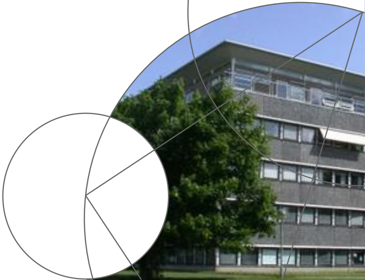
Hvad bør en option koste?

Rolf Poulsen rolf@math.ku.dk
Institut for Matematiske Fag



19. marts 2015

Reklame først: Matematik-økonomi-uddannelsen

Økonomi på et solidt matematisk/statistisk grundlag.

Delene økonomi og matematik blandes på enkeltkursusniveau; det er ikke "mat" med bifag i "øk" eller omvendt.

Det *er* en erhvervs- og forskningsrettet uddannelse; det er *er ikke* en gymnasie/handelsskolelærer-uddannelse.

60 pladser på KU-mat/øk i 2014, snit 9,1. Der findes en meget tilsvarende uddannelse i Aarhus.

Mere information på http://studier.ku.dk/

Mat/øk's hovedområder:

- Finansiel teori (aktier, obligationer, optioner=dagens emne)
- Operationsanalyse (løsning af store/svære optimeringsproblemer)
- Økonometri (statistisk analyse af økonomiske data)
- Makroøkonomi
- Mikroøkonomi, fx spilteori

Hvad er en option?

En option er en ret, men ikke pligt, til at gøre *noget*. (Passer udmærket sprogligt.)

Optioner er et eksempel på et såkaldt derivat eller afledt aktiv. Eller en betinget fordring.

Afledte i matematisk forstand — differentialkvotienter — spiller også en rolle. Men dem kalder man i finans som regel for grækere; *Greeks*! Og mens vi er ved TLA: SRP.

Den grundlæggende fremgangsmåde til prisfastsættelse: Black og Scholes (1973), Merton (1974) ($\rightsquigarrow$ Nobelpris 1997).

Vi ser på en mild udgave, som dog anvendes i enormt omfang; kræver kun løsning af to lineære ligninger med to ubekendte.

De finansielle markeder for optioner er enorme.

Et kvalificeret bud siger, at der er markedsværdier på US$ $\sim 10 \times 10^{12}$ på verdens børser og yderligere US$ $\sim 5 \times 10^{12}$ *over-the-counter*.

(Hele verdens årlige bruttonationalprodukt er US$ 70-80$\times 10^{12}$. ($10^{12} = 1.000.000.000.0000$ kaldes en billion på dansk, *a trillion* på engelsk.))

En call-option (dansk: købsoption) med

- ABC aktien som underliggende aktiv
- aftale-pris K
- udløbsdato T

giver indehaveren ret, men ikke pligt, til at købe en ABC aktie på tid T til prisen K. Værdien ved udløb er

$$\max(\text{aktiekurs}(T) - K, 0). \qquad \text{(Hvorfor?)}$$

En put-option (dansk: salgsoption) giver ret til at sælge til en bestemt pris.

Optioner og risikostyring

ABC vinder en licitation og skal derfor levere et produkt til det amerikanske marked.

Udgiften idag (til produktion) er DKK 6×10^6. Indtægten om 10 måneder er US$ 1 $\times 10^6$.

Kursen idag er 7,05. Så det er en god forretning. Men hvad hvis kursen falder i mellemtiden?

En put-option (på valutakursen) kan sikre virksomheden retten til at sælge US$ om 10 måneder til en aftalt kurs og samtidig have glæde af en kursstigning.

I teori-praksis ville man nok indgå en såkaldt terminskontrakt (engelsk: forward); her er man tvunget til at sælge til en på forhånd bestemt kurs — men til gengæld er kontrakten (næsten) gratis.

I praksis-praksis . . . er det mere kompliceret.

Optioner og spekulation

Onsdag 18. marts 2015 kl. ca. 16: C20-indekset ligger i ca. 960. Jeg *tror* det falder indenfor et par måneder.

Jeg kan se, at put-optioner med udløb 20. maj 2015 og aftalekurs $K = 930$ koster 22,75. Dem køber jeg 10 af. Det koster 227,50.

Hvis nu C20-indekset om 2 måneder ligger i kurs 860 (et fald på godt 6% ift. idag), så får jeg $10 \cdot (930\text{-}860) = 700$ og har tjent 472,50; en fortjeneste på over 200%! Hvis på den anden side indekset lander i 930 eller højere, så har jeg tabt de 227,50; mao. et tab på 100%.

