11 Bott-periodicitet

11.1 Definition af Bott-afbildningen

Vi definerer først Bott-afbildningen for en C^*-algebra A med enhed 1_A (eller blot 1). Til ethvert $p \in P_n(A)$ defineres *projektionsløkken* $f_p\colon \mathbb{T} \to \mathcal{U}_n(A)$ ved

$$f_p(z) = zp + (1_A - p)\ , \quad z \in \mathbb{T}.$$

Idet vi identificerer $M_n((SA)^\sim)$ med

$$\{f \in C(\mathbb{T}, M_n(A)) \mid f(1) \in M_n(\mathbb{C}1_A)\},$$

får vi, at $f_p \in \mathcal{U}_n((SA)^\sim)$. Det ses let, at

(i) $f_{p\oplus q} = f_p \oplus f_q$,

(ii) $f_0 = 1$,

(iii) $p, q \in P_n(A)\colon p \sim_h q \Rightarrow f_p \sim_h f_q$ i $\mathcal{U}_n((SA)^\sim)$.

Sætning 3.4 giver derfor en gruppehomomorfi $\beta_A\colon K_0(A) \to K_1(SA)$, kaldet *Bott-afbildningen*, som opfylder $\beta_A([p]_0) = [f_p]_1$ for alle $p \in P_\infty(A)$.

Hvis $\varphi\colon A \to B$ er en unital *-homomorfi, så er

$$((S\varphi)^\sim(f_p))\,(z) = \varphi(f_p(z)) = f_{\varphi(p)}(z),$$

idet $((S\varphi)^\sim(f))(z) = \varphi(f(z))$ for $f \in M_n((SA)^\sim)$. Dette implicerer, at diagrammet

(iv)
$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_B} \\ K_1(SA) & \xrightarrow[K_1(S\varphi)]{} & K_1(SB) \end{array}$$

kommuterer, og dette faktum udtrykkes ved at kalde Bott-afbildningen *naturlig*.

Antag nu, at A er en generel C^*-algebra (evt. uden enhed). Så har vi følgende kommuterende diagram med split-eksakte rækker:

(v)
$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta_A"'] & K_0(\tilde{A}) \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\beta_{\tilde{A}}"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left] \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\mathbb{C}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(SA) \arrow[r] & K_1(S\tilde{A}) \arrow[r, shift left] & K_1(S\mathbb{C}) \arrow[l, shift left] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Det ses af diagrammet, at der findes netop én gruppehomomorfi $\beta_A \colon K_0(A) \to K_1(SA)$, som får diagrammet til at kommutere. En direkte udregning viser, at

(vi) $$\beta_A([p]_{00} - [s(p)]_{00}) = [f_p f_{s(p)}^*]_1, \quad p \in P_\infty(\tilde{A}),$$

En diagramjagt på (v) viser, at β_A er en isomorfi, hvis $\beta_{\tilde{A}}$ og $\beta_{\mathbb{C}}$ er isomorfier. Det følger endvidere af (vi) (eller af (iv) og en diagramjagt på (v)), at (iv) også holder i det ikke-unitale tilfælde.

11.2 Sætning (Bott-periodicitet)

Bott-afbildningen $\beta_A \colon K_0(A) \to K_1(SA)$ er en isomorfi for enhver C^*-algebra A.

Beviset for Sætning 11.2 føres ved hjælp af et antal lemmaer. Bemærk, jvf. 11.1 (v) ovenfor, at det er tilstrækkeligt at vise sætningen for unitale C^*-algebraer.

