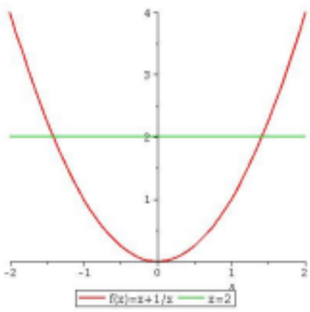
Uge 37 opgaver

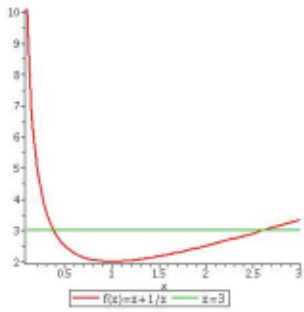
Opgave 1

Opgave 1 Bestem supremum og infimum for følgende to mængder:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ x + \frac{1}{x} < 3\}$$

Har disse mængder et maksimum eller minimum?





Svar :

a)

Starter med at definere sup (M) og inf (M) :

Kigge nu på side 3 i kompendie 1 og anvender aksiom (1.13) Kontinuitetsaksiomet

A = $\{x \text{ in } \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$

Note til mig
selv : Har søgt på ordet (inequalities) i mathematica for at finde denne metode.

```
Reduce[{x^2 < 2}, x] (*Løser ligningen/uligheden for x*)
```

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Herved har jeg fundet sup (M) og inf (M) for denne mængde :

sup (A) = $\sqrt{2}$ og inf (A) = sup (-A), dette skal forstås som - $\sqrt{2}$

Bestemmer nu om der er maksimum og minimum for mængden :

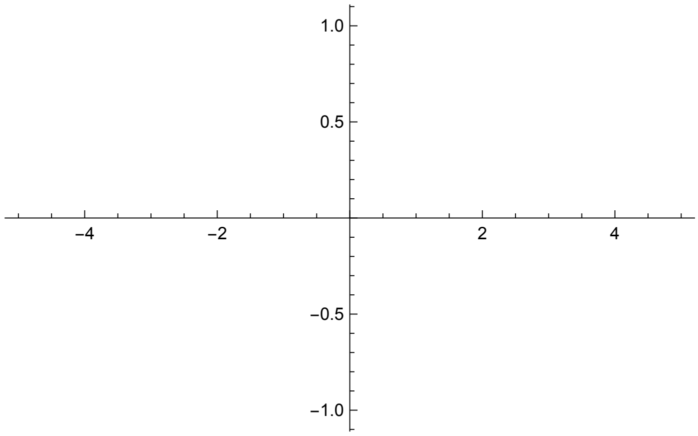
Kigger i F1 side 11 for Definition (Største element), som siger følgende
En mængde A $\subseteq$ R har et største element hvis A har et element som er $\geq$ alle elementer i A. Hvis M er største element i A skriver man max (A) = M.

Tilsvarende for mindste element min (A) som defineret på samme måde.

Super derfor kan jeg nu sige følgende :

Det ses at A intet maksimum har da vi for ethvert tal a in A kan finde et tal, som er større
Det ses også at A ej heller har et minimum, idet man for ethvert element a in A har mulighed for at finde et tal, som er mindre.

```
Plot[x^2 < 2, {x, -5, 5}]
```



b)

$B = \left\{x \text{ in } \mathbb{R} \mid x > 0,\ x + \frac{1}{x} < 3\right\}$

Note til mig selv : Har søgt på ordet (inequalities) i mathematica for at finde denne metode.

```
Reduce[{x > 0, x + 1/x < 3}, x] (*Løser uligheden for x*)
```

$\frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) < x < \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$

Herved har jeg fundet sup (M) og inf (M) for denne mængde :

$\text{inf } (B) = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$ **og** $\text{sup } (B) = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$

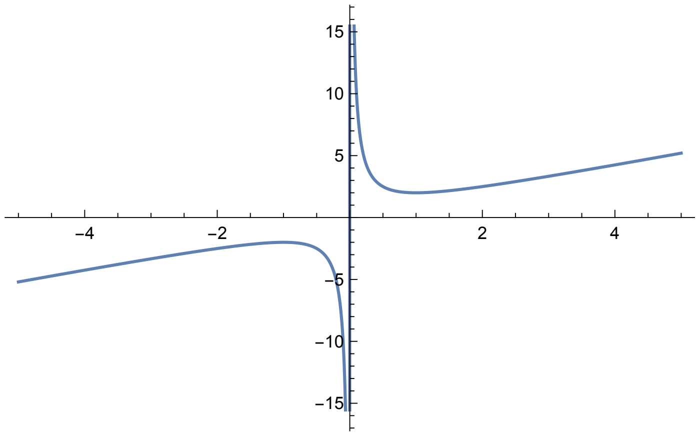
Så både A og B har ikke et minimum eller maksimum.

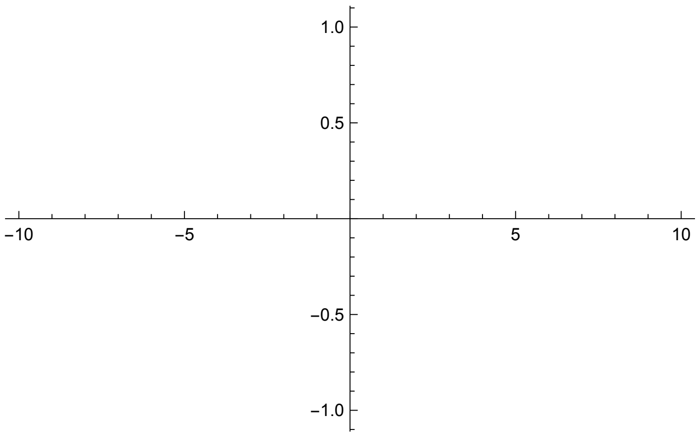
Kigger i F1 side 11 for Definition (Største element), som siger følgende
En mængde A $\subseteq$ R har et største element hvis A har et element som er $\geq$ alle elementer i A. Hvis M er største element i A skriver man max (A) = M.