Hvad er en fair pris for en option?

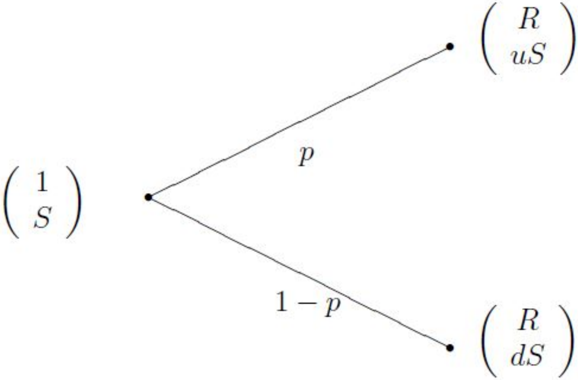
Eller: Hvor kommer de 22,75 fra?

Indledende betragtninger:

- Prisen må være ≥ 0.
- Større aftalepris K giver lavere pris på en call-option
- Må afhænge af ABC aktiens pris idag og af fremtidig udvikling
- Renten, som bestemmer nutidsværdien af fremtidige sikre betalinger, har måske også betydning

Vi bygger en model!

En-periode-binomialmodellen



- Aktien koster idag S. Om 1 periode (fx 1 år) koster den enten $u \times S$ (m/ shh p) eller $d \times S$ (m/ ssh $1 - p$).
- Der er også en bankbog med renten r (og vi sætter af bekvemmelighed $R = 1 + r$).
- Vi antager at $0 < d < R < u$. Hvorfor er dette en rimelig betingelse?
- På tid 1 er call-optionens værdi enten $C_u = \max(u \times S - K, 0)$ eller $C_d = \max(d \times S - K, 0)$.

Hvad er i denne simple model en fair pris på call-optionen på tid 0?

- Vi gør noget snedigt: Lav en *portefølje* (a, b) bestående af a aktier og b enheder af pengemarkedsinstrumentet således at

$$
\begin{aligned}
a(uS) + bR &= C_u \\
a(dS) + bR &= C_d
\end{aligned}
$$

- Med andre ord: Porteføljens værdi er den samme som optionens værdi til tid 1 uanset om aktieprisen er gået op eller ned
- Løser vi disse 2 ligninger med 2 ubekendte får vi

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \\
b &= \frac{1}{R}\frac{(uC_d - dC_u)}{(u-d)}
\end{aligned}
$$

- Prisen på call-optionen må nu være prisen for at lave den replikerende portefølje

$$\begin{aligned} & aS + b \cdot 1 \\ = & \text{ ...regne, regne...} \\ = & \left[\left(\frac{R-d}{u-d} \right) \frac{C_u}{R} + \left(\frac{u-R}{u-d} \right) \frac{C_d}{R} \right] \end{aligned}$$

- Prisen kan fortolkes som en forventet værdi.
- Sandsynlighedsparameteren er

$$\begin{aligned} q &= \frac{R-d}{u-d} \\ 1-q &= \frac{u-R}{u-d} \end{aligned}$$

- To overraskelser: (1) p er væk!, (2) prisen stiger med stigende rente (kræver lidt regneri).

Fler-periode-binomialmodellen

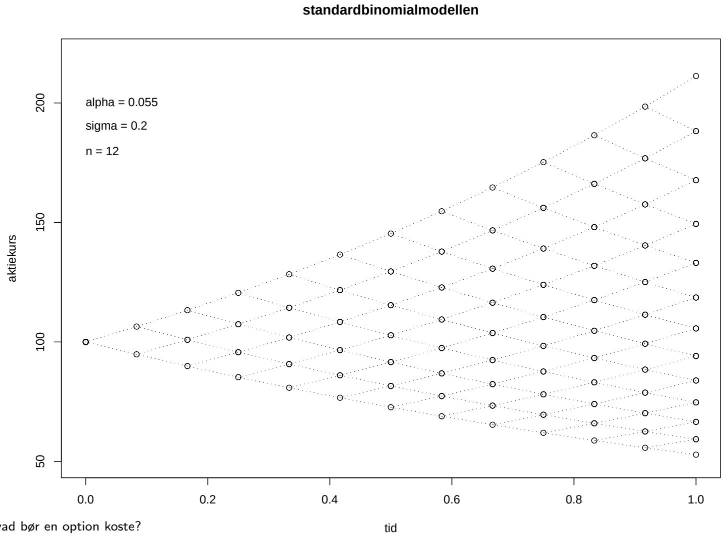
Problem:

- Urealistisk at forestille sig kun to tilstande
- Hvis vi har mere end to tilstande, kan vi ikke (generelt) finde en replikerende portefølje

Løsning:

- Vi sætter en masse en-periode-modeller sammen og bruger et dynamisk replikationsargument.
- Lettere gjort end sagt: Vi arbejder os simplethen baglæns tilbage igennem træet/gitteret.
  Nemt fx i Excel.

