10 De højere K-grupper

Definér *suspensionen* af en C^*-algebra A ved

$$\begin{aligned} SA &= \{f \in C(\mathbb{T}, A) \mid f(1) = 0\} \\ &\quad (\cong \{f \in C([0,1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\}). \end{aligned}$$

Hvis $\varphi\colon A \to B$ er en *-homomorfi, så defineres en *-homomorfi $S\varphi\colon SA \to SB$ ved $((S\varphi)(f))(z) = \varphi(f(z))$. S bliver herved en funktor.

10.1 Sætning

(i) S er eksakt, dvs. for enhver kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

gælder der, at den inducerede følge

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0$$

også er kort-eksakt.

(ii) S bevarer homotopiækvivalens. Mere konkret, hvis $\varphi_t\colon A \to B$, $t \in [0,1]$, er en punktvis kontinuert sti af *-homomorfier, så er stien $S\varphi_t\colon SA \to SB$ også punktvis kontinuert.

Bevis: (i) Det eneste ikke-trivielle heri er at vise surjektiviteten af $S\psi$. Dette følger imidlertid af, at mængden

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} b_j\, f_j \,\middle|\, b_j \in B\ ,\ f_j \in C_0\left((0,1), \mathbb{C}\right) \right\}$$

udgør en tæt delmængde af SB (se [Murphy, 6.4.16]) eller kopiér den midterste del af beviset for Lemma 11.4) og alle elementer i denne tætte delmængde ligger i billedet af $S\psi$.

(ii) Lad $f \in SA$. Det skal vises, at afbildningen $t \mapsto (S\varphi_t)(f)$ er kontinuert. Lad hertil $t_0 \in [0,1]$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Da $f([0,1])$ er en kompakt delmængde af A, findes $a_1, \ldots, a_n \in A$, så

$$f([0,1]) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{x \in A \mid \|x - a_j\| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{3}\}.$$

Der findes et $\delta > 0$, sådan at $\|\varphi_t(a_j) - \varphi_{t_0}(a_j)\| \leqslant \varepsilon/3$ for alle t, som opfylder $|t - t_0| < \delta$, og alle $j = 1, \dots, n$. Lad $x \in [0,1]$, og bestem j, så $\|f(x) - a_j\| \leqslant \varepsilon/3$. Da φ_t og φ_{t_0} er normformindskende, ser vi, at $\|\varphi_t(f(x)) - \varphi_{t_0}(f(x))\| \leqslant \varepsilon$, hvis $|t - t_0| < \delta$. Dette giver

$$\|(S\varphi_t)(f) - (S\varphi_{t_0})(f)\| = \sup_{x\in[0,1]} \|\varphi_t(f(x)) - \varphi_s(f(x))\| \leqslant \varepsilon,$$

når $|t - t_0| < \delta$. $\square$

10.2 Sætning

Til enhver C^*-algebra A findes en isomorfi $\theta_A \colon K_1(A) \to K_0(SA)$.

Isomorfien θ_A kan konkret beskrives på følgende måde. Antag $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$ og $s(u) = 1$. (Bemærk, at ethvert element i $K_1(A)$ kan repræsenteres således.) Lad $v \colon [0,1] \to \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ være en kontinuert sti (jvf. Lemma 2.2), sådan at $v(0) = 1$, $v(1) = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{smallmatrix}\right)$ og $s(v(t)) = 1$. Sæt $p = v\left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)v^*$. Så er $p \in P_{2n}(S\tilde{A})$, $s(p) = \left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ og

$$\theta_A([u]_1) = [p]_{00} - [s(p)]_{00}.$$

Det gælder endvidere, at hvis $\varphi \colon A \to B$ er en *-homomorfi, så vil diagrammet

$$\begin{tikzcd} K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\theta_A"'] & K_1(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\ K_0(SA) \arrow[r, "K_0(S\varphi)"'] & K_0(SB) \end{tikzcd}$$

kommutere.

Bevis: Vi har fra Eksempel 4.9 en kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0,$$

hvor CA er homotopi-ækvivalent med 0. Dette giver $K_0(CA) = K_1(CA) = 0$, hvorefter Sætning 9.4 giver, at indeks-afbildningen $\delta_1 \colon K_1(A) \to K_0(SA)$ er en isomorfi. Sæt $\theta_A = \delta_1$.