Tilsvarende for mindste element min (A) som defineret på samme måde.

Det ses at A intet maksimum har da vi for ethvert tal a in A kan finde et tal, som er større
Det ses også at A ej heller har et minimum, idet man for ethvert element a in A har mulighed for at finde et tal, som er mindre.

```
Plot[x + 1/x, {x, -5, 5}]
Plot[x > 0, {x, -10, 10}]
```





Opgave 2

Opgave 2 Brug *definitionen* af konvergens af en følge til at eftervise gyldigheden af ligningerne

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)=3 \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2\sin n}{n}=0$$

Vink. Husk, at $|\sin x| \le 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Svar :

a)

Håndberegning :

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)=3$$

Anvender definition 2.3 og implicit (2.8) fra side 7 i kompendie 1

Definition 2.3. *En følge* (x_n) *i* $\mathbb{R}$ *siges at have* $a \in \mathbb{R}$ *som* **grænseværdi** *(eller* **grænsepunkt***), og vi skriver*

$$x_n \to a \text{ for } n \to \infty, \quad \text{kort } x_n \to a\,,$$

hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N}\colon |x_n - a| < \varepsilon \text{ for alle } n > N\,. \tag{2.8}$$

(Sagt med ord: For ethvert positivt ε *findes et nummer* N*, så at* $|x_n - a| < \varepsilon$ *for alle* n *større end dette nummer. Billedligt talt: Hver gang "fjenden" præsenterer et* $\varepsilon > 0$*, kan vi "afparere" dette med et* N*, for hvilket der gælder at* $|x_n - a| < \varepsilon$ *for* $n > N$*.)*

Når der er en grænseværdi (i $\mathbb{R}$*), siges følgen at være* **konvergent.** *Ellers kaldes den* **divergent.**

Indsætter nu dette i (2.8).

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N}$: Abs$\left[\frac{-2}{n}\right] < \epsilon \; \forall n > N$

Reduce$\left[\left\{\text{Abs}\left[\frac{-2}{n}\right] < \epsilon\right\}, n\right]$ /. {n → 3, ϵ → 2}

True

Så jeg ved at uanset hvilket positivt ϵ jeg vælger,

så skal jeg blot sætte $N \geq \frac{2}{\epsilon}$ for at den givne ulighed holder.

Ser altså at dette er sandt.

Kunne til denne delopgave også godt have anvendt
beviset for sætning 2.5 side 8 i kompendie 1 til at vise dette

Mathematica beregning :

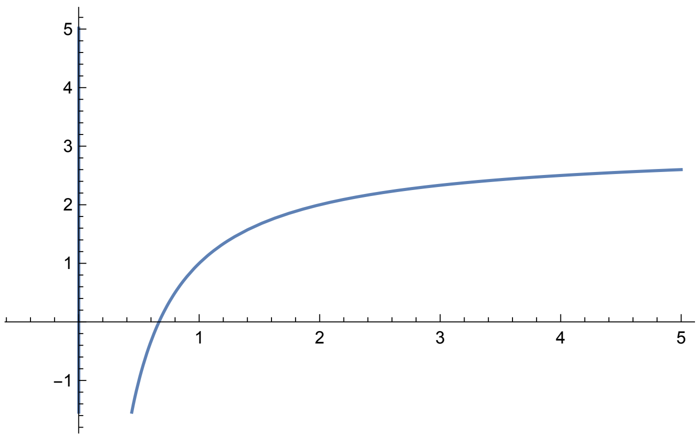
Limit$\left[3 - \frac{2}{n}, n \to \infty\right]$

3

Hvilket også viser at det er sandt.

Prøver, at tegne dem for intuitiv forståelse :

Plot$\left[3 - \frac{2}{n}, \{n, -0.5, 5\}\right]$



b)

Håndberegning :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2*\text{Sin}[n]}{n}\right) = 0$$

Samme fremgangsmetode igen :

Anvender definition 2.3 og implicit (2.8) fra side 7 i kompendie 1

Definition 2.3. *En følge* (x_n) *i* $\mathbb{R}$ *siges at have* $a \in \mathbb{R}$ *som* **grænseværdi** *(eller* **grænsepunkt***), og vi skriver*

$$x_n \to a \text{ for } n \to \infty, \quad \text{kort } x_n \to a\,,$$

hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N}\colon |x_n - a| < \varepsilon \text{ for alle } n > N\,. \tag{2.8}$$

(Sagt med ord: For ethvert positivt ε *findes et nummer* N*, så at* $|x_n - a| < \varepsilon$ *for alle* n *større end dette nummer. Billedligt talt: Hver gang "fjenden" præsenterer et* $\varepsilon > 0$*, kan vi "afparere" dette med et* N*, for hvilket der gælder at* $|x_n - a| < \varepsilon$ *for* $n > N$*.)*

Når der er en grænseværdi (i $\mathbb{R}$*), siges følgen at være* **konvergent.** *Ellers kaldes den* **divergent.**

Indsætter nu dette i (2.8).

$$\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, \mathbb{N} \in \mathbb{N} : \text{Abs}\left[\frac{2*\text{Sin}[n]}{n}\right] < \epsilon\ \forall\, n > \mathbb{N}$$

```
Reduce[{Abs[2*Sin[n]/n] < ϵ ∀ n > N}, n] /. {n → 3, ϵ → 2}
```

Kan konkludere,
at ligegyldigt hvilket ϵ man vælger kan det maksimalt være tilfældet ,
at man skal sætte $N \geq \frac{2}{\epsilon}$ for at uligheden holder.

