B.8}$$

Hvor K og V betegner mængden af kritiske punkter og værdier for P, og i betegner inklusionsafbildningen.

B.7.1 Eulerkarakteristik

Eulerkarakteristikken[5] af et topologisk rum X, er en topologisk invariant i form af et tal $\chi(X) \in \mathbb{Z}$. En præcis definition af Eulerkarakteristik findes i [13] p. 215. Her vil jeg blot bemærke, at der er tale om en generalisering af den klassiske polyederformel (se [38]) $\chi(P) = F - E + V$, hvor F er antallet af flader, E er antallet af kanter, og V er antallet af hjørner, til en større klasse af topologiske rum.

Vi får brug for følgende resultater om Eulerkarakteristik, som vi ikke viser.

Sætning B.7.2
Lad F_i være en enkeltsammenhængende Fatoukomponent og lad M være en endelig punktmængde fra F_i. Da gælder

$$\chi(F_i) = 1$$
$$\chi(F_i \setminus M) = 1 + |M| \; .$$

[5] Eulerkarakteristikken kan faktisk kun defineres for en bestemt type af topologiske rum. Kravet er, at homologigrupperne $H_i(X)$ hver især er endeligt frembragt, samt at kun endeligt mange af dem ikke er nul.

Bevis: [8] p. 90. □

Sætning B.7.3
Lad $p : E \longrightarrow B$ være en d-fold overlejring (se [9]). Da haves følgende formel for Eulerkarakteristikken

$$\chi(E) = d\chi(B) \ .$$

Bevis: Se [13] p. 216 eller [56]. □

Opgave B.7.4
Bevis at en enkeltsammenhængende, fuldstændig invariant Fatoukomponent indeholder et kritisk punkt.

Hvis F_i ikke indeholder nogle kritiske punkter, kan du bruge sætning B.7.3 og lemma B.5.3.

B.7.2 Antallet af kritiske punkter for et polynomium

Definition B.7.5
Lad Ω være et område. Givet $z_0 \in \Omega$ og et polynomium $P : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ med grad d. Da defineres defekten δ_{z_0} *i punktet z_0 ved $\delta_{z_0} = d - |P^{-1}(z_0)|$, hvor $|P^{-1}(z_0)|$ er antallet af urbilleder for z_0 (talt uden multiplicitet). Den samlede defekt af $P : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ defineres som $\delta_{P,\Omega} = \sum_{z\in\Omega} \delta_z$.*

Bemærk at algebraens fundamentalsætning giver, at δ_{z_0} kun er forskellig fra 0 for endeligt mange tal z_0, hvorfor $\delta_{P,\Omega}$ er veldefineret.

Sætning B.7.6
Et polynomium P af grad d opfylder $\delta_{P,\Omega} \leq d-1$. Specielt er $\delta_{P,\mathbb{C}} \leq d-1$.

Bevis: Lad z_0 være et punkt med positiv defekt δ_{z_0}. Det vil sige, at ligningen $P(z) = z_0$ har $d-\delta_{z_0}$ løsninger. Sæt $d-\delta_{z_0} = n$ og bemærk at $P(z)-z_0 = 0$ har n løsninger $a_1, \ldots, a_n$ og at disse løsningers samlede multiplicitet er $d = \delta_{z_0}+n$. $P(z) - z_0$ kan altså skrives

$$P(z) - z_0 = (z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2}\cdots(z-a_n)^{k_n} A \ ,$$

hvor A er en konstant og $\sum_{i=1}^{n} k_i = d$. Differentieres ligningen med hensyn til z, bliver venstresiden blot $P'(z)$, og højresiden kan beregnes ved brug af produktformlen. Ved at sætte led af formen $(z-a_i)^{k_i-1}$ udenfor parantes kan vi opnå

$$\begin{aligned} P'(z) \quad = \quad & (z-a_1)^{k_1-1}(z-a_2)^{k_2-1}\cdots(z-a_n)^{k_n-1} \\ & \big(Ak_1(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_n) + \cdots \\ & +Ak_i(z-a_1)\cdots(z-a_{i-1})(z-a_{i+1})\cdots(z-a_n) + \cdots \\ & +Ak_n(z-a_1)\cdots(z-a_{n-1})\big) \ . \end{aligned}$$

Denne ligning viser, at punktet z_0 med defekt δ_{z_0} giver andledning til $\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1) = d - n = \delta_{z_0}$ nulpunkter (talt med multiplicitet) for P'. Den totale defekt er derfor højst $\deg(P') = d - 1$. $\square$

Opgave B.7.7
Bevis at der højst kan være en enkeltsammenhængende, fuldstændig invariant Fatoukomponent.

Vink: Betegn de kritiske punkter i F_i med K og de kritiske værdier med V. Udtryk $|K| - d|V|$ ved hjælp af defekten δ_{P,F_i}. Husk at F_i er fuldstændig invariant under P.

Brug at $P : F_i \setminus K \longrightarrow F_i \setminus V$ er en d-fold overlejring.

Aktivitet B.7.8 *Forsøg ved brug af programmet* **`fractint`** *at gætte på hvor mange Fatoukomponeneter, der kan være. I kan nøjes med at se på familien* $\{P_c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. *Den kan med fordel undersøges i Mandelbrot vinduet: Tryk space og en lille kopi af Juliamængden for* P_c *vil dukke op i hjørnet af skærmen, en prik angiver hvor i* $\mathcal{M}$ *c ligger. Lad c bevæge sig rundt i parameterplanen (Mandelbrotmængden) og bemærk, hvad der sker med* $J(P_c)$.

Opgave B.7.9
Vis at Fatoumængden består af en, to eller uendeligt mange komponenter.

Vink: Antag at Fatoumængden består af et endeligt antal komponenter skarpt større end to.

Mindst to af disse komponenter må være begrænsede.

Bevis følgende lemma:

Lemma B.7.10 *Enhver begrænset Fatoukomponent er enkeltsammenhængende.*

Vink til lemma:

Hvis F_i ikke er enkeltsammenhængende så findes der en *løkke* [9] $\ell \in F_i$, der omkranser en del af Juliamængden. Planen er at vise, at det *ikke* kan lade sig gøre.

Brug at F_i er en åben delmængde af planen til at se, at ℓ kan antages at være stykkevis *akseparallel* (eller blot stykkevis glat) [9] p. 264.

Cauchys integralformel ([50] p. 218) giver den ønskede modtrid.

B.8 Appendix til notematerialet: Enkeltsammenhængende delmængder af kuglen S^2

Målet med dette afsnit er at vise sætning B.8.2, der bruges i opgave B.5.12. Sæt

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\ \}.$$

S^2 er altså enhedskuglen i $\mathbb{R}^3$. Der gælder følgende sætning:

Sætning B.8.1
Lad D være en åben sammenhængende delmængde af S^2. Da er følgende betingelser ækvivalente.

1. *D er enkeltsammenhængende.*
2. *$\complement D$ er sammenhængende.*
3. *∂D er sammenhængende.*

Bevis: Beviset står i [43] p. 134. □

Vi skal bruge følgende konsekvens:

Sætning B.8.2
Lad K være en kompakt delmængde af S^2. Hvis K er enkeltsammenhængende, så er ∂K sammenhængende.

Bevis: Dette følger af sætning B.8.1 og nedenstående lemma. □

Lemma B.8.3 *Hvis en kompakt delmængde K af S^2 er enkeltsammenhængende, så er komplementet $S^2 \setminus K$ en åben og sammenhængende delmængede af S^2.*

Bevis: Da K er enkeltsammenhængende giver [32] p. 193, at $H^1(K) = 0$. K er en delmængde af S^2 og kan derfor indlejres naturligt i $\mathbb{R}^3$. [13] p. 539 giver at $H^1(K) = \check{H}^1(K)$, så $H^1(K) = 0$. Poincare- Alexander- Lefschetz-dualitet! giver så at

$$\check{H}^1(K) = H_1(S^2, S^2 \setminus K)\ ,$$

så $H_1(S^2, S^2 \setminus K) = 0$.

Derfor vil parfølgen ([13] p. 188)

$$\cdots \longrightarrow H_1(S^2, S^2 \setminus K) \longrightarrow H_0(S^2 \setminus K) \longrightarrow H_0(S^2) \longrightarrow \cdots$$

reducere til

$$0 \longrightarrow H_0(S^2 \setminus K) \xrightarrow{j} H_0(S^2) \longrightarrow \cdots$$

Eksakthed giver at $\ker j = 0$, så $H_0(S^2 \setminus K)$ er en undergruppe af $H_0(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ (S^2 har en sammenhængskomponent). $H_0(S^2 \setminus K)$ er altså enten triviel eller isomorf med $\mathbb{Z}$. Hvis $H_0(S^2 \setminus K)$ er triviel er $S^2 \setminus K = \emptyset$, så vi kan antage at $H_0(S^2 \setminus K) \simeq \mathbb{Z}$, hvorfor $S^2 \setminus K$ er sammenhængende. $\square$

Opgave B.8.4 (Åben opgave)
Find et bevis for sætning B.8.2, der ikke anvender algebraisk topologi. Du kan måske få glæde af at se på beviset for sætning B.8.1 i [43].

Bemærk: Jeg ved ikke om denne opgave kan løses.

Bilag C

Kursusdagbog

I denne dagbog angives dag for dag, hvordan kurset skred frem. Samtlige referencer i dette bilag er til opgaver, aktiviteter og afsnit i kursusmaterialet (bilag B).

Mandag: Vi startede med en kort introduktion til dynamiske systemer og holomorf dynamik, samt en gennemgang af den arbejdsform kurset skulle køre efter, herunder en præcisering af hvad der krævedes af deltagerne. Derefter gik vi i datalokale og arbejdede med afsnit 2. Alle tre grupper nåede aktiviteterne 2.1-2.4, og den ene gruppe nåede tillige ekstraopgaven 2.5.

Efter frokost startede vi på afsnit 3. Vi sprang aktivitet 3.1 over, og gik direkte til opgaverne. Der blev arbejdet med 3.3, 3.4, 3.7, 3.9, og 3.11. En gruppe nåede desuden opgave 3.12. kl. 14.00 gik vi hver for sig og indskrev løsningerne. De udarbejdede løsninger blev derefter opslået på kursets hjemmeside og jeg sendte en mail rundt hvor jeg gjorde opmærksom på at løsningerne var opslået, hvilke kursister der havde løst opgave 3.12 og at vi startede med opgave 3.13 tirsdag.

Tirsdag: Efter en kort opsamling af gårsdagens program arbejdede vi med opgave 3.13 og 3.14 samt 3.18-3.21. Vi havde problemer med at løse opgave 3.13. Det resulterede i at jeg udleverede en kopi af siderne 49-55 i [8], der løser opgaven. Om eftermiddagen arbejdede vi med afsnit 3.5, hvor opgaven var, at lave et program der viste den udfyldte Juliamængde. Alle sad ved deres egen terminal, og lavede et program der fungerede. Efter kl. 14.00 blev der afrapporteret, vi sluttede kl. 16.00.

Onsdag: Vi regnede 3.23 og alle opgaverne i afsnit 4. Det gik generelt fint. Opgaven 4.8 var lidt mere udfordrende end jeg umiddelbart troede, men alle grupperne løste opgaven på egen hånd. Efter frokost blev der afrapporteret og fra kl. 15.00 løste vi den første begrebskortsopgave.

Torsdag: Vi arbejdede med afsnit 5 og 6, og lagde ud med computer aktiviteterne der virkede rigtigt godt og illustrativt. I aktivitet 5.6 var kursusmaterialets implicitte valg af $R = 1$ dog problematisk, $R = 5$ ville f.eks.

være et bedre valg. Problemet var at diskene $D, f^{-1}(D), f^{-2}(D), \ldots$ ikke kom til at udgøre en dalende følge, som ønsket. Her betyder D den disk der har cirklen $S(0,R)$ som rand.

Vinket til opgave 5.12. kunne godt være klarere omkring at man opnår en *dalende* følge af mængder $D_1, D_2, \ldots$.

Alle lavede et velfungerende program der løste opgave 6.2 og aktivitet 6.3. Fra kl. 14.00 blev der afraporteret.

Fredag: Vi arbejdede med afsnit 7, og regnede opgaverne 7.4, 7.7, 7.9. Der var en mindre fejl i sætningen omkring at et polynomium kan betragtes som en overlejring: i stedet for $P : K \longrightarrow V$ burde der have stået $P : P^{-1}(V) \longrightarrow V$ de kursisterne fandt og rettede selv denne fejl. Efter frokost blev der afrapporteret og fra kl. 14.00 blev gennemførte vi en test (bilag D), der var ca. 50 minutter til at besvare denne. Derefter løste vi den sidste begrebskortsopgave.

