Forelæsningsnoter om

K-teori for C^*-algebraer

Flemming Larsen, Niels Jakob Laustsen,
Mikael Rørdam

Institut for Matematik og Datalogi
Odense Universitet
Campusvej 55
DK — 5230 Odense M

Forord

Dette notesæt er skrevet til et valgfrit kursus om K-teori for C^*-algebraer afholdt på Odense Universitet i foråret 1995. Noterne tager udgangspunkt i Kapitel I–IV i Bruce Blackadar's bog om K-teori, [Blackadar] og har endvidere lånt af fremstillingerne i [Murphy], [Wegge–Olsen] og [Thomsen].

Det valgfrie kursus blev undervist af den sidstnævnte forfatter, og de to andre forfattere var deltagere. De håndskrevne forelæsningsnoter blev i løbet af efteråret 1995 til dette TEX'ede notehæfte.

Nærværende anden udgave af K-teori noterne er lavet i sommeren 1996. En del (tryk-)fejl fra første udgave blevet rettet, enkelte argumenter er blevet strømlinet, og der er udarbejdet et index. Vi takker Steen Thorbjørnsen og Jesper Mygind for deres kommentarer.

Indhold

1 C^*-algebra-teori

Vi skal i dette afsnit kort repetere dele af teorien for C^*-algebraer, som vil blive benyttet i disse noter.

1.1 Definition

En C^*-algebra er en algebra over $\mathbb{C}$ med en norm $a \mapsto \|a\|$ og en involution $a \mapsto a^*$, som opfylder et antal aksiomer, bl.a. $\|a^*a\| = \|a\|^2$ og $\|a\| = \|a^*\|$.

1.2 Sætning (Gelfand–Naimark)

Der findes til enhver C^*-algebra A et Hilbertrum H og en isometrisk *-homomorfi: $\varphi : A \to B(H)$.

En C^*-algebra kaldes *separabel*, hvis den indeholder en tællelig tæt delmængde, og den kaldes *unital*, hvis den har en multiplikativ enhed 1. En *-homomorfi $\varphi : A \to B$ mellem unitale C^*-algebraer A og B kaldes *unital* (eller *enhedsbevarende,*) hvis $\varphi(1_A) = 1_B$.

1.3 Idealer og kvotienter

Hvis I er et lukket to-sidet ideal i en C^*-algebra A, så skriver vi $I \lhd A$. Ethvert lukket to-sidet ideal er automatisk selv-adjungeret og dermed en del-C^*-algebra (se [Murphy, 3.1.3]).

Antag $I \lhd A$. Sæt

$$A/I = \{a + I \mid a \in A\}\ , \quad \|a + I\| = \inf_{x \in I} \|a + x\|\ , \quad \pi(a) = a + I.$$

Så er A/I en C^*-algebra, $\pi\colon A \to A/I$ er en *-homomorfi, og $I = \mathrm{Ker}(\pi)$ (se [Murphy, 3.1.4]).

Lad $\varphi\colon A \to B$ være en *-homomorfi. Så er $\|\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$ for alle $a \in A$, og $\varphi(A)$ er en del-C^*-algebra af B (se [Murphy, 3.1.6]). φ er injektiv, hvis og kun hvis φ er isometrisk (se [Murphy, 3.1.5]). $\mathrm{Ker}(\varphi) \lhd A$, og der findes netop én *-homomorfi $\varphi_0\colon A/\mathrm{Ker}(\varphi) \to B$, så φ_0 er injektiv, og diagrammet

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A/\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[ur, "\varphi_0"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer. Dvs. $\varphi_0 \circ \pi = \varphi$.

1.4 Kort-eksakte følger

En (endelig eller uendelig) følge

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

kaldes *eksakt*, hvis $\mathrm{Im}(f_n) = \mathrm{Ker}(f_{n+1})$ for alle n. En eksakt følge af formen

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

kaldes *kort-eksakt.*

Hvis $I \lhd A$, så er

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

kort-eksakt, hvor ι her og fremover betegner inklusionsafbildningen, og hvor π er kvotient-afbildningen defineret i 1.3. Omvendt, givet $(\star)$, så er $f(A) \lhd E$ og $B \cong E/f(A)$.

Hvis der findes en *-homomorfi $\lambda\colon B \to E$, således at $g \circ \lambda = \mathrm{id}_B$, så kaldes $(\star)$ *split-eksakt.* Den kort-eksakte følge

$$0 \longrightarrow C_0\big((0,1)\big) \xrightarrow{\iota} C\big([0,1]\big) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

hvor $\psi(f) = (f(0), f(1))$, er *ikke* split-eksakt (Opgave 1.9).