Ser at dette er sandt.

Kunne til denne delopgave også godt have anvendt
beviset for sætning 2.5 side 8 i kompendie 1 til at vise dette

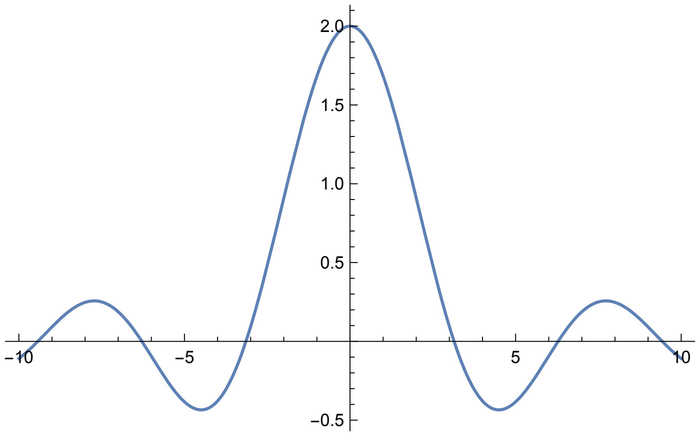
Mathematica beregning :

```
Limit[2*Sin[n]/n, n → ∞]
```

0

Prøver, at tegne dem for intuitiv forståelse :

```
Plot[2 * Sin[n] / n, {n, -10, 10}]
```



Opgave 3

Opgave 3 Bestem følgende grænseværdier:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+2n}{3n^4-7} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{-2n^3+7} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n-13}{7n-4}$$

Vink.

$$\frac{3n^2-4}{-2n^3+7} = \frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}}{-2+\frac{7}{n^3}}$$

Svar :

a)

Anveder sætning 2.7 regning med grænseværdier fra side 8 i kompendie 1.

Hånd beregning :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8\,n^4+2\,n}{3\,n^4-7}\right)$$

Dividere både nævner og tæller med n^4

$$\frac{8\,n^4+2\,n}{n^4} \text{ // Simplify}$$

$$\frac{3\,n^4-7}{n^4} \text{ // Simplify}$$

$$8+\frac{2}{n^3}$$

$$3-\frac{7}{n^4}$$

herved fås :

$$\frac{8+\frac{2}{n^3}}{3-\frac{7}{n^4}}$$

Opdeler dem nu igen, så jeg har (starter med at beregne for tælleren) :

$\lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{2}{n^3}\right)$ (*omskriver dette*)

$8+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}\right)$ (*da det vides at n→∞, derved $\frac{2}{\infty^3}$=0 og derfor er svaret altså 8*)

tjekker :

$\frac{2}{\infty^3}$

0

$8+\text{Limit}\left[\frac{2}{n^3}, n\to\infty\right]$

8

$8+\text{Limit}\left[\frac{2}{n^3}, n\to\infty\right] = 8$

Beregner nu for nævneren :

$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{7}{n^4}\right)$ (*omskriver dette*)

$3-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^4}\right)$ (*da det vides at n→∞ og $\frac{7}{n^4}$=0 er svaret altså 3*)

tjekker :

$\frac{7}{\infty^4}$

0

$3-\text{Limit}\left[\frac{2}{n^3}, n\to\infty\right]$

3

$3-\text{Limit}\left[\frac{2}{n^3}, n\to\infty\right] = 3$

Så ved anvendelse af sætning 2.7 (vi) kan jeg altså konkludere at

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^4+2n}{3n^4-7}\right) = \frac{8}{3}$

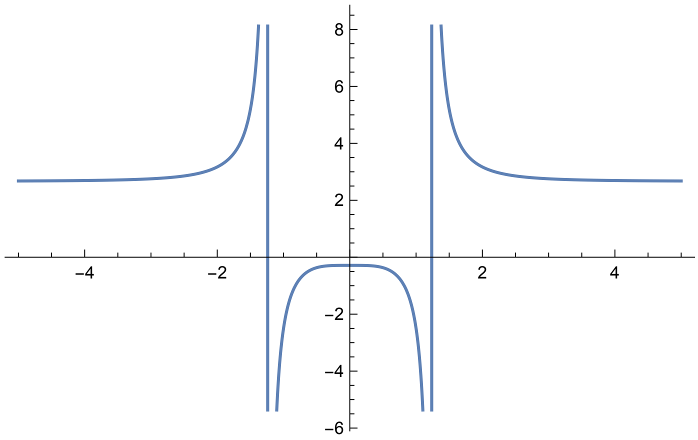
Mathematica beregning :

$\text{Limit}\left[\frac{8n^4+2}{3n^4-7}, n\to\infty\right]$ (*$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^4+2n}{3n^4-7}\right)=\frac{8}{3}$*)

$\frac{8}{3}$

Prøver, at tegne dem for intuitiv forståelse :

$$\text{Plot}\left[\frac{8\,n^4+2}{3\,n^4-7}, \{n, -5, 5\}\right]$$



b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\,n^2-4}{-2\,n^3+7}\right)$$

Hånd beregning :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\,n^2-4}{-2\,n^3+7}\right)$$