Umiddelbart herefter tog vi en uformel snak om forløbet. Der var generelt tilfredshed med kurset, flere af kursisterne gav udtryk for at den store vægt på løsning af opgaver var inspirerende, men at kravet om at løsningerne blev skrevet ind og afleveret med det samme gjorde det til en hård arbejdsform. Der var dog stort set enighed om at en eller anden form for individuel afrapportering er vigtig, flere gav udtryk for at tingende faldt mere på plads i denne fase. Omkring gruppearbejdet var der list blandede udmeldinger. En af de tre grupper led under en niveauforskel på deltagerne. Deltagerne i de to andre grupper fandt, at gruppearbejdet var en god arbejdsform.

Bilag D

Spørgeskemaundersøgelse af begrebet normal familie

Denne spørgeskemaundersøgelse indeholder dels nogle spørgsmål hvor kursisterne bedes svare på hvor meget de kendte til begrebet normale familer af funktioner, inden dette kursus. Derudover indeholder det en lille prøve om dette emne. Det skal bemærkes at i det skema som kursisterne fik udleveret hed opgave D.0.5 blot opgave 1, D.0.6 opgave 2, D.0.7 opgave 3 og opgave D.0.8 hed opgave 4.

Spørgeskema

Formålet med denne undersøgelse er at følge din læring af udvalgte begreber. Formålet er *ikke* at evaluere dig. Resultater af undersøgelsen vil kun blive viderebragt på en måde så dit navn ikke fremgår.

Navn:

Forudsætninger

Hvilke af følgende kurser har du fulgt/bestået, og hvornår?

- 2AN
- 2KF
- 3GE
- 3GT

Har du fulgt/bestået kurser med lign. indhold, men med et andet navn (f.eks. 2MA).

Har du fulgt andre kurser, eller skrevet projekter, om kompleks funktionsteori (hvis ja, beskriv kort indholdet)?

Har du set begrebet *normale familier af funktioner* før dette kursus?

Hvis ja, hvor godt kendte du begrebet (har du f.eks. haft et kursus hvor begrebet indgik, eller har du blot set det i et nummer af FAMØS)?

Opgaver

Opgave D.0.5

Vis at familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *hvor* $f_k(z) = \frac{1}{k}z$, *er normal på hele* $\mathbb{C}$.

Opgave D.0.6

Definer hvad det vil sige at en følge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *af funktioner* $f_i \in H(\Omega)$ *konvergerer uniformt imod en funktion* f, *på* $U \subset \Omega$.

Opgave D.0.7

For hvilke punkter $z_0 \in \mathbb{C}$ *er familien* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *hvor* $f_k(z) = kz$, *normal i* z_0*?*

Opgave D.0.8

Lad $\omega \in \mathbb{C}$ *være et tiltrækkende fikspunkt for polynomiet* $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. *Sæt*

$$A_P(\omega) = \{z \in \mathbb{C} \mid P^k(z) \longrightarrow \omega\} \ .$$

Vis at $\partial A_P(\omega) = J(P)$.

Vink: En funktion $f \in H(\Omega)$, der er konstant på en åben mængde $U \subset \Omega$, er konstant på hele Ω.

Bilag E

Opgaver om begrebskort

Dette bilag består af de opgaver om begrebskort der er udgangspunkt for undersøgelsen i kapitel 5. Det to opgaver havde samme forside, denne er angivet i figur E.1. Onsdagens opgave vises i figur E.2 og fredagens i figur E.3.

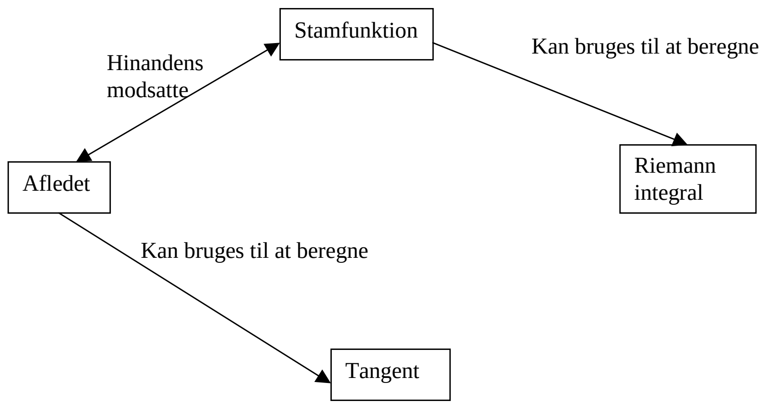
Begrebskort

Formålet med denne undersøgelse er at følge din læring af udvalgte begreber fra kurset. Formålet er *ikke* at evaluere dig. Resultater af undersøgelsen vil kun blive viderebragt på en måde, så dit navn ikke fremgår.

Navn:

På næste side har jeg angivet nogle af de begreber, vi har arbejdet med i kurset. Du skal konstruere et *begrebskort* udfra disse begreber. Du kan søge inspiration i nedenstående, meget simple, eksempel.

Eksempel på et begrebskort der beskriver nogle hovedpunkter fra integral og differentialregning.



Figur E.1: Denne figur udgjorde forsiden til begge opgaver om begrebskort. Om onsdagen blev den efterfuldt af figur E.2 og om fredagen afE.3

Nedenfor er angivet nogle af de begreber vi har arbejdet med i kurset. Konstruer et begrebskort der indeholder disse begreber.

Klip kasserne ud og klæb dem op på vedlagte A3 ark. Angiv, med pile eller streger, de sammenhænge mellem begreberne, som du kan finde. Beskriv så præcist som muligt disse sammenhænge.

$\boxed{A_P(\infty)}$

$\boxed{\text{Fatoumængden}}$

$\boxed{\text{Juliamængden}}$

$\boxed{\text{Normalitet af } \{P^k \mid k \in N\}}$

$\boxed{\text{Banen } P_c^k(z)}$

Figur E.2: Onsdagens opgave.

Nedenfor er angivet nogle af de begreber vi har arbejdet med i kurset. Konstruer et begrebskort der indeholder disse begreber.

Klip kasserne ud og klæb dem op på vedlagte A3 ark. Angiv, med pile eller streger, de sammenhænge mellem begreberne, som du kan finde. Beskriv så præcist som muligt disse sammenhænge.

Juliamængden

Det kritiske punkt for P_c

Mandelbrotmængden

$A_P(\infty)$

Tiltrækkende og frastødende periodiske punkter

Fatoumængden

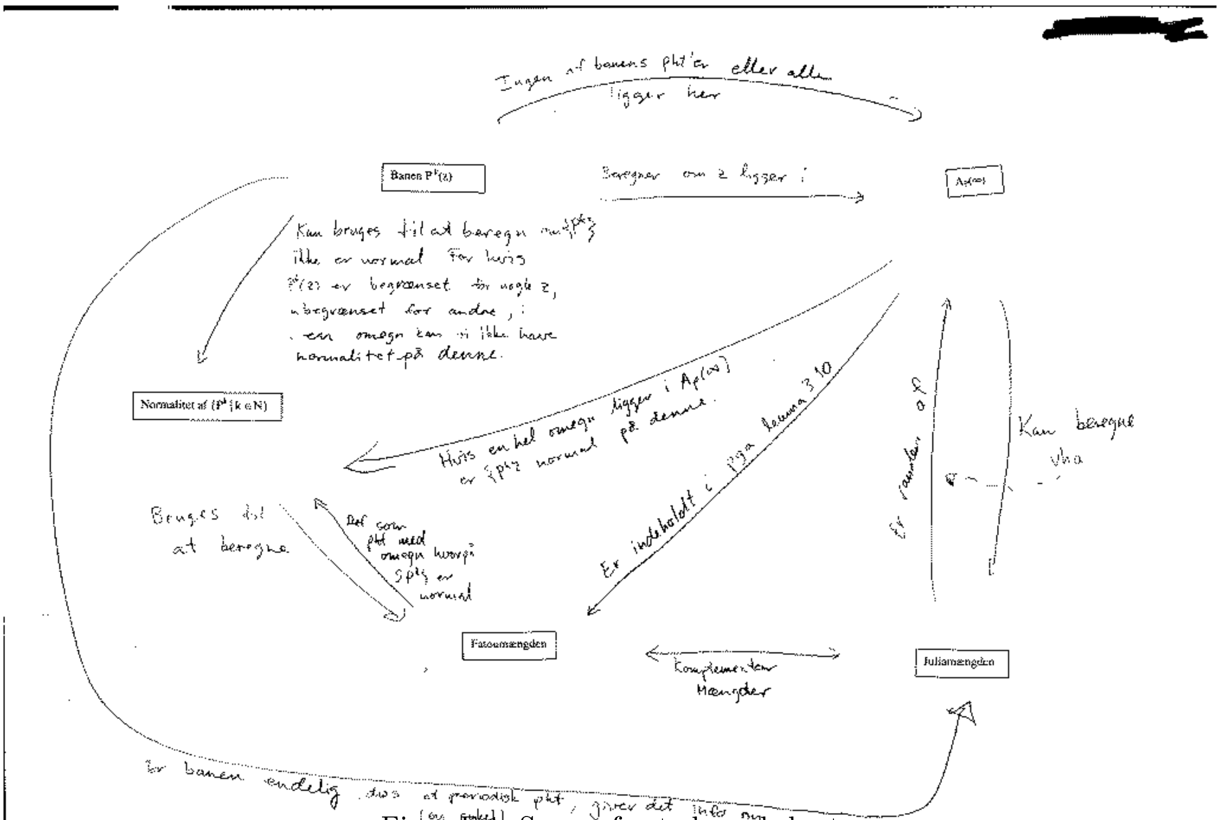
Normalitet af $\{P^k \mid k \in N\}$

Banen $P_c^k(z)$

Figur E.3: Fredagens opgave.