1.5 Tilføjelse af enhed

(Se Opgave 1.10 og [Murphy, 2.1.6] for detaljer.) Til enhver C^*-algebra A findes en unital C^*-algebra $\tilde{A}$, som indeholder A, og en *-homomorfi $s\colon \tilde{A} \to \mathbb{C}$, således at

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow{s} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

er split-eksakt. Hvis 1 angiver enheden i $\tilde{A}$, så er

$$\tilde{A} = \{a + \lambda 1 \mid \ a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Til enhver *-homomorfi $\varphi\colon A \to B$ findes netop én *-homomorfi $\tilde{\varphi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$, som gør diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \tilde{A} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & \tilde{B} \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativt. $\tilde{\varphi}$ er givet ved $\tilde{\varphi}(a+\lambda 1) = \varphi(a) + \lambda 1,\ a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Hvis A er indeholdt i en unital C^*-algebra B med enhed 1, og hvis $1 \notin A$, så er $\tilde{A}$ lig med (eller isomorf med) del-C^*-algebraen $\{a + \lambda 1 \mid\ a \in A\ , \lambda \in \mathbb{C}\}$ af B. Endelig, hvis A har en enhed e, og 1 som ovenfor er enheden i $\tilde{A}$, så er

$$\tilde{A} = \{a + \lambda(1-e) \mid\ a \in A\ , \lambda \in \mathbb{C}\},$$

og afbildningen $A \oplus \mathbb{C} \to \tilde{A}$ givet ved $(a, \lambda) \mapsto a + \lambda(1-e)$ er en *-isomorfi.

1.6 Sætning (Gelfand)

Enhver abelsk C^*-algebra er isometrisk *-isomorf med C^*-algebraen $C_0(X)$ for et lokalkompakt Hausdorffrum X. Der gælder desuden:

(i) $C_0(X)$ er unital $\iff$ X er kompakt.

(ii) $C_0(X)$ er separabel $\iff$ X er separabel.

(iii) X og Y er homeomorfe $\iff$ $C_0(X)$ og $C_0(Y)$ er *-isomorfe.

(iv) Til enhver *-homomorfi $\varphi\colon C_0(X) \to C_0(Y)$ findes en kontinuert funktion $\hat{\varphi}\colon Y \to X$, så $\varphi(f) = f \circ \hat{\varphi}$.

(v) Der er en bijektiv forbindelse mellem åbne delmængder U af X og idealer i $C_0(X)$ givet ved

$$U \leftrightarrow \{f \in C_0(X) \mid f|U^c = 0\} \cong C_0(U).$$

(Isomorfien er givet ved restriktion. Surjektivitet vises ved at benytte Stone–Weierstrass.) *-homomorfien $C_0(X) \to C_0(U^c)$ givet ved $f \mapsto f|U^c$ er surjektiv (brug Stone–Weierstrass), dvs. vi får en kort-eksakt følge:

$$0 \longrightarrow C_0(U) \longrightarrow C_0(X) \longrightarrow C_0(U^c) \longrightarrow 0,$$

hvor afbildningen $C_0(U) \to C_0(X)$ er givet ved at udvide en funktion $f \in C_0(U)$ til X ved at lade den antage værdien 0 på U^c.

1.7 Kontinuert funktionskalkyle

Antag $a \in A$ er normal (dvs. $a^*a = aa^*$), og at A er unital. Så findes en *-isomorfi $C(\mathrm{sp}(a)) \to C^*(a,1) \subseteq A$, $f \mapsto f(a)$, som stemmer overens med den naturlige definition af $f(a)$, når f er et polynomium. Det er værd at bemærke, at $f(a) \in C^*(a)$, hvis og kun hvis $f(0) = 0$ eller $0 \notin \mathrm{sp}(a)$.

1.8 Matrixalgebraer

Til en C^*-algebra A sættes

$$M_n(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in A \right\},$$

$$M_{n,m}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in A \right\}.$$

$M_n(A)$ er en *-algebra med de naturlige operationer og bliver en C^*-algebra med normen givet på følgende måde. Lad $\varphi\colon A \to B(H)$ være en tro repræsentation, og lad $\varphi_n\colon M_n(A) \to B(H^n)$ være givet ved

$$\varphi_n\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11})\xi_1 + \cdots + \varphi(a_{1n})\xi_n \\ \vdots \\ \varphi(a_{n1})\xi_1 + \cdots + \varphi(a_{nn})\xi_n \end{pmatrix}, \quad \xi_j \in H.$$

Sæt $\|(a_{ij})\| = \|\varphi_n((a_{ij}))\|$. Der gælder bl.a. følgende ulighed vedrørende denne norm, som f.eks. kan vises ved at benytte repræsentationen ovenfor.

$$\max_{i,j}\{\|a_{ij}\|\} \leqslant \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leqslant \sum_{i,j} \|a_{ij}\|.$$

Til enhver *-homomorfi $\varphi\colon A \to B$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ definerer

$$\varphi_n\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

en *-homomorfi $\varphi_n\colon M_n(A) \to M_n(B)$. Ofte udelades indekset, og vi skriver φ i betydningen φ_n.