Dividere både nævner og tæller med n^3

$$\frac{3\,n^2-4}{n^3}\;//\;\text{Expand}$$

$$\frac{-2\,n^3+7}{n^3}\;//\;\text{Simplify}$$

$$-\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n}$$

$$-2+\frac{7}{n^3}$$

herved fås :

$$\frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}}{-2+\frac{7}{n^3}}$$

Opdeler dem nu igen, så jeg har (starter med at beregne for tælleren) :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}\right)\;\text{(*omskriver dette*)}$$

$$\frac{3}{n}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}\right)\;\text{(*da det vides at } n\to\infty,$$

derved $\frac{4}{n^3}=0$ og derfor er svaret altså 0, da $\frac{3}{n}\Rightarrow\frac{3}{\infty}=0$*)

tjekker :

$$\frac{4}{\infty^3}$$

0

$$\frac{3}{n} - \text{Limit}\left[\frac{4}{n^3}, n \to \infty\right] \; /. \; n \to \infty$$

0

$$\frac{3}{n} - \text{Limit}\left[\frac{4}{n^3}, n \to \infty\right] = 0$$

Beregner nu for nævneren :

$$\lim_{n\to\infty}\left(-2 + \frac{7}{n^3}\right) \text{(*omskriver dette*)}$$

$$-2 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^3}\right) \text{(*da det vides at } n\to\infty \text{ og } \tfrac{7}{n^3}=0 \text{ er svaret altså -2*)}$$

tjekker :

$$\frac{7}{n^3} \; /. \; n \to \infty$$

0

$$-2 + \text{Limit}\left[\frac{7}{n^3}, n \to \infty\right]$$

-2

$$-2 + \text{Limit}\left[\frac{7}{n^3}, n \to \infty\right] = -2$$

Så fra sætning 2.7 kan jeg altså konkludere at

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\,n^2 - 4}{-2\,n^3 + 7}\right) = \frac{0}{-2} = 0$$

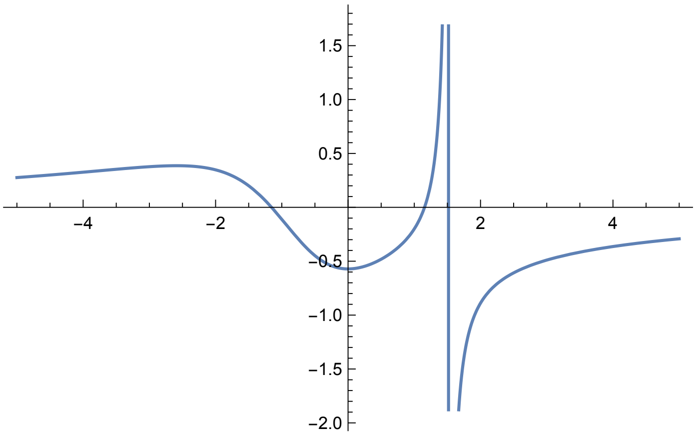
Mathematica beregning :

$$\text{Limit}\left[\frac{3\,n^2 - 4}{-2\,n^3 + 7}, n \to \infty\right]$$

0

Prøver, at tegne dem for intuitiv forståelse :

$\text{Plot}\left[\frac{3 n^2 - 4}{-2 n^3 + 7}, \{n, -5, 5\}\right]$



c)

Hånd beregning :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5 n^3 + 2 n - 13}{7 n - 4}\right)$$

Ser her at min nævner har en lavere grad en min tæller. For at jeg undgår at min omskrevne nævner kommer til at konvergere mod 0, dividere jeg derfor kun igennem med n

Egne ord : jeg ved at hvis nævneren kovergerede mod 0, ville resultatet i stedet være blevet - ∞, hvilket ikke er korrekt.

$\frac{5 n^3 + 2 n - 13}{n}$ // Simplify

$\frac{7 n - 4}{n}$ // Simplify

$$2 - \frac{13}{n} + 5 n^2$$

$$7 - \frac{4}{n}$$

herved fås :

$$\frac{2 + 5 n^2 - \frac{13}{n}}{7 - \frac{4}{n}}$$

Opdeler dem nu igen, så jeg har (starter med at beregne for tælleren) :

$\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{13}{n} + 5 n^2\right)$ (*omskriver dette*)

$2 + \lim_{n\to\infty}\left(5 n^2 - \frac{13}{n}\right)$ (*da det vides at n→∞,
derved $\frac{13}{n}+5n^2=0$ og derfor er svaret altså 0, da $\frac{3}{n}\Rightarrow\frac{3}{\infty}=0$*)

tjekker :

$$5\,n^2 - \frac{13}{n}\ /.\ n \to \infty$$

∞

$$2 + \text{Limit}\left[5\,n^2 - \frac{13}{n},\ n \to \infty\right]$$ (*obs du skal være opmærksom her på at det ikke er - der sættes uden for lim da dette istedet ville give -∞, hvilket er forkert (spørg TA om dette!!!)*)

∞

$$2 + \text{Limit}\left[5\,n^2 - \frac{13}{n},\ n \to \infty\right] = \infty$$

Beregner nu for nævneren :

$$\lim_{n\to\infty}\left(7 - \frac{4}{n}\right)$$ (*omskriver dette*)

$$7 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)$$ (*da det vides at $n\to\infty$ og $\frac{4}{n}=0$ er svaret altså 7*)

tjekker :

$$\frac{4}{n}\ /.\ n \to \infty$$

0

$$7 - \text{Limit}\left[\frac{4}{n},\ n \to \infty\right]$$

7

$$7 - \text{Limit}\left[\frac{4}{n},\ n \to \infty\right] = 7$$

Så fra sætning 2.7 kan jeg altså konkludere at

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\,n^3 + 2\,n - 13}{7\,n - 4}\right) = \frac{\infty}{7} = \infty$$ (*skriver $\frac{\infty}{7}$ for at gøre det mere overskueligt for mig selv, men HUSK at Henrik siger dette ikke er muligt, så gør det ikke til eksamen *)