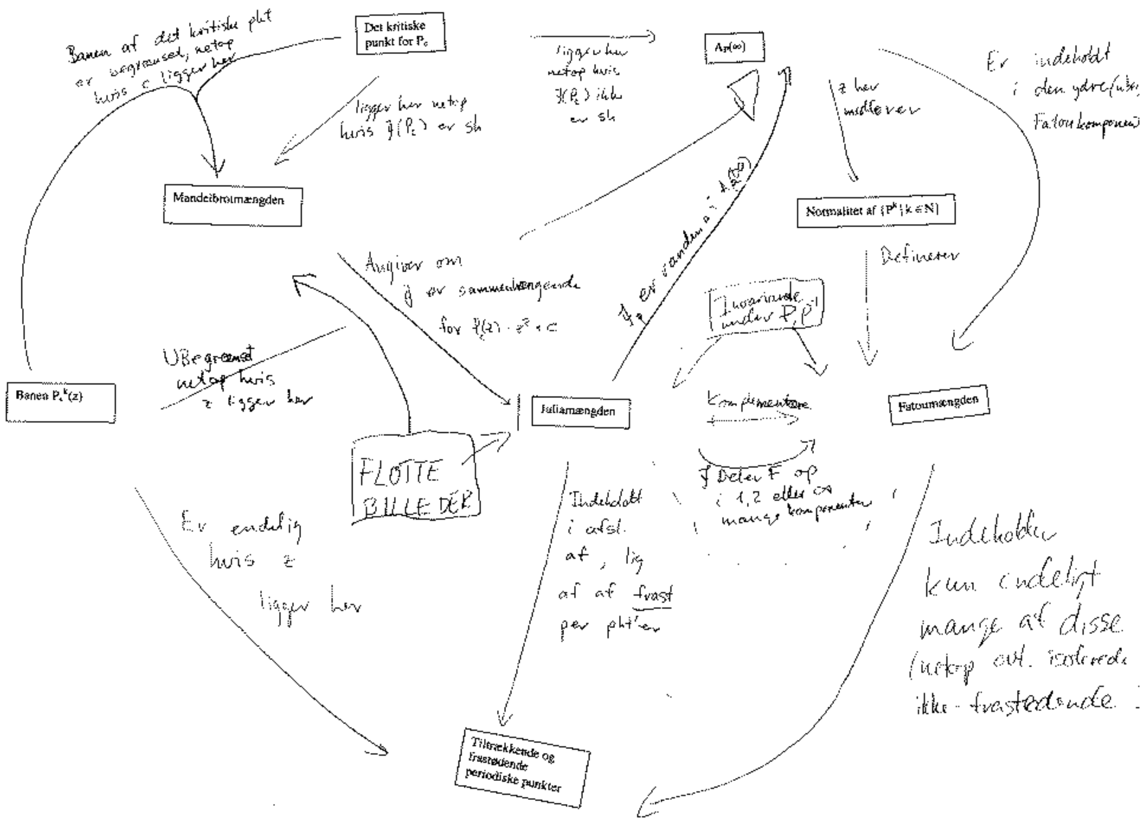
Bilag F

Begrebskort for Peter og Søren

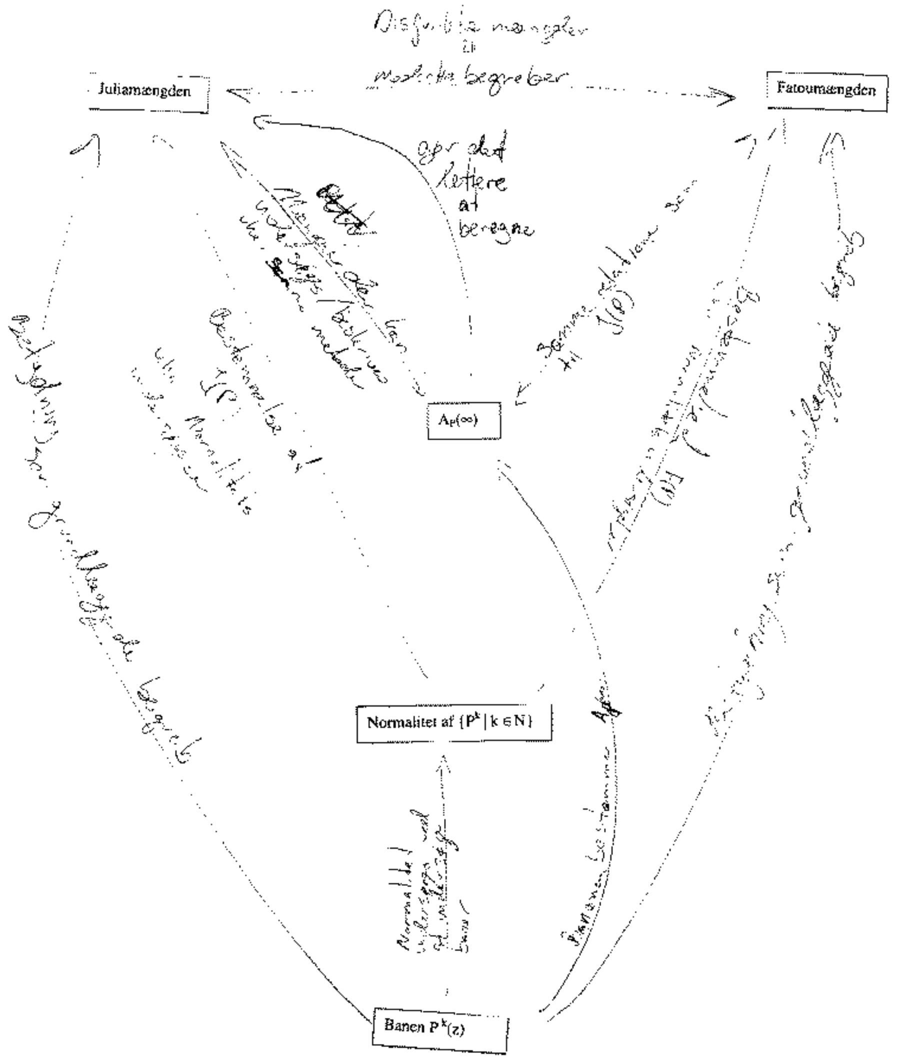


Figur F.1: Sørens første begrebskort

[redacted]

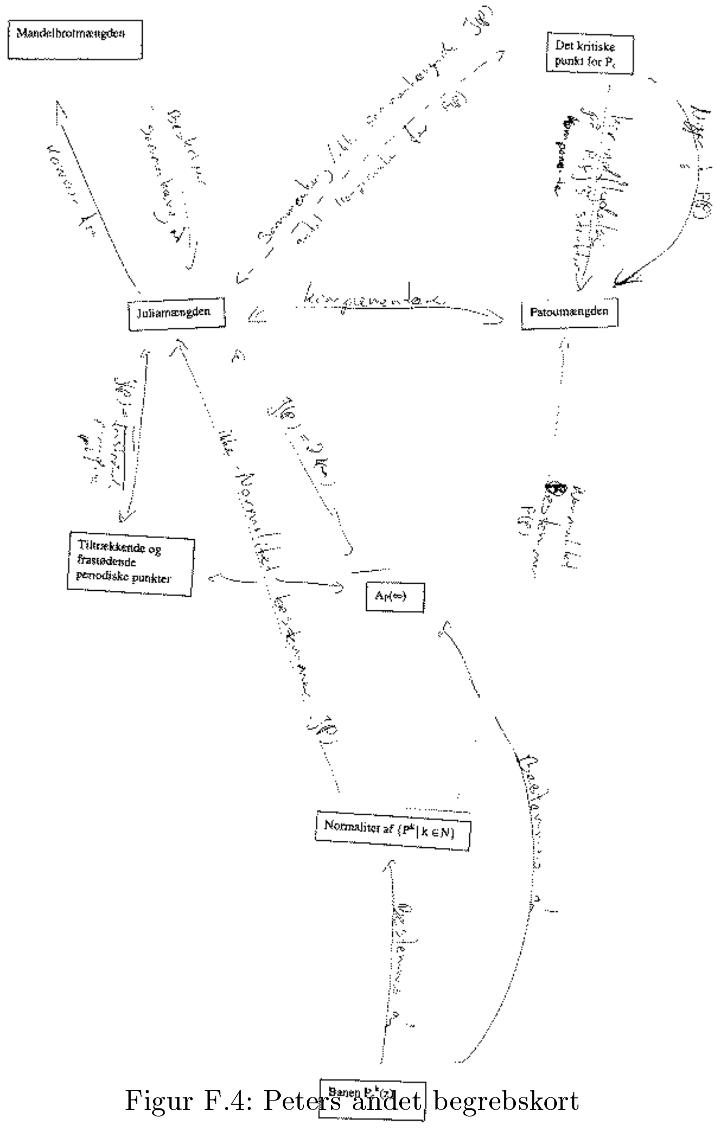


Figur F.2: Sørens andet begrebskort



Figur F.3: Peters første begrebskort

[redacted]



Figur F.4: Peters andet begrebskort

Bilag G

Spørgeguide

G.1 Normale familier

Målet er at undersøge den studerendes forståelse af begrebet normale familier af funktioner. Jeg tager udgangspunkt i den studerendes besvarelse af opgaverne 1 og 3 fra fredagens spørgeskema.

Sætninger angivet i [sætning] afhænger af respondentens besvarelse og skal fastlægges inden interviewet.

G.1.1 Indledende spørgsmål

Dette interview omhandler din forståelse at nogle af de begreber vi har arbejdet med i kurset "Diskrete dynamiske systemer". Det er vigtigt at du forstår hvad jeg spørger om, så sig til hvis der er spørsmål du ikke forstår.

Spørgsmål G.1.1 *Hvad betyder følgende notation:*

$$\{f_k\}$$

G.1.2 Spørgsmål til opgave 1

De næste spørgsmål tager udgangspunkt i din besvarelse af opgave 1. Læs din besvarelse igennem og se om du har nogen tilføjelser eller kommetarer.

Spørgsmål G.1.2 *Du viser at $\{f_k\}$ er en normal familie af funktioner, hvad er det du skal checke?*

Spørgsmål G.1.3 (hvis spørsmål G.1.2 er besvaret korrekt) *Er det det du har checket?*

Spørgsmål G.1.4 (hvis spørsmål G.1.2 er besvaret forkert) Afdæk præcist hvad offeret forstår ved en normal familie af funktioner; F.eks. kan der opsummeres: *En familie af funktioner er altså normal netop hvis …*

Spørgsmål G.1.5 (hvis G.1.2 er besvaret korrekt men G.1.3 er besvaret forkert) *Se på følgen* $f_1, f_2, f_1, f_2, \ldots$ *konvergerer den?*

Kan $\{f_k\}$ *så være normal?*

G.1.3 Spørgsmål til opgave 3

De næste spørgsmål tager udgangspunkt i din besvarelse af opgave 3. Læs din besvarelse igennem og se du har nogen tilføjelser eller kometarer.

(her har jeg absolut et håb om at fejl der går igen rettes)

Hvis der vises god forståelse for normalitet enten i opgave eller rettelse så springes direkte til spørgsmål G.1.10.

Spørgsmål G.1.6 *Du viser at* $\{f_k\}$ *er en normal på [hvad der nu er vist ex:* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*] , hvad er det du skal checke?*

Spørgsmål G.1.7 (hvis spørsmål G.1.6 er besvaret korrekt) *Er det det du har checket?*

Spørgsmål G.1.8 (hvis spørsmål G.1.6 er besvaret forkert) Afdæk præcist hvad offeret forstår ved en normal familie af funktioner; F.eks. kan der opsummeres:

En familie af funktioner er altså normal netop hvis ... ?

Spørgsmål G.1.9 (hvis G.1.6 er korrekt men G.1.7 forkert) *Se på følgen* $f_1, f_2, f_1, f_2, \ldots$ *konvergerer den?*

Kan $\{f_k\}$ *så være normal?*

Spørgsmål G.1.10 (hvis svares ikke-normal kun i punktet 0) *Hvad fortæller Montels sætning dig om* $\{f_k\}$ *omkring 0?*

Spørgsmål G.1.11 (hvis der fastholdes ikke-normal i en bestemt omegn) *Hvorfor er det netop denne omegn der er interessant?*

G.2 Spørgsmål til begrebskort

Inden interviewet identificeres de steder på begrebskort hvor der er forskel på onsdag og fredag. Mit mål med interviewet skal så være at finde grunden til denne ændring.

Sætninger angivet i [sætning] afhænger af offerrets begrebskort og skal fastlægges inden interviewet.

Antag der er en pil mellem begreb X og Y om onsdagen og at denne er væk fredag, eller omvendt.

Spørgsmål G.2.1 *Fortæl mig om X i forhold til Y.*

Opfølgning: *er det f.eks.* [som begrebskortet onsdag antyder] . *Eller* [som begrebskortet fredag antyder]

VIGTIGT: sørg for at spørgsmål 1 besvares så grundigt at du ved præcist hvordan offeret ser begreberne i forhold til hinanden inden du viser kortene frem

Spørgsmål G.2.2 Vis begrebskortene, og bed så respondenten om at forklare forskellen på onsdagen og fredagens begrebskort, med hesyn til begrberne X og Y.

Her er dine begrebskort fra onsdag og fredag. Prøv om du kan forklare relationen mellem X og Y som den fremgår af onsdagskortet.

Og af fredagskortet.

Kan du forklare forskellen?

følg gerne op så forskelen bliver slået fast.

f.eks.: men du troede altså onsdag ... ?

Spørgsmål G.2.3 Såfremt respondenten forklarer en forskel mellem opfattelser fredag og onsdag spørges til hvornår denne forskel opstod.

Kan du huske hvornår du ændrede opfattelse? Måske en bestemt situation?

Bilag H

Interview med Søren[1]

Dette bilag indeholder en transskription af mit interview af Søren. I bilag K findes en skematisk gennemgang af interviewet. Bemærk at i det spørgeskema som kursisterne fik udleveret hed opgave D.0.5 blot opgave 1, D.0.6 opgave 2, D.0.7 opgave 3 og opgave D.0.8 hed opgave 4. Derfor refereres der i interviewet til opgavenumrene 1-4, fremfor D.0.5-D.0.8.

Transskription

Interviewer: Interviewet skal handle om nogle af de ting vi lærte om i sidste uge ... på kurset. Jeg starter med at stille dig følgende spørgsmål: Hvad betyder den her notation? Indledning/notation

Viser notationen:

$$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Søren: det betyder en mængde, af funktioner f_k, som er ikke ordnet.

Interviewer: en ikke ordnet mængde af funktioner. Vi kalder det også?

Søren: en familie!

Interviewer: ja, godt det var det. Det næste spørgsmål jeg vil stille dig, det handler om din besvarelse af opgave 1 fra spørgeskemaet i fredags. Så hvis du starter med at læse besvarelsen igennem og ser om der er noget du har at tilføje eller nogle kommentarer til din besvarelse af opgave 1. opg. 1

Søren: Nej, det har jeg ikke, tror jeg ikke.

Interviewer: Du har ikke noget at tilføje.

Søren: Nej.