Bemærk, at for $f \in C([0,1], M_n(\tilde{A}))$ gælder

$$f \in M_n((CA)^\sim) \iff s(f(t)) = f(0) \text{ for alle } t \in [0,1],$$

$$f \in M_n((SA)^\sim) \iff s(f(t)) = f(0) = f(1) \text{ for alle } t \in [0,1].$$

Bemærk også, at $\tilde{\pi}(f) = f(1)$ for $f \in M_n((CA)^\sim)$.

Lad u, v og p være givet som i sætningen. Så er

$$v \in \mathcal{U}_{2n}((CA)^\sim), \quad \tilde{\pi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad p = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \in P_{2n}((SA)^\sim),$$

og dermed $\theta_A([u]_1) = \delta_1([u]_1) = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$ ifølge definitionen af indeks-afbildningen i Sætning 9.3.

Lad endelig $\varphi\colon A \to B$ være en *-homomorfi, lad u, v og p være som ovenfor. Betragt tillige følgen

$$0 \longrightarrow SB \xrightarrow{\iota} CB \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0.$$

Sæt $q(t) = \tilde{\varphi}(p(t))$ og $w(t) = \tilde{\varphi}(v(t))$, således at $q = w\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)w^*$ og $\tilde{\pi}(w) = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{\varphi}(u) & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}(u)^* \end{smallmatrix}\right)$. Ovenstående giver nu

$$\begin{aligned}(\theta_B \circ K_1(\varphi))([u]_1) &= \theta_B([\tilde{\varphi}(u)]_1) = [q]_{00} - [s(q)]_{00} = K_0(S\varphi)([p]_{00} - [s(p)]_{00}) \\ &= (K_0(S\varphi) \circ \theta_A)([u]_1).\end{aligned}$$

□

10.3 Definition

De højere K-grupper for en C^*-algebra A defineres induktivt ved

$$K_n(A) = K_{n-1}(SA), \quad n \geqslant 2.$$

Til enhver *-homomorfi $\varphi\colon A \to B$ sættes

$$K_n(\varphi) = K_{n-1}(S\varphi)\colon K_n(A) \to K_n(B).$$

Resultaterne om K_0 og K_1 sammen med Sætning 10.1 giver, at K_n er en halv-eksakt, homotopi-invariant funktor for ethvert $n \geqslant 0$.

10.4 Sætning (Den lang-eksakte følge i K-teori)

Til enhver kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

af C^*-algebraer findes indeks-afbildninger $\delta_n\colon K_n(B) \to K_{n-1}(I)$, $n \geqslant 1$, som giver en eksakt følge

$$\cdots \xrightarrow{K_{n+1}(\psi)} K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(I) \xrightarrow{K_n(\varphi)} K_n(A) \xrightarrow{K_n(\psi)} K_n(B) \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1}(I) \xrightarrow{K_{n-1}(\varphi)} \cdots$$

$$\cdots \quad \xrightarrow{\delta_1} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B).$$

Bevis: Den givne eksakte følge giver ifølge Sætning 10.1 anledning til en eksakt følge

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0.$$

Vi kan derfor definere indeks-afbildningerne $\delta_n\colon K_n(B) \to K_{n-1}(I)$ og $\delta'_n\colon K_n(SB) \to K_{n-1}(SI)$ induktivt ved

$$\delta_2 = \theta_I^{-1} \circ \delta'_1, \quad \delta_{n+1} = \delta'_n \quad \text{for } n \geqslant 2.$$

(Denne definition involverer implicit de højere suspensioner S^nA.) Vi har således nedenstående kommuterende diagrammer

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_2(I) & \longrightarrow & K_2(A) & \longrightarrow & K_2(B) & \xrightarrow{\delta_2} & K_1(I) & \longrightarrow & K_1(A) & \longrightarrow & K_1(B) \\
\Vert & & \Vert & & \Vert & & \downarrow{\scriptstyle \theta_I} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_B} \\
K_1(SI) & \longrightarrow & K_1(SA) & \longrightarrow & K_1(SB) & \xrightarrow[\delta'_1]{} & K_0(SI) & \longrightarrow & K_0(SA) & \longrightarrow & K_0(SB)
\end{array}$$

og for $n \geqslant 3$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_n(I) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & K_n(B) & \xrightarrow{\delta_n} & K_{n-1}(I) & \longrightarrow & K_{n-1}(A) & \longrightarrow & K_{n-1}(B) \\
\Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert \\
K_{n-1}(SI) & \longrightarrow & K_{n-1}(SA) & \longrightarrow & K_{n-1}(SB) & \xrightarrow[\delta'_{n-1}]{} & K_{n-2}(SI) & \longrightarrow & K_{n-2}(SA) & \longrightarrow & K_{n-2}(SB)
\end{array}$$

Eksakthed af den øverste række i begge diagrammer følger af eksakthed af den nederste række, hvilket etablerer eksakthed af følgen ved induktion.