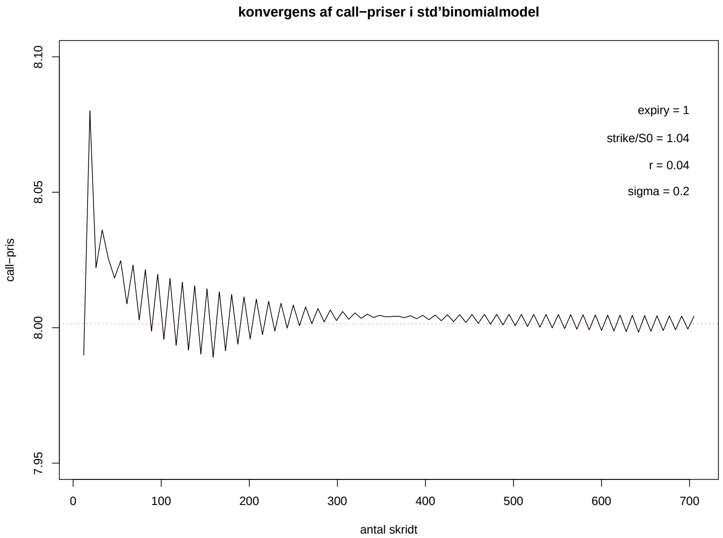
En 12-periode-model ku' se så ud



Stadigvæk noget svært at forholde sig til hvad u og d er/skal være.

Løsning (overraskende): En model med ∞ mange perioder er lettere at arbejde med. Specifikt lader vi tidsskridtlængden Δ gå imod 0 i en model hvor

$$u, d = \exp(\pm\sigma\sqrt{\Delta}).$$


konvergens af call−priser i std'binomialmodel
expiry = 1
strike/S0 = 1.04
r = 0.04
sigma = 0.2
call−pris
8.10
8.05
8.00
7.95
0
100
200
300
400
500
600
700
antal skridt

Man kan vise at call-prisen i grænsen er givet ved den såkaldte Black/Scholes-formel:

$$\begin{aligned}\mathrm{Call}(0) &= S(0)\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\\ &\qquad -e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),\end{aligned}$$

hvor Φ er fordelingsfunktionen for normalfordelingen.

Alt andet end σ kan man (mere eller mindre) observere direkte. Og aktiens forventede vækstrate indgår slet ikke!

Parameteren σ kaldes *volatiliteten* og man kan vise at aktieafkast (ca.) er normalfordelte, dvs.

$$\frac{S(t+\Delta) - S(t)}{S(t)} \sim N(\ldots \Delta, \sigma^2 \Delta)$$

og at afkastene er uafhængige. Det betyder at

- σ ret let kan estimeres fra data; 0.15-0.2 er typiske værdier
- formlen finder ekstremt stor anvendelse; faktisk så meget at folk kan have svært ved at skelne model og virkelighed

Vi ser at σ bestemmer hvor stor varians, der er på afkastene, dvs. hvor meget de svinger/hvor usikre de er.

Vigtigt resultat: Jo højere σ er, jo højere pris på call- og put-optioner. (Ja begge to!)

Forskringssynsspunkt: Optioner fjerner risiko, så rimeligt nok. "Limited downside risk."

Sætter vi ind i formlen (i en put-version) med $\sigma = 0.2$, så siger den, at put-option fra tidligere (kun) burde koste ca. 18 kr. Hmmm ...

Andre eksempler på optioner

Optionstankegangen er vanedannende, man ser dem overalt (dette kaldes Baader-Meinhof-fænomenet):

- Retten til at indfri et realkreditlån før udløb
- Muligheder for i investeringsprojekter at tage beslutninger undervejs
- Aktieoptioner til ledende medarbejdere (pro: "gulerod"; "con": volatilitetsafhængighed, manipulationsrisiko, notorisk dårlig regnskabsrapportering)
- Pensioner med afkastgarantier

Værdier kan beregnes med større eller mindre variationer over, hvad vi lige har set.