Interviewer: Godt. Du viser at den der familie $\{f_k\}$ er normal,

Søren: Ja

Interviewer: Hvad er det helt præcist man skal checke, når man checker det? Personlig begrebsdefinition

[1]Navnet ændret.

Søren: man skal enten vise at enhver følge fra familien har en delfølge der konvergerer uniformt imod en eller anden funktion, holomorf funktion, eller at en over f_k's delfølge eller f_k konvergerer uniformt imod 0.

Interviewer: ja

Søren: så det er de to

Interviewer: Det er de to ting man skal checke

Interviewer: er det det, du har checket her

(pause)

Søren: Nej jeg bemærker jo at det er nok at vise at den der store, hvis man bare tager følgen f_k, den konvergerer mod 0. Påstand

Interviewer: ok så hvad er det for en følge du kigger på her. Det kan være du kan skrive det her Uddybning

Søren: det er følgen:

(Søren noterer)

$$(f_k) = (f_1, f_2, f_3, \dots) \tag{H.1}$$

Interviewer: Du kigger på den følge. Du tager den

Søren: Oplagte følge. Altså de er jo allerede nummererede.

Interviewer: Ok, og så bemærker du... hvis du prøver at gentage den bemærkning?

Søren: Ja jeg bemærker det er nok at vise at det den der følge f_n går uniformt imod 0, fordi hvis man tager en eller anden følge i familien f_k så er den enten en delfølge, ja den har enten en konstant delfølge hvis den rammer et punkt uendeligt mange gange, Bevis

Interviewer: ok.

Søren: Hvis den ikke har det, jamen så har den så at sige en voksende delfølge, dvs. en delfølge af den der følge der er en delfølge af den der (peger på (H.1)).

Interviewer: ok så den har en følge hvor,

Søren: hvor indekset ligesom vokser.

Interviewer: godt

Søren: og hvis den der oprindelige følge f_k går imod 0 så går enhver delfølge også uniformt imod 0.

Interviewer: Prøv lige at gentage det.

Søren: så er det at vise at den der f_k går imod 0 fordi enhver delfølge af den der f_k den også går imod 0.

Interviewer: ok, godt. Ja det synes jeg er fint. Vi går videre til og kigger på din besvarelse af opgave 3. Her vil jeg igen bede om du har noget at tilføje eller nogle kommentarer hvis du bare læser det her igennem opgave 3. Opgave 3

(pause)

Søren: Ja men det er jo lidt af det samme, det er nok at gøre det jeg gør. Genkender

Interviewer: Ok så hvis du vil beskrive hvad det er du gør?

Søren: Ja, men jeg viser at 1 over f_k der går imod 0 uniformt ikke, så de går imod uendeligt. Refererer

Interviewer: Så du ser på følgen der (peger på (H.1).

Søren: Ja, 1 over den.

Interviewer: 1 over den og ser den går imod 0.

Søren: og så er det den samme kommentar som før, det er nok fordi enhver følge fra familien er enten en delfølge eller også en delfølge af den her

Interviewer: eller?

Søren: den har en konstant delfølge.

Interviewer: er det sådan enten eller, eller?

Søren: nej den kan godt have begge dele.

Interviewer: Ok nu skal jeg se hvad jeg skal spørge dig om. Du må godt sige præcist hvad er det din konklusion er i opgave 3? Konklusion

Søren: at den der familie er normal i alle punkter bortset fra 0.

Interviewer: så skal jeg lige høre, hvad fortæller Montels sætning dig om familien f_k omkring 0. Montel

Søren: hvordan er det nu, hvis den.. Ja omkring 0 der er den ikke normal så der rammer vi alt på nær højst et punkt.

Interviewer: lige præcis ja.

Interviewer : Vi går videre til interviewets anden afdeling som handler om begrebskortene som du lavede. Det jeg skal spørge dig om er, at jeg gerne vil høre dig fortælle om hvordan du opfatter banen i et punkt i forhold til selve familien, funktionsfamilien P^k. Altså det er banen på den ene side og familien, måske specielt normalitet af familien, på den anden side . Vil du sige noget om de to begreber, hvorvidt de hænger sammen, hvordan, eller om de overhovedet hænger sammen. Beskriv hvordan de hænger sammen. Begrebskort, indledning Banen i forhold til familien

Søren: ja altså..

Interviewer: jeg har skrevet her: fortæl mig om banen i forhold til familien.

Søren: Hvis banen der den går imod uendelig så er familien normal omkring z, den der A_p uendelig det er en åben mængde så, det er det der lemma 3.10 der siger hvis man er langt ude så bliver man ved med at være langt ude. og så hvis vi ligger der i A uendelig så opfylder vi jo kravet for 2, som giver normalitet. Med mindre selvfølgeligt at det er en konstant følge. Så hvis banen går imod uendelig så er familien normal omkring z. Banen imod uendelig $\Rightarrow$ normalitet i punktet

Interviewer: ok

Søren: Hvordan så hvis den ikke går imod uendelig. Så kan vi ikke sige noget. Banen ikke imod uendelig

Interviewer: Godt, så vil jeg godt have at du lige kigger på, jeg har dine begrebskort fra onsdag og fredag her. Koncentrer dig om de to begreber der står på Ser begrebskort papiret, d.v.s. banen og normalitet af den der familie. Prøv at beskrive ligheder og forskelle på onsdag og fredagskortet

Søren: Mellem de to der

Interviewer: Start med at forklare den relation der fremgår af onsdagskortet.

Søren: Den der pil, og den tilsvarende pil herovre den er der slet ikke. Ser forskel

Interviewer: Ok, hvis du starter med at forklare det du mente da du,-

Søren: Nå her. Det er netop, der forklarer jeg det der med at, hvis banen er begrænset for nogle z i en eller andre omegn, men ubegrænset for andre så kan vi ikke have normalitet, fordi så kan vi ikke konvergere uniformt imod hverken imod uendeligt, så at sige, eller imod en eller anden holomorf funktion. banen begrænset?

Interviewer: Ok, det var ikke helt det du sagde før.

Søren: Nej før der sagde jeg, hvis det løber imod uendeligt så har vi normalitet, det har jeg ikke noteret her, eller måske lidt hvis man går lidt omveje måske alligevel, via A uendelig. Reflektion Via $A_p(\infty)$

Interviewer: så onsdag siger du prøv at opsummere.

Søren: Der siger jeg noget med at banen af de punkter i en eller anden omegn kan sige noget om hvornår vi ikke har normalitet. Opsummerer onsdag

Interviewer: fordi?

Søren: Fordi, jamen hvis der er nogen der går imod uendelig og nogen der ikke går imod uendelig så kan vi ikke have normalitet.

Interviewer: Så går vi til fredagskortet. Fredagskort, banen ubegrænset giver normalitet i pkt.

Søren: Ja, der har jeg. Jeg siger at hvis banen er ubegrænset så ligger z i A uendelig og derfor er familien normal.

Interviewer: Det du faktisk specielt kunne vise.

Søren: det var det første jeg nævnte.

Interviewer: Det kan være vi lige skal bemærke til båndoptageren at du har ikke tegnet en direkte pil imellem de to begreber på fredagskortet.

Søren: nej

Interviewer: Den går via A uendelig.

Søren: Den bane rundt er der sådan set også på onsdagskortet. Onsdag via $A_p(\infty)$

Interviewer: så der er ingen forskel på onsdag og fredag, med hensyn til det du forklarede til at starte med.

Søren: Nej, jeg syntes det blev klarere for mig onsdag til fredag at den der [A uendelig] er en åben mængde, jeg har på onsdagskortet nævnt at det er en hel omegn der skal ligge i A uendelig, men det er nok at bare punktet ligger der fordi så vil en omegn automatisk gøre det fordi A uendelig er åben. Refleksion, $A_p(\infty)$ åben mængde

Interviewer: ok

Søren: så der er sket lidt udvikling der.

Interviewer: men den direkte pil du har om onsdagen, hvor tror du den er blevet af om fredagen.

Søren: øhh, det ved jeg ikke, den er.. Jeg overvejede lidt om det var noget med at jeg havde nævnt at z så ligger i Juliamængden, hvis der er det der med at der både er nogle der går imod uendeligt og nogen der ikke gør det, i en omegn af z, men det..

Interviewer: hvis du;

Søren: Jo det har jeg alligevel, jeg har skrevet her at Juliamængden det er randen af den her A uendelig og det er jo netop de punkter hvor det både løber imod uendelig og ikke gør, altså på randen. Deduktion

Interviewer: jo

Søren: så det har jeg ligesom sådan måske inkluderet i Juliamængden.

Interviewer: ja, men har du noteret det på onsdagskortet også.

Søren: Der har jeg faktisk også skrevet at det er randen af den der.

Interviewer: Ok så du har ligesom om onsdagen haft behov for at,

Søren: at skrive det to gange, ja. Jeg vil ikke udelukke at det ikke lidt er et tilfælde hvordan jeg bare har klistret dem op og så senere, fredag der er der så mange pile og så; det har jeg måske allerede ??? (glemt?) Tilfælde?

Interviewer: Så du kan ikke huske?

Søren: Jeg kan ikke huske, heller ikke om jeg tegnede pilen fra banen til normalitet først, og så senere i tegneriet kom i tanke om at "det er jo bare at skrive Juliamængden er randen af den der [A uendelig]"og så selvfølgelig også at man har mere styr på begreberne når man har arbejdet et par dage mere. mere styr på begreber

Interviewer: ok men der er, den pil du har om onsdagen men ikke har om fredagen de mener du stadigvæk er, altså du ville stadigvæk sætte den hvis du skulle lave et nyt kort, hvor du havde de her begreber stående lige ved siden af hinanden? Ville du sætte den pil idag

Søren: Ja, men en elegant måde at sige det på er selvfølgelig at Juliamængden er randen af den her A uendelig.

Interviewer: Men hvis nu Juliamængden ikke indgik

Søren: Så kunne jeg sagtens.

Interviewer: Godt.

Søren: Så det at den ikke er om fredagen det er måske ligeså meget en forglemmelse eller en prioritering, kan man måske sige. Forglemmelse eller prioritering

Interviewer: Ja men, fair nok så tror jeg det var det.

Interviewer: Prøv at lægge mærke til, du har også en pil mellem normalitet at P^k og Fatoumængden om onsdagen som mangler om fredagen. Det kan være du vil sige en lille smule om det? Normalitet og Fatou

Søren: Onsdag har jeg skrevet "Fatoumængden defineres som punkter med omegn hvor familien P^k er normal, og så en pil den anden vej at normalitet af den der P^k bruges til at beregne Fatoumængden. Den er jeg måske ikke så glad for den pil, den er lidt vag.

Utilfredshed med pil

Interviewer: hvis du ser det tilsvarende om fredagen

Søren: der har jeg bare sagt det der med at den definerer.

Interviewer: om onsdagen der har du altså ment at man kunne ...

Søren: Beregne Fatoumængden

Interviewer: Ved hjælp af?

Søren: Ja den ville jeg ikke sætte i dag.

Ville ikke sætte idag

Interviewer: den ville du ikke sætte?

Søren: Nej fordi, vi kan bruge den til at beregne hvis det er sådan at, nå ja ok normalitet af P^k nu blander jeg nogle ting sammen. Normalitet af P^k ja men det er jo bare definitionen, så det at det bruges til at beregne det skal bare forstås som at vi kan checke om definitionen.

Interviewer: Ja men hvis vi nu prøver på at tænke på, hvad tror du du havde tænkt i onsdags da du satte den der, tror du du havde tænkt det.

Hvad tror du, du havde tænk?

(Pause)

Interviewer: Prøv lige at summer op hvad det var du sagde

Søren: Hvad sagde jeg.

Interviewer: Altså hvad du sagde om den pil her: “bruges til at beregne”

Søren: Ja men det dels synes jeg ordet beregne er helt vildt dårligt i den her sammenhæng .. pause. Jeg tror jeg har ment at for at finde Fatoumængden, så tager vi et eller andet punkt og så bare ser om der er normalitet, og det vil så bestemme Fatoumængden.

Ordet beregne

Interviewer: Kan du forestille dig hvordan man kunne tage et eller andet punkt og så beregne om der var normalitet.

Søren: Vi kan selvfølgelig se på om banen går imod uendelig.

Interviewer: Ja det er rigtigt.

Søren: Det er måske det jeg har tænkt?

Interviewer: Så hvis du skulle gøre det om idag, og ville prøve at angive det med en pil, hvordan ville du gøre det, ville du gøre det på samme måde?

Gør det om

Søren: Nej så ville jeg nok gøre det [med en pil] op på banen i stedet for.