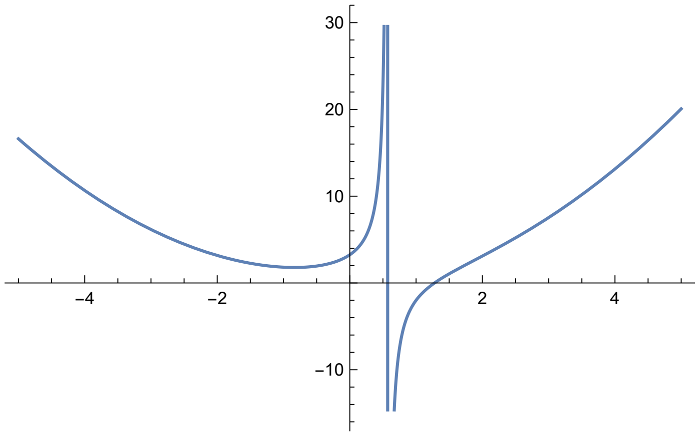
Mathematica beregning :

$$\text{Limit}\left[\frac{5\,n^3 + 2\,n - 13}{7\,n - 4},\ n \to \infty\right]$$

∞

Prøver, at tegne dem for intuitiv forståelse :

```
Plot[(5 n^3 + 2 n - 13)/(7 n - 4), {n, -5, 5}]
```



Øvelse 2.2 i GG (side 48)

Øv. 2.2 Et eksempel fra rentesregning (knytter an til Eksempel 2.11 2)):
En kapital på 1 kr. anbringes til forrentning med rente og renters rente i et tidsrum af m år og vokser derved til K kr. Rentefoden omsat til årsbasis kaldes r, altså $100r\%$ p.a. Vi antager, at der går n terminer på et år (det almindeligste p. t. er $n = 4$). Hver termin er således $1/n$ år, og rentefoden pr. termin er r/n. Det samlede antal terminer på de m år, forrentningen varer, er mn. Slutkapitalen er derfor

$$K = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{mn}.$$

Udregn for $r = 0,08$ kapitalen K i hvert af tilfældene

1) $n = 2$ (halvårlig rentetilskrivning)
2) $n = 4$ (kvartårlig rentetilskrivning)
3) $n = 12$ (månedlig rentetilskrivning)
4) $n \to \infty$ (kontinuerlig rentetilskrivning)

Vedr. 4) benyttes omskrivningen

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{mn} = \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n}\right]^{m},$$

og K defineres som grænseværdien heraf for $n \to \infty$.

Hvad er i øvrigt forklaringen på, at K bliver større når terminerne bliver kortere (og derfor størst ved kontinuerlig rentetilskrivning)?

Svar :

1)

```
K = (1 + r/n)^(m*n)

K == (1 + r/n1)^n2 /. {r → 0.08, n1 → 2, n2 → 2}
```

```
K == 1.0816
```

$$K == \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{2} = 1.0816$$

2)

$$K = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{m*n}$$

$$K == \left(1 + \frac{r}{n1}\right)^{n2} \text{ /. } \{r \to 0.08,\ n1 \to 2,\ n2 \to 4\}$$

K == 1.16986

$$K == \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{4} = 1.16986$$

3)

$$K = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{m*n}$$

$$K == \left(1 + \frac{r}{n1}\right)^{n2} \text{ /. } \{r \to 0.08,\ n1 \to 2,\ n2 \to 12\}$$

K == 1.60103

$$K == \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{12} = 1.60103$$

4)

$$K = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{m*n}$$

$$K == \left(1 + \frac{r}{n1}\right)^{n2} \text{ /. } \{r \to 0.08,\ n1 \to 2,\ n2 \to \infty\}$$

K == ∞

$$K == \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{\infty} = \infty$$

Forklaringen er, at K hele tiden bliver opløftet i en større grad, hvorved $\left(1 + \frac{r}{n}\right)$ bliver større.

Prøver at analysere grænseværdierne når n er gående mod uendelig, altså

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{m*n}\right)$$

$\text{Limit}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{m*n}, n\to\infty\right]$ (*Forsøger med Mathematica, men kan ikke rigtig se resultatet for mig.*)

$e^{m\,r}$

Opgave 4

Opgave 4 Bestem følgende grænseværdier:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+2n}{e^n-7} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{(\ln n)^4+6n^5}$$

Vink. Ved brug af grænseværdierne i Eksempel 2.9 i GG kan samme fremgangsmåde som i Opgave 3 anvendes.

a)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\,n^4+2\,n}{e^n-7}\right)$ og $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{(\text{Log}[n])^4+6\,n^5}\right)$

Svar :

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\,n^4+2\,n}{e^n-7}\right)$

Hånd beregning :

ser på Eksempel 2.9 (iv)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\,n^4+2\,n}{e^n-7}\right)$

Dividere både nævner og tæller med e^n

$\frac{5\,n^4+2\,n}{e^n}$ // Expand

$\frac{e^n-7}{e^n}$ // Expand

$2\,e^{-n}\,n+5\,e^{-n}\,n^4$

$1-7\,e^{-n}$

herved fås :

$\frac{2\,e^{-n}\,n+5\,e^{-n}\,n^4}{1-7\,e^{-n}}$

Opdeler dem nu igen, så jeg har (starter med at beregne for tælleren) :

$\lim_{n\to\infty}(2\,e^{-n}\,n+5\,e^{-n}\,n^4)$ (*omskriver dette*)

$2\lim_{n\to\infty}(e^{-n}\,n)+5\lim_{n\to\infty}(e^{-n}\,n^4)$ (**)

tjekker :

$e^{-n}\, n$ /. $n \to \infty$

$e^{-n}\, n^4$ /. $n \to \infty$

$\frac{n}{e^n}$ /. $n \to \infty$

$\frac{n^4}{e^n}$ /. $n \to \infty$

Indeterminate

Indeterminate

Indeterminate

Indeterminate

2 * Limit[e^{-n} n, n → ∞] + 5 * Limit[e^{-n} n^4, n → ∞]