1.9 Opgave

Vis at den kort-eksakte følge

$$0 \longrightarrow C_0((0,1)) \xrightarrow{\iota} C([0,1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

hvor $\psi(f) = (f(0), f(1))$, *ikke* er split-eksakt.

1.10 Opgave

Denne opgave går ud på at tjekke (nogle af) detaljerne i Afsnit 1.5. Lad A være en C^*-algebra (med eller uden 1-element). Sæt

$$\tilde{A} = \{(a, \lambda) \mid a \in A, \quad \lambda \in \mathbb{C}\},$$

definer addition, skalar-multiplikation og *-operationen punktvis, og sæt

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu).$$

Definer $\iota\colon A \to \tilde{A}$ og $s\colon \tilde{A} \to \mathbb{C}$ ved $\iota(a) = (a, 0)$ og $s(a, \lambda) = \lambda$.

(i) Gør kort rede for, at $\tilde{A}$ er en *-algebra, at $(0, 1)$ (herefter kaldet $1_{\tilde{A}}$ eller blot 1) er et 1-element for $\tilde{A}$, at ι er en injektiv *-homomorfi, at s er en surjektiv *-homomorfi, og at billedet af ι er et 2-sidet ideal i $\tilde{A}$.

Vi undertrykker herefter ι, og opnår således

$$\tilde{A} = \{a + \lambda \cdot 1 \mid a \in A, \quad \lambda \in \mathbb{C}\},$$

og at A er et 2-sidet ideal i $\tilde{A}$. For hvert $x \in \tilde{A}$, sæt

$$|||x|||_{\tilde{A}} = \sup\{\|ax\|_A \mid a \in A, \quad \|a\|_A \leqslant 1\}, \qquad \|x\|_{\tilde{A}} = \max\{|||x|||_{\tilde{A}}, |s(x)|\}.$$

(ii) Vis at $\|a\|_{\tilde{A}} = \|a\|_A$ for alle $a \in A$.

(iii) Vis at $\|x\|_{\tilde{A}} = 0 \Rightarrow x = 0$ for alle $x \in \tilde{A}$.

(iv) Vis at $\tilde{A}$ er en unital C^*-algebra. (Tjek blot, at $\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ opfylder trekantsuligheden, og at identiteterne $\|xy\|_{\tilde{A}} \leqslant \|x\|_{\tilde{A}}\|y\|_{\tilde{A}}$, og $\|x^*x\|_{\tilde{A}} = \|x\|_{\tilde{A}}^2$ gælder. Vis også, at $\tilde{A}$ er fuldstændig.)

(v) Vis at ι er isometrisk, at A er et *lukket* 2-sidet ideal i $\tilde{A}$, og at vi har en split-eksakt følge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow{s} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

(vi) Vis at $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ (som C^*-algebraer) hvis og kun hvis A er unital.

1.11 Opgave

Et element p i en C^*-algebra kaldes en *projektion* hvis $p = p^* = p^2$, og et element u i en unital C^*-algebra kaldes *unitær* hvis $uu^* = u^*u = 1$.

(i) Lad p være en projektion. Vis at $\mathrm{sp}(p) \subseteq \{0, 1\}$.

(ii) Antag, at p er normal og at $\mathrm{sp}(p) \subseteq \{0, 1\}$. Vis at p er en projektion.

(iii) Lad u være unitær. Vis at $\mathrm{sp}(u) \subseteq \mathbb{T}$, hvor $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(iv) Antag, at u er normal og at $\mathrm{sp}(u) \subseteq \mathbb{T}$. Vis at u unitær.

1.12 Opgave

Lad X være et kompakt Hausdorffrum, og lad μ være et Borelmål på X. Lad H være Hilbertrummet $L^2(X, \mu)$. For hvert $f \in C(X)$ og for hvert $\xi \in H$ definer $M_f\xi \colon X \to \mathbb{C}$ ved $(M_f\xi)(x) = f(x)\xi(x)$.

(i) Vis at $\|M_f\xi\|_2 \leqslant \|f\|_\infty \|\xi\|_2$, og (dermed), at $M_f\xi \in H$, at $M_f \in B(H)$, og at $\|M_f\| \leqslant \|f\|_\infty$.

Definer $\pi \colon C(X) \to B(H)$ ved $\pi(f) = M_f$.

(ii) Vis at π er en *-homomorfi.

(iii) Vis at π er isometrisk (og dermed injektiv) hvis målet μ har følgende egenskab: Enhver ikke-tom åben delmængde U af X indeholder en Borel-delmængde E, der opfylder $0 < \mu(E) < \infty$.

(iv) Antag X er separabel. Konstruer et Borelmål μ på X, som opfylder betingelsen i (iii).