Interviewer: Du ville lave en pil?

Søren: Fra banen til Fatoumængden.

Fra banen til Fatoumængden

Interviewer: ok

Søren: Men det er sådan lidt over til A uendelig over normalitet og ned til Fatou.

Interviewer: ja men hvis du skulle sætte

Søren: jeg tror hellere bare jeg ville sige at banen kan bruges til at beregne, det har jeg også skrevet.

Pause

Søren: Normalitet bruges til at beregne, det synes jeg er dårligt.

Interviewer: Du kan ikke huske...

Søren: Jeg kan ikke huske hvad jeg har tænkt.

Pause

Interviewer: Du har sagt at hvis du skulle gøre det i dag, så ville du måske - hvis du skulle udtrykke det du troede du mente der så ville du tegne en pil fra banen til Fatoumængden.

Søren: Ja men jeg tror allerhelst jeg ville tegne fra banen til A uendelig og så sige at det er en delmængde af Fatoumængden. Det har jeg sikkert også gjort herovre.

Fra banen til $A_p(\infty)$

Interviewer: så du vil helst gøre som du gør fredag.

Søren: den der pil fra normalitet, altså at sige at normalitet kan bruges til at beregne Fatoumængden det er et meget dårligt udtryk matematisk, synes jeg.

Interviewer: Ok, så skal jeg spørge dig: Kan du huske at du har haft den her opfattelse, altså hvordan du tænkte da du satte den pil og om du kan huske en situation hvor du ændrede opfattelse?

Situation

Søren: en opgave, eksempel eller?

Interviewer: Mja

Søren: hmm

Interviewer: Måske skal du starte med at prøve at sætte ord på den opfattelse du synes den pil giver udtryk for.

Søren: altså opfattelsen er ligesom. Vi tager en omegn om familien og så tager vi, og så er det som om vi kan sige: "er familien normal, så har vi fundet Fatoumængden". Jeg ved ikke hvad jeg har ment.. I det store hele er det nok bare at sige et eller andet med at det er definitionen. Det at bestemme Fatoumængden eller beregne den som jeg har skrevet det er bare at checke om der er normalitet, jeg tror det er det jeg har tænkt. Så det er bare en overflødig, dårlig pil.

overflødig dårlig pil

Interviewer: godt. Jeg spørger en sidste gang. Du tror ikke at du har blandet normalitet af familien sammen med ligesom begrebet banen i punktet.

Søren: Nej det tror jeg ikke.

Interviewer: godt vi stopper her.

Bilag I

Interview med Peter[1]

Dette bilag indeholder en transskription af mit interview af Peter. I bilag K findes en skematisk gennemgang af interviewet. Bemærk at i det spørgeskema som kursisterne fik udleveret hed opgave D.0.5 blot opgave 1, D.0.6 opgave 2, D.0.7 opgave 3 og opgave D.0.8 hed opgave 4. Derfor refereres der i interviewet til opgavenumrene 1-4, fremfor D.0.5-D.0.8.

Transskription

Interviewer: Det her interview det handler om din forståelse af nogle af de begreber vi har snakket om i det her kursus. Det er vigtigt at du forstår hvad jeg siger, sig til hvis der er nogle spørgsmål du ikke forstår. indledning

Peter: Ja

Interviewer: Hvad betyder flg. notation?

Viser notationen:

$$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Peter: Den notation, det betyder at vi har en følge af funktioner indiceret ved de naturlige tal. følge/familie

Interviewer: Ok, en følge af funktioner, nu er der jo;

Peter: Eller en mængde.

Interviewer: En mængde af funktioner.

Peter: Ja

Interviewer: Næste spørgsmål tager udgangspunkt i din besvarelse af opgave 1 fra i fredags. Læs din besvarelse igennem og så vil jeg høre om du har nogle kommentarer eller tilføjelser til din besvarelse af opgave 1. opg. 1

Pause

Peter: Den er ikke så grundig i hvert fald, undskylder

[1] Navnet ændret.

Interviewer: ok

Peter: Som den måske kunne være, altså jeg har jo ikke, det er sådan meget underforstået at mængden af funktioner der i virkeligheden opfylder de krav som den skal for at være en normal familie.

Interviewer: Hvad for en mængde. Der angives i opgaven en mængde af funktioner.

Peter: Ja, som skal være normal på hele $\mathbb{C}$.

Interviewer: Det er det du skal checke.

Peter: Og det handler jo så om at den skal opfylde nogle krav.

Interviewer: Ok, og det kan være du præcist vil sig hvad de krav er.

Peter: Ja men det er jo at enten så skal den konvergere uniformt imod en eller anden bestemt funktion på alle kompakte delmængder, eller også så skal 1 over funktionerne gå uniformt imod 0.

personlig begrebsdefinition

Interviewer: Så du siger; givet en eller anden mængde af funktioner?

Peter: Ja, .. så tager vi de der, . Enhver følge derfra har så delfølger der opfylder de der ting.

Interviewer: OK, ok.

Peter: Og det har jeg jo ikke skrevet så præcist vel, det skulle man nok gøre.

Interviewer: Ok, så hvis du præcist opsummerer kravet for at en eller anden familie af funktioner er normal, så er det?

Peter: Så er det at enhver følge fra familien har en delfølge som opfylder et af de her to krav om uniform konvergens på kompakte delmængder.

Opsummerer

Interviewer: yes.

Peter: Men den er meget tung det er jo også derfor det bliver svært at besvare opgaven præcist ikke.

Definition er tung

Interviewer: Hvad er det præcist du har checket der.

Peter: Faktisk har jeg bare set på hele familien og betragtet den som en følge ikke, i første omgang, og så påstår jeg bare sådan uden videre at når jeg så har at den konvergerer uniformt så hvis jeg så tager en følge ud fra her, tager en delfølge, så må den også opfylde det samme.

erkendelse af problem

Interviewer: så .. det er lidt;

Peter: nej vent lidt, man kunne også udtage en konstant følge men så er det klart, at det gælder.

Konstant følge

Interviewer: Ja, det kunne man også. Men lad mig lige vise dig et eksempel, prøv at se på den der følge:

Eksempel

Viser seddel med følgen

$$f_1, f_2, f_1, f_2, f_1, \ldots$$

Peter: ja

Interviewer: Konvergerer den?

Peter: nej

Interviewer: Og den er heller ikke konstant?

Peter: Nej, men den er normal, den ville være en normal familie, på et eller andet passende sted ikke. Fordi i enhver følge kunne man udtage en delfølge fra, der er konvergent. Følgen er en normal familie

Interviewer: Det er rigtigt, ja. Godt så er vi færdige med det. De næste par spørgsmål de handler om din besvarelse af opgave 3, og igen så vil jeg bede dig om at læse besvarelsen igennem og høre om du har nogen kommentarer eller tilføjelser. opg. 3

Peter: Jeg kan i ethvert tilfælde sige med det samme at jeg kan huske at jeg var meget utilfreds med at jeg ikke fik lavet den ordentligt, jeg var så dum at gå lidt for hurtigt videre til opgave 4. Og så kom jeg ikke tilbage, det var nok meningen på et eller andet tidspunkt. undskylder, har ikke brugt tid på opgaven

Interviewer: Du blev grebet af opgave 4.

Peter: Ja det gjorde jeg.

Interviewer: Fair nok.

Pause.

Peter: Jeg har i hvert fald kun svaret delvist på spørgsmålet.

Interviewer: Hvorfor?

Peter: Det eneste jeg udtaler mig om det er punkter uden for enhedsdisken. Punkter udenfor enhedsdisken

Interviewer: Ok, og har du så nogle kommentarer til det du har skrevet om punkter udenfor enhedsdisken.

Peter: Ja der har jeg jo været løs på samme måde som jeg var i opgave 1. genkender/refererer
Interviewer: ok, så det du har vist er.

Peter: Så det jeg har vist er bare, simpelthen bare at se på selve familien som en følge i første omgang. Set på familien som følge

Interviewer: Og så vist.

Peter: Og så har jeg vist at den følge der hedder en over f_k konvergerer uniformt imod 0, i en omegn af ethvert punkt. Konvergens af $\frac{1}{f_k}$

Interviewer: yes, ok.

Interviewer: Så har du kigget på punkter uden for enhedsdisken, så vil jeg spørge: hvad gør enhedsdisken til noget særligt, hvorfor har du valgt at kigge på punkter udenfor enhedsdisken? Altså for lige at summere op så har du vist at den er normal i punkter udenfor enhedsdisken. Hvorfor enhedsdisken?

Peter: Ja.

Pause

Peter: På selve enhedscirklen der er den jo svær den her familie, er den ikke det? Når vi kommer indenfor, inden i cirklen, i det indre af enhedsdisken. Svær på enhedscirklen

Interviewer: Ja.

Peter: Så, hvad fanden skal jeg sige, nå ja så er det jo, næh.. Altså k, hvis vi har en følge af sådan nogle der ikke så er det, med mindre at den er konstant fra et eller andet, så går det der k jo bare imod uendelig.

Interviewer: Ja vi kan i hvert fald udtage en delfølge som enten er konstant eller;

Peter: Som enten er konstant eller konvergerer imod uendelig.

Interviewer: vokser..

Peter: eller vokser

Interviewer: ja

Peter: Så der gælder vel egentlig det samme, hmm jeg synes der var et eller andet. Nå det kan være jeg bare har været dum.

Interviewer: ok

Peter For hvis jeg har et punkt og jeg tager en omegn og jeg ser på kompakte delmængder af omegnen så kan jeg jo begrænse det der, så kan jeg jo begrænse modulus af selve, af z, det har jo et eller andet maksimum.

Interviewer: ja

Peter: så i princippet så er det jo bare..

Interviewer: et maksimum, hvad skal vi bruge det der maksimum til.

Peter: til at vi ikke behøver at tænke på hvordan z varierer

Interviewer: jo, men hvad er det du viser. Altså vi taler nu om en omegn inden i enhedsdisken , er det det du tænker på.

Peter: Nåh vent lige lidt, det er sgu næh, ja. (pause) Nåhja vi skal selvfølgelig bruge et minimum. Minimum

Interviewer: Ok, hvorfor skal vi bruge et minimum.

Peter: Fordi, vi vil gerne have at det vokser ikke, og det går det jo efterhånden som k vokser så spørgsmålet er bare hvor lille kan z blive. Men hvis vi er på noget kompakt så har z et minimum ikke,

Interviewer: Ja, det er modulus af z vi snakker om

Peter: Ja, den kan selvfølgeligt også komme ind i nul ikke. Men det vil kun være selve punktet 0 ikke, og der vil den så blive i 0. problemer med 0

Interviewer: Så hvis du skulle forsøge at udtale dig, skud fra hoften, om hvor er den der familie normal.

Peter: Så ville jeg bare sige det var den alle steder undtagen 0. Gæt

Interviewer: ok, det er også rigtigt. Godt,

Peter: Jeg tog den der disk med for at være på den sikre side.

Peter+Interviewer: latter Begrebskort

Interviewer: Lad os gå videre til anden afdeling af interviewet hvor vi skal kigge på de begrebskort du har tegnet, og det jeg skal høre dig om i første omgang det er: Jeg vil gerne have du fortæller mig om hvordan du opfatter forholdet mellem

Juliamængden og Fatoumængden og så Banen $P^k(z)$. Altså det er sådan Julia- og Fatoumængden på den ene side og så banen på den anden side. Du fortæller bare kort om din opfattelse: Hænger de sammen, Hænger de ikke sammen, hvordan hænger de sammen.

Peter: Ja, Fatoumængden det er jo de punkter hvor banen er en normal familie.

Sammenblanding

Interviewer: Banen er en normal familie? Prøv at skriv ned hvad banen er, i et eller andet punkt.

Peter: Banen for et polynomium P så har vi så mængden af de her $P^k(z)$ ikke.

Interviewer: Jo, det er rigtigt. Banen har altså noget med det her z at gøre.

Peter: Ja

Interviewer: så det er en mængde af? Karakteriser den der mængde.

Peter: Det er jo bare en mængde af punkter.

Banen er punktmængde

Interviewer: En mængde af punkter, ja. Kan sådan an mængde være

Peter: Nåh ja jeg sagde at.. Det er hvis man så ser på P^k erne her, der kan være en normal familie.

Interviewer: Ok, og det er en mængde af,

Peter: Det er en mængde af funktioner – polynomier.

Familien er en mængde af funktioner

Ser onsdagskort

Interviewer: Ok, så hvis jeg nu viser dig dit begrebskort fra onsdag, koncentrer dig om banen i forhold til Fatoumængden evt. i forhold til normalitet af den her familie. Og så kunne jeg godt tænke mig at høre præcist hvad du har at sige om de pile der går fra banen til Julia- og Fatoumængden.