0

2 * Limit[e^{-n} n, n → ∞] + 5 Limit[e^{-n} n^4, n → ∞] = 0 (*Som H pointere her, kunne jeg her også have anvendt Eksempel 2.9(iv) fra side 11 kompendie 1, hvor det så ville have været muligt at se med det samme at den var nul, da $\left(\frac{n^a}{b^n}\to 0\right.$ når a>0, b>1$\left.\right)$, $\left(\frac{n^4}{e^n}\to 0\right.$ når a>0, b>1$\left.\right)$. e=2.71828, så begge opfyldt*)

N[e]

2.71828

Beregner nu for nævneren :

$\lim_{n\to\infty} (1 - 7\, e^{-n})$ (*omskriver dette*)

$1 - \lim_{n\to\infty} (7\, e^{-n})$ (*da det vides at n→∞ og 7 e^{-n}=0 er svaret altså 1*)

tjekker :

$7\, e^{-n}$ /. n → ∞ (*kunne også her anvende NB øverst side 13 *)

0

1 - Limit[7 e^{-n}, n → ∞]

1

1 - Limit[7 e^{-n}, n → ∞] = 1

Så fra sætning 2.7 kan jeg altså konkludere at

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\, n^4 + 2\, n}{e^n - 7}\right) = \frac{0}{1} = 0$$

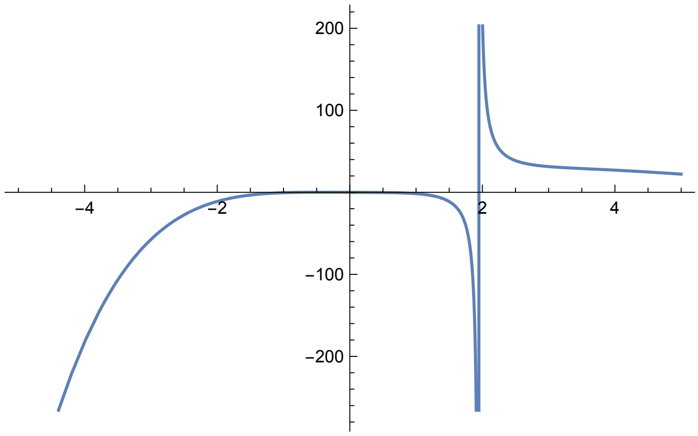
Mathematica beregning :

$\text{Limit}\left[\frac{5\, n^4 + 2\, n}{e^n - 7},\ n \to \infty\right]$

0

Prøver, at tegne dem for intuitiv forståelse :

$$\text{Plot}\left[\frac{5 n^4 + 2 n}{e^n - 7}, \{n, -5, 5\}\right]$$



b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{(\text{Log}[n])^4 + 6 n^5}\right)$$

Hånd beregning :

ser på Eksempel 2.9 (iii)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{(\text{Log}[n])^4 + 6 n^5}\right)$$

Dividere både nævner og tæller med n^5

$$\frac{n^5}{n^5} \text{ // Expand}$$

$$\frac{(\text{Log}[n])^4 + 6 n^5}{n^5} \text{ // Expand}$$

1

$$6 + \frac{\text{Log}[n]^4}{n^5}$$

herved fås :

$$\frac{1}{6 + \frac{\text{Log}[n]^4}{n^5}}$$

Opdeler dem nu igen, så jeg har (starter med at beregne for tælleren) :

$\lim_{n\to\infty}$ (1) (*omskriver dette*)

Limit[1, n → ∞]

1

$$\lim_{n\to\infty}(1) = 1$$

Beregner nu for nævneren :

$$\lim_{n\to\infty}\left(6 + \frac{\text{Log}[n]^4}{n^5}\right) \text{(*omskriver dette*)}$$

$$6 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\text{Log}[n]^4}{n^5}\right) \text{(**)}$$

tjekker :

$$\frac{\text{Log}[n]^4}{n^5} \text{ /. } n \to \infty$$

Infinity::indet : Indeterminate expression 0 ∞ encountered. ≫

Indeterminate

$$6 + \text{Limit}\left[\frac{\text{Log}[n]^4}{n^5}, n \to \infty\right]$$

6

$$6 + \text{Limit}\left[\frac{\text{Log}[n]^4}{n^5}, n \to \infty\right] = 6$$

Så fra sætning 2.7 kan jeg altså konkludere at

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{(\text{Log}[n])^4 + 6\,n^5}\right) = \frac{1}{6}$$

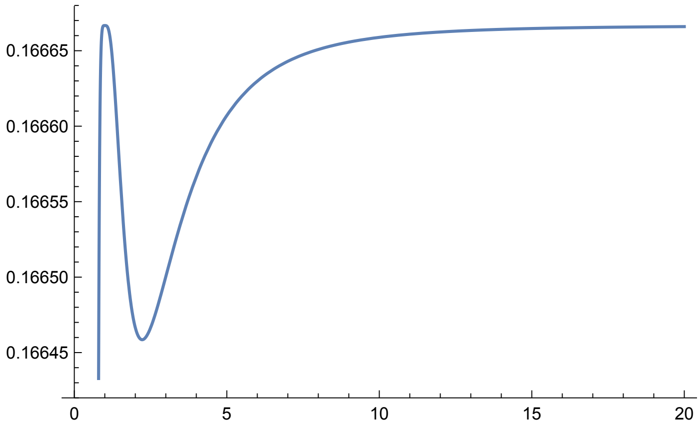
Mathematica beregning :

$$\text{Limit}\left[\frac{n^5}{(\text{Log}[n])^4 + 6\,n^5}, n \to \infty\right]$$

$$\frac{1}{6}$$

Prøver, at tegne dem for intuitiv forståelse :

$$\text{Plot}\left[\frac{n^5}{(\text{Log}[n])^4 + 6\,n^5}, \{n, 0, 20\}\right]$$



Opgave 5

Opgave 5 Find eksempler på følger (a_n) og (b_n), således at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, og således at