Diagrammerne viser også, at K_n er halv-eksakt, hvis K_{n-1} er det. $\square$

10.5 Eksempel

Intervallet $[0,1]$ er homeomorft med den udvidede reelle akse $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, og denne homeomorfi giver en isomorfi mellem de to C^*-algebraer

$$\begin{aligned} SA &= \{f \in C([0,1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{og} \\ C_0(\mathbb{R}, A) &= \{f \in C(\overline{\mathbb{R}}, A) \mid f(-\infty) = f(\infty) = 0\}. \end{aligned}$$

Idet $C_0(X, C_0(Y)) \cong C_0(X \times Y)$, følger det, at $S^n\mathbb{C} \cong C_0(\mathbb{R}^n)$ og dermed

$$K_n(\mathbb{C}) \cong K_0(C_0(\mathbb{R}^n)), \quad K_{n+1}(\mathbb{C}) \cong K_1(C_0(\mathbb{R}^n))$$

for alle $n \geqslant 1$.

10.6 Opgave

For enhver C^*-algebra A, sæt $\mathbb{T}A = C(\mathbb{T}, A)$.

(i) Gør rede for, at der findes en split-eksakt følge

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow \mathbb{T}A \rightleftarrows A \longrightarrow 0$$

(ii) Benyt dette til at vise, $K_n(\mathbb{T}A) \cong K_n(A) \oplus K_{n+1}(A)$.

(iii) Vis, at $\mathbb{T}^n\mathbb{C} \cong C(\mathbb{T}^n)$.

10.7 Opgave

Vis at S er kontinuert. Mere konkret, lad

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \longrightarrow \cdots$$

være en følge af C^*-algebraer med induktiv grænse A. Lad

$$SA_1 \xrightarrow{S\varphi_1} SA_2 \xrightarrow{S\varphi_2} SA_3 \longrightarrow \cdots$$

være den af suspensionen S inducerede følge, og lad B være den induktive grænse af denne følge. Lad $\mu_n \colon A_n \to A$ og $\lambda_n \colon SA_n \to B$ være de tilhørende *-homomorfier.

(i) Vis at diagrammet

$$\begin{tikzcd} SA_n \arrow[rr, "S\varphi_n"] \arrow[dr, "S\mu_n"'] & & SA_{n+1} \arrow[dl, "S\mu_{n+1}"] \\ & SA & \end{tikzcd}$$

kommuterer for alle $n \in \mathbb{N}$. Konkluder, at der findes en *-homomorfi σ, som får diagrammet

$$\begin{tikzcd} & SA_n \arrow[dl, "\lambda_n"'] \arrow[dr, "S\mu_n"] & \\ B \arrow[rr, "\sigma"'] & & SA \end{tikzcd}$$

til at kommutere for alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Vis at $\mathrm{Ker}(S\mu_n) \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og konkluder, at σ er injektiv.

(iii) Benyt ideen i beviset for Sætning 10.1 (i) til at vise, at σ er surjektiv.

Det er nu vist, at S er kontinuert!

10.8 Opgave

Benyt Sætning 6.7, Sætning 10.2 og Opgave 10.7 til at vise, at K_1 er kontinuert. Mere konkret, lad

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \longrightarrow \cdots$$

være en følge af C^*-algebraer med induktiv grænse A og tilhørende *-homomorfier $\mu_n \colon A_n \to A$. Lad G være den induktive grænse af følgen

$$K_1(A_1) \xrightarrow{K_1(\varphi_1)} K_1(A_2) \xrightarrow{K_1(\varphi_2)} K_1(A_3) \longrightarrow \cdots,$$

og lad $\beta_n \colon K_1(A_n) \to G$ være de kanoniske gruppehomomorfier.

Så findes en isomorfi $\gamma \colon G \to K_1(A)$, som opfylder $\gamma \circ \beta_n = K_1(\mu_n)$. Specielt er

$$K_1(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(K_1(\mu_n)).$$

10.9 Opgave

Benyt Sætning 4.16 sammen med isomorfien $K_1(A) \cong K_0(SA)$ til at give et bevis for Sætning 8.15.