Peter: ok..

Interviewer: Du må bare gerne uddybe, eller gentage det du skrev.

Peter: Ja, de er jo også lidt, altså, jeg har skrevet at banen den er sådan et grundlæggende begreb for Julia- og Fatoumængden. Det tror jeg bare er i den mening at man, vi starter med banen ikke. Eller det, ja det ved jeg sgu ikke.

Utilfreds med pil fra bane til Fatoumængde

Interviewer: Kan du huske hvad du har tænkt, hvad du har forestillet dig, det kan jo godt være at det ikke var, hvad kan man sige, .. Jeg kunne godt tænke mig at vide grunden til at du har tegnet de her pile.

Peter: Ja nu kan jeg godt se de måske..

Interviewer: Det kan godt være at de så ikke er afsindigt korrekte, men jeg vil godt høre hvad du tænkte, hvis du kan huske det.

Problematisk spørgsmål

Peter: Ja. (pause) Så har jeg nok tænkt noget .. dumt måske, det ved jeg sgu ikke.

Interviewer: Hvad for noget dumt?

(Pause)

Peter: Jeg tror jeg på en eller anden måde har tænkt på det som om, at man brugte banen direkte, altså at der var sådan en mere direkte forbindelse, sådan kommer det også til at se ud. Den anden vej er den jo god nok ikke, man går igennem normalitet af familien P^k ikke?

Gennem normalitet

Interviewer: Ja, (pause) ok, men hvis vi så prøver at kigge på dit fredagskort. Hvis du vil beskrive det der ligesom er der. Altså den sammenhæng der er mellem; Fredag

Peter: Nåh ja der er den der forsvundet jo ikke?

Interviewer: Ja, der er den forsvundet.

Peter: latter, Der har jeg åben bart indset at man skal igennem et eller andet, f.eks. det her normalitet før man kommer frem til Juliamængden. "har indset"

Interviewer: Ok, men der er noget der tyder på at onsdag,

Peter: Onsdag der har jeg,

Interviewer: Der troede du at der var en mere direkte forbindelse?

Peter: Ja

Interviewer: Ok, godt så skal jeg høre dig (pause) Altså du kan huske at du ligesom har opdaget at man skulle igennem denne her normalitet for at komme den rigtige vej, kan du huske en situation, en opgave vi regnede eller et eller andet? Situation

Peter: Nej, jeg tror bare at. Jeg har nok bare ikke tænkt det ordentligt igennem inden jeg satte den der pil. Altså jeg var faktisk sikker på at jeg havde tegnet præcist de samme pile til at starte med på det andet, så det er ikke noget jeg sådan har lagt mærke til. Ikke tænkt ordentligt igennem Tegnet de samme pile

Interviewer: Nej ok, men det er en meget præcis forskel – der er selvfølgeligt også derfor jeg spørger.

Peter: Men det ikke noget jeg sådan har opdaget, for jeg var sikker på at det var det samme jeg havde lavet, til at starte med.

Interviewer: Ok, så du har simpelthen tænkt at du ville lave præcist det samme kort, og så har du lavet netop den forskel.

Peter: Ja, jeg troede i hvert fald at jeg havde startet med at lave det samme.

Interviewer: det er fint, jeg tror bare vi holder her.

Peter: Ok.

Bilag J

Interview med Lars[1]

Dette bilag indeholder en transskription af mit interview af Lars. I bilag K findes en skematisk gennemgang af interviewet. Bemærk at i det spørgeskema som kursisterne fik udleveret hed opgave D.0.5 blot opgave 1, D.0.6 opgave 2, D.0.7 opgave 3 og opgave D.0.8 hed opgave 4. Derfor refereres der i interviewet til opgavenumrene 1-4, fremfor D.0.5-D.0.8.

Transskription

Interviewer: Dette er et interview af Lars. Det er vigtigt du forstår hvad jeg spørger om. Sig til hvis der er noget du ikke forstår. Indledning

Lars: Ja.

Interviewer: det første spørgsmål det er, hvad betyder den her notation. Notation

Viser notationen:

$$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Lars: Det betyder sædvanligvis følgen af funktioner $f_1, f_2, f_3, ...$

Interviewer: mja nu siger du følgen.

Lars: Teknisk set er det vel bare mængden af funktioner men.

Interviewer: Ok ja, mængden af funktioner, eller måske følgen? Mængde/følge

Lars: Det kommer lidt an på hvad man skal bruge dem til synes jeg.

Interviewer: ja, godt. Ja det er rigtigt, man kan jo bruge nummereringen hvis man skal bruge en nummerering.

Lars: ja.

Interviewer: Det næste spørgsmål det handler om din besvarelse af opgave 1 på det her spørgeskema, jeg sidder med her. Så hvis du vil starte med at læse din besvarelse igennem, så skal jeg høre om du har nogen kommentarer eller tilføjelser, til det du har skrevet. Bare giv dig god tid. Opgave 1

[1] Navnet ændret.

(Pause)

Lars: Første linie er måske ikke helt nem at forstå, men ellers synes jeg der er noget at tilføje.

Interviewer: Ok, du viser at den f_k udgør en normal familie.

Lars: ja

Interviewer: hvad er det præcist man skal checke, for at checke det?

Lars: man skal vise at enhver delfølge har en delfølge der enten konvergerer eller divergerer normalt. Personlig begrebsdefinition

Interviewer: hmm, ja du har sådan set sagt det

Lars: Ja

Interviewer: Er det det du checker der.

Lars: Jeg viser at den i sig selv divergerer normalt. Implementering

Interviewer: Det tror jeg ikke du viser.

Lars: Det er i hvert fald det jeg forsøger på. Altså jeg finder en eller anden vurdering af f_k af z på en omegn, og så viser jeg at den vurdering går imod 0, for k gående imod uendelig.

Interviewer: Så konvergerer den, ikke?

Lars: Jo, den konvergerer.

Interviewer: Ok, men hvad er forskellen på det du har vist der og så det du sagde du ligesom skulle checke?

Lars: Det jeg har vist der er lidt stærkere, jeg har ikke eksplicit skrevet at man så deraf kan udlede at enhver delfølge har en delfølge, som der vil være den selv, og der også må konvergere. Fordi at når hele følgen konvergerer så gør enhver delfølge også. Præcisering

Interviewer: Jah, nu viser jeg dig lige noget så, og det jeg viser dig er en følge fra den der familie.

viser følgen: $f_1, f_2, f_1, f_2, ...$

Lars: Ok den, (pause) den konvergerer jo nok ikke. Modeksempel

Interviewer: den konvergerer ikke nej, men det er en følge fra familien ikke?

Lars: Ja, jeg har tænkt, at man ikke udtog den samme funktion mere en gang.

Interviewer: Ja det kan jeg egentligt høre for du sagde jo også hele tiden at man skulle tage en delfølge af den oplagte følge eller den hvor du skifter tuborg'erne ud med parenteser.

Lars: den her har vel sådan set også en delfølge der konvergerer. Indsigt

Interviewer: ok, ja det er rigtigt. Så det er ikke i modstrid med..

Lars: Det er ikke direkte en modstrid men det er da en ting der kunne rejse tvivl om resultatet. Altså det betyder ligesom at jeg ikke, man kan i hvert tilfælde ikke uden lidt yderligere argumentation udelukke at der findes andre følger der.. Jeg kan ikke umiddelbart forestille mig det, at det skulle kunne lade sig gøre.

Interviewer: Så det du er i tvivl om det er, hvis du kan prøve at opsummere hvad du er i tvivl om. Opsummering

Lars: Om man kunne forestille sig en følge;

Interviewer: Fra,

Lars: Fra familien, der ikke har en konvergent delfølge, men det er lidt svært at forestille sig, men det er sådan et eller andet med at enten så vil der være uendeligt mange forskellige funktioner i følgen, også virker det her stort set.

Interviewer: ok, hvorfor virker det. Argument

Lars: Fordi så udvælger vi bare dem, og så har vi her at..

Interviewer: udvælger hvad for nogle?

Lars: De her forskellige, dvs. vi fravælger alle dubletterne

Interviewer: mja,

Lars så får vi noget der ligner en delfølge af $f_1, f_2, f_3, \dots$.

Interviewer: Fravælger dubletterne siger du. Hvad er det vi skal være sikre på?

Lars: På en eller anden måde skal vi bare være sikre på at vi ikke kommer ind i en cykel, men det går sådan set ikke noget for så udvælger vi bare den samme hver gang. Jeg tror på resultatet men vi skal være sikre på at vi ikke kan blive ved med at bevæge os rundt uden enten helle tiden, uden igen og igen få den samme funktion som vi så bare kan udvælge og dermed få en konstant følge, eller at få noget hvor det her argument reelt gør det.

Interviewer: Ja og det som det der argument tager udgangspunkt i det er vi har en delfølge af den oplagte følge, altså den der hedder $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$. En anden måde at sige at vi har en delfølge af den oplagte følge, det er at sig at de her k'er de skal... vokse.

Lars: ja

Interviewer: Man skal altså enten kunne udtage en hvor k'erne vokser eller..

Lars: det var det jeg mente med at sige at de skulle være forskellige.

Interviewer: Ja, godt. Men det var det. Så går vi videre til din besvarelse af opgave 3. Du læser igennem hvad der står i din besvarelse af opgave 3, og så vil jeg igen gerne høre om du har noget at tilføje eller nogle kommentarer.

(Pause)

Lars: Jeg kan igen se at der potentielt kan være det samme problem som før, at jeg kun har tænkt på delfølger af den oplagte. Genkender problem

Interviewer: Ok, men igen, hvis du skulle prøve at rede det?

Lars: mon ikke det samme trick nogenlunde virker. At enten så har vi en følge hvor k'erne er voksende eller også så forekommer den samme funktion uendeligt mange gange. Fordi at hvis den vi ikke kan udtage en delfølge hvor k'erne er voksende, af en følge, så må der være et eller andet største k, og så kan vi slutte at så er der kun endeligt mange forskellige funktioner og så må en af dem forekomme uendeligt mange gange. Bevis

Interviewer: yes

Lars: Og så er resultatet blevet skrevet sådan lidt uklart, før argumenterne.

Interviewer: Ok, en lille kommentar til det typografiske, fint nok. Jeg skal lige have dig til at sige højt hvad det er du viser. Hvad bliver din konklusion?

Lars: At familien er normal, for alle z forskellig fra 0. Konklusion

Interviewer: yes og hvorfor?

Lars: Det er fordi på enhver omegn af sådan et punkt der divergerer den normalt.

Interviewer: Ikke på enhver omegn

Lars: der kan findes en omegn, vi skal ikke have 0 med, det er rigtigt fordi er den konstant 0.

Interviewer: yeps, ok så det er din konklusion. Den er normal på hele den komplekse plan, uden 0.

Lars: ja

Interviewer: Godt, så skal jeg høre: hvad fortæller Montels sætning dig om de funktioner omkring 0. Om familien omkring 0.

Lars: At der højst kan være en værdi i den komplekse plan der ikke bliver antaget af en af funktionerne, og det må ligesom være 0. Montel

Interviewer: Må det være 0?

Lars: Hvis funktionerne hedder k gange z og k er et naturligt tal og z er forskellig fra 0.

Interviewer: Hvorfor det, vi har en omegn omkring 0, så er 0 jo med.

Lars: Nå ja, så er det sandsynligvis ikke 0. Så kan jeg ikke lige gennemskue hvad..

Interviewer: Nej men jeg tror ikke der er noget tal der bliver snydt her, men du summerer op hvad Montels sætning siger.

Lars: Ja men den siger så at ethvert komplekst tal bliver ramt af en eller funktion fra følgen - familien.

Interviewer: evt, kan der være et der bliver sprunget over, men det tror vi ikke.

Lars: Nej ikke her.

Interviewet slutter her da Lars havde totalt konsistente begrebskort.

Bilag K

Skematisk gennemgang af Interview

K.1 Søren

K.1.1 Opsummering af Sørens prøvebesvarelse og begrebskort

Udgangspunktet for første del af interviewet er besvarelserne af opgave D.0.5 og D.0.7, fra testen bilag D. Her gives en kort beskrivelse af Sørens besvarelse af de fire opgaver i testen, med hovedvægt på opgave D.0.5 og D.0.7.

Opgave D.0.5: Søren viser at $f_k \longrightarrow 0$ uniformt på enhver kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Søren noterer at alle følger fra $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ enten har en delfølge der også er en delfølge af $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, eller har en konstant delfølge.