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ *c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -2$

Svar :

a)

Mathematica beregning :

$$\text{Limit}\left[\frac{10\,000}{n^2}, n \to \infty\right] (\text{*tester den er nul*})$$

$$\text{Limit}\left[\frac{1\,000\,000}{n}, n \to \infty\right] (\text{*tester den er nul*})$$

0

0

$$\text{Limit}\left[\frac{a_n}{b_n}, n \to \infty\right] /. \left\{a_n \to \frac{10\,000}{n^2}, b_n \to \frac{1\,000\,000}{n}\right\}$$

0

b)

Mathematica beregning :

$$\text{Limit}\left[\frac{530}{n*2}, n \to \infty\right] \text{(*tester den er nul*)}$$

$$\text{Limit}\left[\frac{530}{n^2*2}, n \to \infty\right] \text{(*tester den er nul*)}$$

0

0

$$\text{Limit}\left[\frac{a_n}{b_n}, n \to \infty\right] \text{ /. } \left\{a_n \to \frac{530}{n*2}, b_n \to \frac{530}{n^2*2}\right\}$$

∞

c)

Mathematica beregning :

$$\text{Limit}\left[\frac{-2}{n} + \frac{1}{n^2}, n \to \infty\right] \text{(*tester den er nul*)}$$

$$\text{Limit}\left[\frac{1}{n}, n \to \infty\right] \text{(*tester den er nul*)}$$

0

0

$$\text{Limit}\left[\frac{a_n}{b_n}, n \to \infty\right] \text{ /. } \left\{a_n \to \frac{-2}{n} + \frac{1}{n^2}, b_n \to \frac{1}{n}\right\}$$

-2

$$\text{Limit}\left[\frac{2 - 4n}{n^2}, n \to \infty\right] \text{(*tester den er nul*)}$$

$$\text{Limit}\left[\frac{2}{n}, n \to \infty\right] \text{(*tester den er nul*)}$$

0

0

$$\text{Limit}\left[\frac{a_n}{b_n}, n \to \infty\right] \text{ /. } \left\{a_n \to \frac{2 - 4n}{n^2}, b_n \to \frac{2}{n}\right\}$$

-2

Opgave 6 til skriftelig aflevering

Opgave 6 til skriftlig aflevering. Gør rede for, at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0 \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{(\ln n)^2-n}=-\infty$$

Vink.

$$0\le\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n}=\frac{1}{n}\frac{2\cdot3\cdots n}{n\cdot n\cdots n}\le\frac{1}{n}$$

og

$$\frac{(\ln n)^2}{n}=\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2$$

Svar :

a)

Hånd beregning :

To fremgangs metoder
- Første
metode : Jeg kan endten anvende eksempel 2.9 (ii) fra side 11 i kompendie 1 (GG), der siger at $\frac{1}{n^a}\to 0$ når $a > 0$. Herved vides det,
at $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)=0$ thi $0\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)\le 0$ (Sandwichsætningen side 24 i F1)

- Anden metode : Da jeg har en vurdering af den givne følge opadtil og nedadtil er det muligt for mig at anvende Sandwichsætningen fra side 24 i slidesæt F1.

(1) $0\le\frac{n!}{n^n}\le\frac{1}{n}$ for alle $n\in\mathbb{N}$

(2) Grænseværdien af den konstante følge 0 er trivielt lig 0. Grænseværdien $\frac{1}{n}\to 0$ for $n\to\infty$ kendes fra side 16 slidesæt F1

Eftersom den nedre og øvre følge således begge har en grænseværdi 0, vil også $\frac{n!}{n^n}$ have grænseværdi 0 ifølge sætningen.

Mathematica beregning :

```
Limit[n!/n^n, n → ∞]
```

0

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{(\text{Log}[n])^2-n}\right)$$

Hånd beregning :

ser på Eksempel 2.9 (iii)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{(\mathrm{Log}[n])^2-n}\right)$$

Dividere både nævner og tæller med n,
da jeg ligesom tidligere fra opgave 3. c ser at min nævner er af lavere grad
end min tæller. For at undgå at den omskrevne nævner er konvergere mod nul,
dividere jeg derfor kun igennem med n.

Deler dem op og dividere med n.

$$\frac{n^2+3}{n}\ //\ \mathrm{Expand}$$

$$\frac{(\mathrm{Log}[n])^2-n}{n}\ //\ \mathrm{Simplify}$$

$$\frac{3}{n}+n$$

$$-1+\frac{\mathrm{Log}[n]^2}{n}$$

herved fås :

$$\frac{\frac{3}{n}+n}{-1+\frac{\mathrm{Log}[n]^2}{n}}$$

Opdeler dem nu igen, så jeg har (starter med at beregne for tælleren) :

$$\lim_{n\to\infty}\left(3*\frac{1}{n}+n\right)\ (*\text{omskriver dette}*)$$

$$3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+n\right)\ (**)$$

tjekker :

$$\frac{1}{n}+n\ /.\ n\to\infty$$

$$\infty$$

$$3\,\mathrm{Limit}\left[\frac{1}{n}+n,\ n\to\infty\right]$$

$$\infty$$

$$3\,\mathrm{Limit}\left[\frac{1}{n}+n,\ n\to\infty\right]=\infty$$

Beregner nu for nævneren :

$$\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{\mathrm{Log}[n]^2}{n}\right)\ (*\text{omskriver dette}*)$$

$$-1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{Log}[n]^2}{n}\right)\ (**)$$

tjekker :

$$\frac{\text{Log}[n]^2}{n} \;/.\; n \to \infty$$

Infinity::indet : Indeterminate expression 0 ∞ encountered. ≫

Indeterminate

$$-1 + \text{Limit}\left[\frac{\text{Log}[n]^2}{n}, n \to \infty\right]$$

-1

$$-1 + \text{Limit}\left[\frac{\text{Log}[n]^2}{n}, n \to \infty\right] = -1$$

Så fra eksempel 2.9 (iii) og med en lille husker om at f (x) = x^2 er kontinuert i x. fås det at

$$\frac{\infty}{-1}$$

$-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{(\text{Log}[n])^2 - n}\right) = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