Opgave D.0.6: er besvaret perfekt.

Opgave D.0.7: Søren angiver vurderingen $\left|\frac{1}{f_k(z)}\right| = \frac{1}{k|z|} \leq \frac{1}{k\varepsilon}$ på enhver kompakt mængde K der ikke indeholder 0 og $\varepsilon = \min_{z\in K}|z|$, og konkluderer herved at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er normal på K. Han argumenterer også for hvorfor $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ikke kan være normal på en mængde der indeholder 0.

Opgave D.0.8: Søren har skrevet en del til denne opgave, men der ser ikke specielt frugtbart ud.

Anden del af interviewet handler om Sørens begrebskort, specielt hvordan de udvikler sig fra onsdag til fredag. De interessante ændringer er at der på fredagskortet er forsvundet en pil mellem banen $\{P^k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ og normalitet af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ og en pil mellem banen $\{P^k(z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ og Fatoumængden.

K.1.2 Begrebet normal familie

Indledning og notation: Søren svarer præcist og korrekt[1] på spørgsmålet om notation.

Opgave D.0.5: Søren har ikke noget at tilføje til sin besvarelse.

Begrebsdefinition: Sørens begrebsdefinition svarer helt til den officielle.

Påstand: Sørens fremfører en påstand om normalitet af familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, da han bedes om at relatere begrebsdefinitionen til det svar han har skrevet. Faktisk har Søren mere eller mindre skrevet denne påstand i opgavebesvarelsen.

Uddybning: Søren uddyber sin påstand, ved at skrive hvilken følge han kigger på.

Bevis Søren underbygger påstanden, det gjorde han faktisk ikke i besvarelsen af opgave D.0.5.

Opgave D.0.7:

Genkender: Søren genkender problemet fra opgave D.0.5.

Refererer: Referat af opgavebesvarelsen, undervejs gentages påstanden, der nu er bevist, og intervieweren stiller et uddybende spørgsmål til dette.

Konklusion på opgave D.0.7: , Søren angiver sin konklusion på opgave D.0.7, og fortæller at,

Montels sætning siger at familien ikke er normal omkring 0.

K.1.3 Begrebskort

Denne afdelig af interviewet omhander Sørens begrebskort. Han får sine kort at se undervejs.

Banen i forhold til familien: Søren forklarer i detalje om sammenhængen mellem normalitet af familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i et punkt og begrænsethed af banen i dette punkt.

Han forklarer herunder at;

Banen imod uendelig ⇒ normalitet i punktet. Derudover forklarer han at hvis

Banen ikke går imod uendelig så kan man ikke sige noget.

[1] Korrekt betyder her i overensstemmelse med den måde notationen blev anvendt i kursusmaterialet (bilag B).

Banen begrænset: Søren forklarer her at den direkte pil imellem bane og normalitet, han har på onsdagskortet, er udtryk for at familien $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ikke kan være normal i en omegn der indeholder punkter hvor banen går imod uendelig og punkter hvor den ikke gør

Refleksion: søren sammenligner det han sagde under "Banen imod uendelig $\Rightarrow$ normalitet i punktet"med hvad han mener onsdagskortet udtrykker. Speciel bemærker han at den pil vi taler om kan genfindes som gående via $A_p(\infty)$ om fredagen.

Opsumerer onsdag: Søren opsummerer indholdet af forbindelsen. Essensen er at en omegn der indeholder punkter der sendes i uendeligt og punkter der ikke gør, ikke kan være en omegn hvorpå $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er normal.

Fredagskortet: Søren mener fraværet af pilen på fredagskortet er udtryk for den sammenhæng at ubegrænset bane giver normalitet og at den væsentlige sammenhæng således går via $A_p(\infty)$.

Onsdag via $A_p(\infty)$: Sammenligner onsdag og fredagskort genfinder banen via $A_p(\infty)$ på onsdagskortet.

Refleksion: $A_p(\infty)$ åben mængde: Søren forklarer at det er blevet klarere at $A_p(\infty)$ er en åben mængde. Og påpeger at der er "lidt udvikling der".

Deduktion: Indser at den sammenhæng pilen der mangler på fredagskortet udtrykker faktisk kan deduceres fra de andre sammenhænge på fredagskortet. Derefter diskuteres der hvorvidt denne sammenhæng var tilgængelig om onsdagen og hvorvidt den var indset fredag. Søren siger at han ikke vil udelukke at det er et

tilfælde at der er den forskel på de to kort.

Ville du sætte den pil i dag? Søren svarer ja og angiver derefter at fraværet om fredagen skal ses som en

Forglemmelse eller en prioritering.

Normalitet og Fatou Der er en pil mellem normalitet af $\{P^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ og Fatoumængden om onsdagen som er væk om fredagen. Dette forelægges for Søren.

Utilfredshed med pil: Søren siger stort set med det samme, at han er utilfreds med denne pil. Herunder siger han at han *ikke ville sætte pilen i dag.*

Hvad tror du, du havde tænkt: Intervieweren spørger Søren hvad han har tænkt, hvortil søren svarer, at han mener;

ordet beregne er dårligt i denne sammenhæng, og samtidigt at sammenhængen udtrykker at Fatoumængden kan findes ved at se om der er normalitet i ethvert punkt og at banen kan bruges til dette. Søren foreslår at dette kan gøres ved at checke om banen går imod uendelig.

Gør det om: Hvis Søren skulle sætte pilen den dag han blev interviewet, ville han i første omgang sætte den

fra banen til Fatoumængden. Men Søren synes alligevel at den i princippet går over $A_p(\infty)$. Søren kan ikke huske hvad han tænkte da han satte pilen fra normalitet at familien til Fatoumængden (og mærkede den "kan bruges til at beregne").

Fra banen til $A_p(\infty)$ Søren ændrer opfattelse og vil helst sætte pilen fra banen til $A_p(\infty)$ og sige at $A_p(\infty)$ er en delmængde af Fatoumængden. Og knytter det til det han har gjort fredag.

Situation: Søren kan ikke huske en situation der fik han til at ændre opfattelse, faktisk er han ikke istand til at gøre rede for hvilken opfattelse pilen udtrykker. Han ender med at sige at pilen bare er en

overflødig dårlig pil hvorefter interviewet afsluttes.

K.2 Peter

K.2.1 Opsummering af Peters prøvebesvarelse og begrebskort

Udgangspunktet for første del af interviewet er besvarelserne af opgave D.0.5 og D.0.7, fra testen bilag D. Her gives en kort beskrivelse af Peters besvarelse af de fire opgaver i testen, med hovedvægt på opgave D.0.5 og D.0.7.

Opgave D.0.5: Peter viser at $f_k \longrightarrow 0$ uniformt på enhver kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Derefter noterer han at alle følger fra $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ så vil gå uniformt imod 0 eller være konstante fra et vist trin.

Opgave D.0.6: er besvaret perfekt.

Opgave D.0.7: Peter angiver vurderingen $\left|\frac{1}{f_k(z)}\right| = \frac{1}{k|z|} < \frac{1}{k}$ når $z \notin D(0,1)$, og konkluderer herved at $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er normal for $z \notin D(0,1)$.

Opgave D.0.8: Peter svarer ret grundigt og stort set rigtigt på opgave 4.

Anden del af interviewet handler om Peters begrebskort, specielt hvordan de udvikler sig fra onsdag til fredag. Den eneste interessante ændring er at der er pile mellem (Julia- og) Fatoumængden og banen om onsdagen, og disse er væk om fredagen.

K.2.2 Begrebet normal familie

Intwervievet foregår på baggrund af prøven i bilag D.

Indledning:

Følge/familie: Peter tænker på $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ som en følge, men konfronteret med interviewerens skepsis ændres det til en familie.

Opgave D.0.5: Peter forelægges sin besvarelse af opgave D.0.5.

Undskylder: Peter undskylder grundigheden af sin besvarelse.

Personlig begrebsdefinition: Peter angiver en definition af begrebet normal familien, faktisk er denne del af interviewet ret afslørende hvis den tolkes i retning af, at det Peter først siger er hvordan han tænker på begrebet normal familie (begrebsbilledet) og lidt presset

opsumerer: Peter så hans begrebsdefinition. Peters begrebsdefinition er meget lig den officielle, men han mener at:

Definitionen er tung , hvilket tyder på at begrebsbillede og begrebsdefinition ikke arbejder dynamisk sammen (se afsnit 2.2).

Erkendelse af problem: Her forklarer Peter os hvordan han har undgået at arbejde med definitionen af normal familie direkte. Det har han gjort ved at tænke på familien som en følge og så checke om denne konvergerer eller divergerer normalt.

Konstant følge: Her ser Peter at et problem med hans forenkling kunne være konstante følger, men det er ikke noget rigtigt problem da de jo altid konvergerer.

Eksempel: Intervieweren kommer så med et eksempel på en følge, der hverken er konstant eller hele familien.

Følgen er normal familie: Peter siger så at denne følge er en normal familie. Jeg ved ikke om han blander følge og familie begreberne sammen eller om han mener, at følgen ikke udgør et problem for normalitet af familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Opgave D.0.7 Peter forelægges sin besvarelse af opgave D.0.7.

Undskylder: Peter undskylder igen grundigheden af sin besvarelse og siger at han

ikke har brugt tid på opgaven.

Punkter udenfor enhedsdisken: Peters besvarelse omhandler kun punkter uden for enhedsdisken, så interviewet koncentrerer sig om det.

Genkender/refererer: Han ser at problemet med omgangen med familie/følge begrebet er problematisk på samme måde som i opgave D.0.5. problemet beskrives meget klart idet han siger at han har

set på familien som en følge og så checket

Konvergens af $\frac{1}{f_k}$.

Hvorfor enhedsdisken: Peter bedes forklare hvorfor han kun har set på punkter udenfor enhedsdisken. Han forklarer det med at familien er:

Svær på enhedscirklen Det er den faktisk ikke, hvilket går op for Peter.

Minimum: Peter indser at man har behov for et minimum for $|z|$ for at vise den uniforme konvergens. Derfor er er kun

Problemer med 0.

Gæt: Peter gætter på at familien er normal på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

K.2.3 Begrebskort

Sammenblanding: Peter forklarer sammenhængen mellem Fatoumængden og Banen med at Fatoumængden består af de punkter hvor banen er en normal familie, og blander således begreberne punktfølge og familie af funktioner sammen. Under punkterne

Banen er punktmængde og

Familien er en mængde af funktioner rettes denne misforståelse.

Ser onsdagskort: Peter ser det begrebskort, han har lavet onsdag.

Utilfreds med pil fra bane til Fatoumængden: Peter bryder sig ikke om den pil han har tegnet fra banen til Fatoumængden, det skal ses i lyset af at intervieweren stiller et

problematisk spørgsmål idet int4ervieweren siger at det "godt kan være at det ikke er afsindigt korrekt", hvad peter har gjort.

Fredag: Peter ser sit fredagskort og opdager at den pil han var utilfreds med på onsdagskortet er væk på fredagskortet. Peter mener at han

har indset at man skal igennem normalitet for at nå til Juliamængden.

Situation: Peter kan ikke huske nogen bestemt situation, hvor det gik op for han at man skal igennem normalitet.

Ikke tænkt ordentligt igennem: Peter angiver som mulig grund at han ikke har tænkt det ordentligt igennem om onsdagen.

Tegnet det samme: Peter troede at han havde tegnet præcist de samme pile om onsdagen og fredagen.

K.3 Lars

K.3.1 Opsummering af Lars prøvebesvarelse og begrebskort

Udgangspunktet for første del af interviewet er besvarelserne af opgave D.0.5 og D.0.7, fra testen bilag D. Her gives en kort beskrivelse af Lars besvarelse af de fire opgaver i testen, med hovedvægt på opgave D.0.5 og D.0.7.

Opgave D.0.5: Lars ser på en omegn U af z_0 og viser at $f_k \longrightarrow 0$ uniformt på U (der er kompakt), ved hjælp af vurdereringen $f_k(z) \leq \frac{R}{k}$, hvor $R < \{|z| \big| z \in U\}$.

Opgave D.0.6: er besvaret perfekt.

Opgave D.0.7: er stort set besvaret som opgave D.0.5. Lars lader U være en kompakt der ikke indeholder 0, anvender R fra opgave D.0.5 og indser ved hjælp af vurderingen $\left|\frac{1}{f_k(z)}\right| \leq \frac{1}{R} \leq$ at $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergerer. Han konkluderer at familien er normal på enhver mængde der ikke indeholder 0.

Opgave D.0.8: Lars har skrevet en del til denne opgave, men der ser ikke specielt frugtbart ud.

K.3.2 Resume og gennemgang af interview

Indledning

Notation: Lars betegner den viste notation med en *følge* af funktioner, men siger også at der *teknisk set* blot er tale om en mængde.

Følge/mængde: Det er ikke helt klart hvad Lars forbinder med notationen, måske blot at der er en naturlig uordning på mængden der derfor ligesåvel kan betragtes som en følge.

Opgave D.0.5: Lars undskylder første linie. Intervieweren følger ikke op på dette.

Lars' personlige begrebsdefinition: Lars' begrebsdefinition er tæt på den officielle, der er dog den forskel at Lars taler at samtlige *del*følger af familien skal have konvewrgente delfølger. Forskellen er så lille at jeg intervieweren måske nok bemærker det, men ikke er istand til følge op på det.

Implementering: Lars beskriver sin anvendelse af definitionen "Jeg viser at *den i sig selv ...*". Desværre kommer Lars til at sige divergerer i stedet for konvergerer, dette rettes af intervieweren.

Præcisering: Lars præciserer sin forståelse af hvad opgaven går ud på, samtidigt giver han sit bud på hvorfor det han gør er nok, faktisk bruger han udtrykket *lidt stærkere* om det han gør.

Modeksempel: Intervieweren giver et eksempel på en følge fra familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, der ikke konvergerer. Lars fortæller hvad der, efter hans mening, er gået galt: "jeg havde tænkt at man ikke udtog den samme funktion mere end en gang".

Indsigt: Lars afviser forsøget på modeksempel. Det er bemærkelsesværdigt at intervieweren lægger op til at Lars kan slå denne afvisning fast, men det gør han ikke? I stedet kommer Lars med nogle lidt uklare ytringer, og bliver af intervieweren bedt om at opsummere hvad han er i tvivl om.

Opsummering: Lars opsumerer sin tvivl.

Argument: I fællesskab laves argument for, hvorfor det er nok at se på uniform konvergens af følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Opgave D.0.7: Iterviewet går nu videre og omhandler Lars' besvarelse af opgave D.0.7.

Gendkender problem: Lars ser at hans besvarelse oaf opgave D.0.7 har de samme problemer som besvarelsen af opgave D.0.5.

Bevis: Lars opsumerer fint, hvordan disse problemer kan klares svarende til hvordan de blev klaret i opgave D.0.5.

Konklusion: Lars har helt korrekt fundet at familien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er normal på $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Montel: Tilslut taler vi om konsekvenserne af Montels sætning omkring punktet 0.

Litteratur

[1] Daniel S. Alexander: *A History of Complex Dynamics. From Schröder to Fatou and Julia,* Vieweg, 1994.

[2] Apel K. & Haken W. *Every Planar Map is Four Colorable, Part 1: Discharging,* Illinois Jurnal of Mathematics **21** 3 p. 429-490, Illinois 1977.

[3] Apel K., Haken W. & Koch J. *Every Planar Map is Four Colorable, Part 2: Reducibility,* Illinois Jurnal of Mathematics **21** 3 p. 491-567, Illinois 1977.

[4] Michélle Artigue: *Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products, in: Didacics of Mathematics as a Scientific Discipline,* ed. Rolf Biehler, Roland W. Scholz, Rudolf Strässer and Bernard Winkelmann. Mahtematics Education Library **13**, Kluwer Academic Publishers 1994.

[5] Michélle Artigue, Marie-Jeanne Perrin-Glorian:*Didactical Engineering, Research and Development Tool: Some Theoretical problem linked to this Duality,* For the Learning of Mathematics **11**,1 1991, p. 13-18. Kingston, Ontario.

[6] Asiala, A., DeVries D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K.: *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education* Reseach in Collegiate Mathematics education II, CBMS 6 AMS p. 1-32.

[7] Tove Bangsgaard, Jens Dolin, Anne-Birgitte Rasmussen & Ole Trinhammer: *AUTENTISK FYSIK*, hentet fra http://www.fy.gymfag.dk/autentisk/index.html

[8] Beardon Alan F.: *Iterations of Rational Functions,* Graduate Text in Mathematics, Springer 1991.

[9] Berg, Christian: *Topologi, noter til 3GT,* Matematisk afdeling HCØ-Tryk 1997.

[10] Blanchard, Paul: *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere,* Bull. AMS Vol. 11 1984 p. 85-141.

[11] Branner, Bodil: *Holomorphic Dynamical Systems in the Complex Plane, An introduction* Procedings of the Seventh EWM Meeting, Madrid 1995 p. 41-53.

[12] Branner, Bodil: *The Mandelbrot Set,* in *Chaos and Fractals. The Mathematics Behind the Coputer Graphics* Procedings of Symposia in Appl. Math., AMS, Vol 39 1989 p. 75-105.

[13] Bredon, Glen E: *Topology and Geometry,* Graduate Text in Mathematics, Springer 1993.

[14] Conway John B.: *Functions of One Complex Variable,* Graduate Text in Mathematics, Springer 1973.

[15] Karsten Dam *Firfarveproblemet,* Systime København 1990.

[16] O. Dashbach, S. Hougardy: *Does the Jones Polynomial Detect Unknottetness?* Exp. Math. vol. 6 p. 51 1997.

[17] do Carmo, Manfredo : *Diferential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice-Hall 1976.

[18] A. Duoady, J. H. Hubbard: *Itérations des polynômes quadratiques complexes,* C. R. Acad. Sci. **294** (1982), 123-126.

[19] Ed Dubinsky, Jennie Dautermann, Uri Leron and Rina Zazkis: *Om Leaning the Fundamental Objekts of Group Theory,* Educational Studies in Mathematics Vol 27 1994 p. 267-305.

[20] Ed Dubinsky:*A Radical constructionist does CL* **ikke offentliggjort.** Hentet fra: http://trident.mcs.kent.edu/ edd/publications.html

[21] Ed Dubinsky: *A Theory-Based Aproach to Help Students Learn Post-Secondary Mathematics: The Case of Limits,* Research reports in mathematics education, 1,2000, Umea University, p. 1-18.

[22] Ed Dubinsky:*Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* I D. Tall *advanced mathematical thinking* p. 95-126. Dordrech, Kluwer.

[23] Ed Dubinsky: *Writing Programs to Learn Mathematics*, **ikke offentliggjort.** Hentet fra: http://trident.mcs.kent.edu/ edd/publications.html

[24] Ed Dubinsky: *After Examples and Before Proofs, Constructing Mental Objects*, **in press.** Hentet fra: http://trident.mcs.kent.edu/ edd/publications.html

[25] Ed Dubinsky & David Tall:*Advanced Mathematical Thinking and the Computer.* I D. Tall *advanced mathematical thinking* p. 231-250. Dordrech, Kluwer.

[26] Duval, Raymond: *Écriture, Raisonnement et Découverte de la Démonstration en Mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathematiques, vol 20, 2, p. 135-170, 2000.

[27] P. Fatou: *Mémoire sur les équatios les functionnelles,* Bull. soc. Math. France **47** 1919, p. 161-271, **48** 1920, p. 33-94 & p. 208-314.

[28] Falconer, K: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications,* John Willey & Sons 1990.

[29] Fuglsang-Damgaard A. C.: *Commputeralgebrasystemer i Gymnasial Matematikundervisning - Aktuelle og Potentielle Didaktiske Funktioner* Speciale ved Danmarks Pædagogiske Universitet, Maj 2001.

[30] Ernst Von Glasersfeld: *Radical Constructivism, A Way of Knowing and Learning*, Studies in Mathematics Education Series 6, The Falmer Press 1995.

[31] Poul R. Halmos: *I want to be a mathematician,* Springer Verlag 1985.

[32] Hatcher, A: *Algebraic Topology,* ikke udgivet, findes på `www.math.cornell.edu/ hatcher`.

[33] Hille E.:*Analytic Function Theory 2.,* Introductions to Higher Mathematics, Ginn and Company 1962.

[34] K. Illeris: *Læring : aktuel læringsteori i spændingsfeltet mellem Piaget, Freud og Marx,* Roskilde universitetsforlag, 1999.

[35] G. Julia: *Mémoires sur l'iteration des fonction rationnelles,* J. Math. Pures Appl. **8** 1918, p. 47-245.

[36] Marianne Winther Jørgensen & Louise Phillips: *Diskursanalyse som teori og metode,* Roskilde Universistetsforlag, 1999.

[37] Keen, Linda: *Julia Sets,* in *Chaos and Fractals. The Mathematics Behind the Coputer Graphics* Procedings of Symposia in Appl. Math., AMS, Vol 39 1989 p. 57-74.

[38] Lakatos, Imre: *Profs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery,* Cambridge University Press 1976.

[39] Tan Lei: *Local properties of the Mandelbrot set M, Similarities between M and Julia sets,* Procedings of the Seventh EWM Meeting, Madrid 1995 p. 71-82.

[40] Lyubich M. Y.: *The Dynamics of Rational Transforms: The Topological Picture,* Russian Mathematical Surveys, Vol. 41:4 1986 p. 43-117.

[41] R. Mañé, P. Sad & D. Sullivan: *On the Dynamics of Rational Maps,* ann. Ecole normale sup. **16** 1983 p. 193-217.

[42] Mercedes McGowen, David Tall: *Concept Maps & Schematic Diagrams as Devices for Documenting the Growth of Mathematical Knowlege*, PME 23 Haifa, Israel 1999, p. 281-288.

[43] Newman, M: *Topology of Plane Sets,* Cambridge University Press 1939.

[44] Niss, M.:*Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse,* Uddannelse **9-3** september 1999.

[45] Niss, M.:*Kompetencer som middel til fagbeskrivelser af matematik,* Notat til KOM-projektet Version 15/3 2001. **Foreløbig udgave.**

[46] Niss, M.:*Kompetencer og matematiklæring - en kort omtale af KOM-projektet,* Mathilde **9** maj 2001 p. 21-23.

[47] Jean Piaget: *The child's conception of number,* London : Routledge & Kegan Paul, 1969.

[48] Jean Piaget, Bärbel Inhelder and Alina Szeminska: *The child's conception of geometry,* New York : Basic Books, 1970.

[49] Rasmussen J.:*Socialisering og læring i det refleksivt moderne,* Unge Pædagoger **B 62** 1996.

[50] Rudin, W: *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill International Series 1987.

[51] Schoenfeld, A. H.: *Some Notes on the Enteprise* Reseach in Collegiate Mathematics education I, CBMS AMS p. 1-21.

[52] Sfard, A.: *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin,* Educational Studies in Mathematics Vol 22 1991 p. 1–36

[53] Sfard, A. (1998). *On two metaphors for learning and on the dangers of choosing just one,* Educational Researcher, **27**(2) 1998, p. 4-13.

[54] Sfard, A.: *Symbolizing Mathematical Reality Into Being or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other,* in P. Cobb, K. Yackel & McClain (Eds)*Symbolizing and Communication: perspectives on Mathematical Discurse, Tools, and Istructional design* 2000 (p. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

[55] Skemp R. R.: *The Psychology of Learning Mathematics,* Penguin, London 1971.

[56] Spanier: *Algebraic Topology,* McGraw-Hill 1966.

[57] David Tall og Shlomo Vinner: *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity,* Educational Studies in Mathematics, **12** (2), 1981 p. 151-169.

[58] David Tall: *Reflections,* i D. Tall *advanced mathematical thinking* p. 251-259 Dordrech, Kluwer.

[59] David Tall: *GraphicCalculus I,II,III,* Glentop Press, London 1986.

[60] Thorup, A: *Algebra*, 2. udgave. Matematisk Afdeling HCØ-Tryk 1998.

[61] Shlomo Vinner: *The Role of Definitions in the Teaching anf Learning of Mathematics* i D. Tall *advanced mathematical thinking* p. 65-81. Dordrech, Kluwer.

[62] Carl Winsløw: *Between Platonism and Constructivism: Is There a Mathematical Acquisition Device* For the Learning of Mathematics **20**,3 2000, p. 12-22. Kingston, Ontario.

[63] Carl Winsløw: *Two dimensions of the cenceptions of mathematics in teritary education,* Proc. of the 3^{rd} Nordic Conference on Mathematics Education.**To Appear.**

[64] Aastrup, Johannes: *Picards små og store mirakler,* side 9 sætning i FAMØS Vol. 14:4 maj 2001.

[65] Hjemmeside for "Kompetencer Og Matematiklæring": http://MMF.RUC.DK/ thj/kom/

Indeks