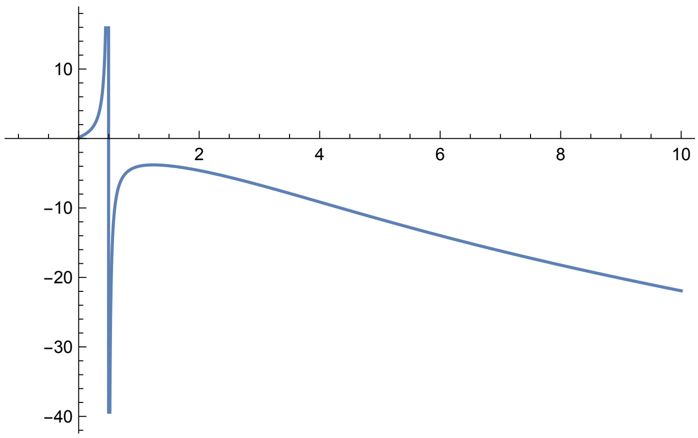
Mathematica beregning :

$$\text{Limit}\left[\frac{n^2+3}{(\text{Log}[n])^2 - n}, n \to \infty\right]$$

$-\infty$

Prøver at tegne for yderligere forståelse :

$$\text{Plot}\left[\frac{n^2+3}{(\text{Log}[n])^2 - n}, \{n, -1, 10\}\right]$$



Eksamen 2014A - Første forsøg

Opgave 1 - Argumenter for at $\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}} \to \infty$ for n→∞

Begrunder med matematiske argumenter :

Prøver at omskrive formen :

$$\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}}$$

$$\Rightarrow x_n = \text{Exp}[\text{Log}[x_n]]$$

$$\text{Simplify}[x_n == \text{Exp}[\text{Log}[x_n]]]$$

True

Der mangler sgu lidt . . . .

Prøver nu at argumentere for det ved beregning :

Hånd beregning :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}}\right)$$

Deler tæller og nævner op og dividere med n^{100}.

$$\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}} \text{ // Expand}$$

$$\frac{n^{100}}{n^{100}} \text{ // Simplify}$$

$$\frac{e^{n^{1/100}}}{n^{100}}$$

1

herved fås :

$$\frac{\frac{e^{n^{1/100}}}{n^{100}}}{1}$$

Opdeler dem nu igen, så jeg har (starter med at beregne for tælleren) :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{n^{1/100}}}{n^{100}}\right)$$

tjekker :

$$\frac{e^{n^{1/100}}}{n^{100}} \;/.\; n \to \infty$$

Infinity::indet : Indeterminate expression $0\,\infty$ encountered. ≫

Indeterminate

$$\text{Limit}\left[\frac{e^{n^{1/100}}}{n^{100}}, n \to \infty\right]$$

∞

$$\text{Limit}\left[\frac{e^{n^{1/100}}}{n^{100}}, n \to \infty\right] = \infty$$

Beregner nu for nævneren :

$\lim_{n\to\infty}(1)$ (*omskriver dette*)

tjekker :

$1 \;/.\; n \to \infty$

1

Limit[1, n → ∞]

1

Limit[1, n → ∞] = 1

$$\frac{\infty}{1}$$

∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}}\right) = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Mathematica beregning :

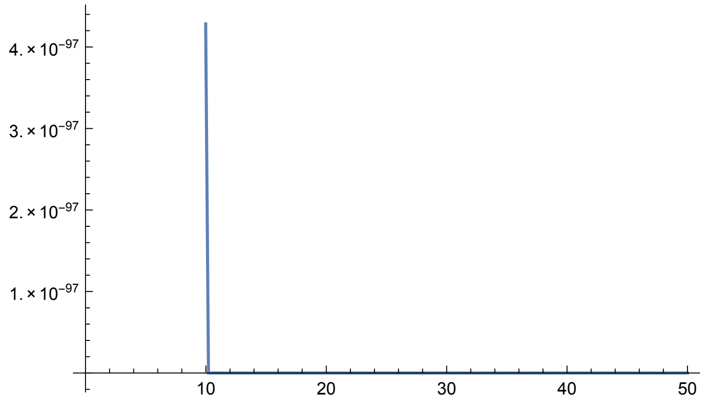
$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}}, n \to \infty\right] \text{(* Herved illustreret at } \frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}} \to \infty \text{ *)}$$

∞

Ser herved at $\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}}$ er gående mod uendelig for $n \to \infty$.

For intuition og argumentation for at den er gående mod uendelig prøver jeg at tegne

```
Plot[Exp[n^(1/100)]/n^100, {n, 0, 50}] (* Tegner nu for illustratition Exp[n^(1/100)]/n^100 *)
```



Ser her at det passer at den er gående mod uendelig.

Herved er der illustreret og argumenteret for at $\frac{\text{Exp}\left[\sqrt[100]{n}\right]}{n^{100}} \to \infty$ for $n \to \infty$ er sandt.