I resten af dette afsnit lader vi derfor A være en fast unital C^*-algebra. Definér hertil for ethvert $n \in \mathbb{N}$ følgende mængder.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Inv}_0(n) &= C(\mathbb{T}, \mathrm{GL}_0(M_n(A))), \\
\mathrm{Trig}(n) &= \Big\{ f \in \mathrm{Inv}_0(n) \Big| f(z) = \sum_{j=-m}^{m} a_j z^j \ , \ m \in \mathbb{N} \ , \ a_j \in M_n(A) \Big\}, \\
\mathrm{Pol}(n,m) &= \Big\{ f \in \mathrm{Inv}_0(n) \Big| f(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j \ , \ a_j \in M_n(A) \Big\}, \\
\mathrm{Pol}(n) &= \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathrm{Pol}(n,m), \\
\mathrm{Lin}(n) &= \mathrm{Pol}(n,1), \\
\mathrm{Proj}(n) &= \{ f_p \mid p \in P_n(A) \}.
\end{aligned}
$$

Bemærk, at

$$\begin{aligned} \mathrm{Proj}(n) \subseteq \mathcal{U}_n\big((SA)^\sim\big) \subseteq \mathrm{GL}_n\big((SA)^\sim\big) &\subseteq \mathrm{Inv}_0(n), \\ \mathrm{Proj}(n) \subseteq \mathrm{Lin}(n) \subseteq \mathrm{Pol}(n) \subseteq \mathrm{Trig}(n) &\subseteq \mathrm{Inv}_0(n). \end{aligned}$$

11.3 Lemma

(i) Til ethvert $f \in \mathrm{Inv}_0(n)$ findes $g \in \mathrm{GL}_n((SA)^\sim)$, så $f \sim_h g$ i $\mathrm{Inv}_0(n)$.

(ii) Hvis $f, g \in \mathrm{GL}_n((SA)^\sim)$ og $f \sim_h g$ i $\mathrm{Inv}_0(n)$, så er $f \sim_h g$ i $\mathrm{GL}_n((SA)^\sim)$.

Bevis: (i) Idet $f(1) \sim_h 1$, kan vi finde en kontinuert sti $t \mapsto a_t \in \mathrm{GL}_n(A)$, så $a_0 = 1$ og $a_1 = f(1)$. Sæt

$$g_t(z) = a_t^{-1} f(z), \qquad z \in \mathbb{T},\ t \in [0,1].$$

Så er $t \mapsto g_t \in \mathrm{Inv}_0(n)$ kontinuert. Da $g_1(1) = 1$, ses det, at $g_1 \in \mathrm{GL}_n((SA)^\sim)$, og da $f = g_0$, får vi $g_1 \sim_h f$ i $\mathrm{Inv}_0(n)$.

(ii) Da $f(1)$ og $g(1)$ begge tilhører den kurvesammenhængende gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}1)$, findes der en kontinuert sti $t \mapsto a_t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}1)$, så $a_0 = f(1)$ og $a_1 = g(1)$. Ifølge antagelsen findes en kontinuert sti $t \mapsto f_t \in \mathrm{Inv}_0(n)$, som opfylder $f_0 = f$ og $f_1 = g$. Sæt

$$g_t(z) = a_t f_t(1)^{-1} f_t(z), \qquad z \in \mathbb{T},\ t \in [0,1].$$

Idet $g_t(1) = a_t \in M_n(\mathbb{C}1)$ og $g_t(z)$ er invertibel for alle t og z, har vi $g_t \in \mathrm{GL}_n((SA)^\sim)$ for alle $t \in [0,1]$. Det ses videre, at $t \mapsto g_t$ er kontinuert, $g_0 = f$ og $g_1 = g$, hvilket viser, at $f \sim_h g$ i $\mathrm{GL}_n((SA)^\sim)$, som ønsket. □

11.4 Lemma

$\mathrm{Trig}(n)$ er tæt i $\mathrm{Inv}_0(n)$.

Bevis: Lad $f \in \mathrm{Inv}_0(n)$ og lad $\varepsilon > 0$. Vi kan uden indskrænkning antage, at $\varepsilon < \|f^{-1}\|^{-1}$. Vi finder nedenfor $g \in C(\mathbb{T}, M_n(A))$ på formen $g(z) = \sum_{j=-m}^{m} a_j z^j$, så $\|f - g\| < \varepsilon$. Sætning 2.6 giver herefter, at g er invertibel i $C(\mathbb{T}, M_n(A))$, og at $g(z) \in \mathrm{GL}_0(M_n(A))$ for alle $z \in \mathbb{T}$. Dette viser, at $g \in \mathrm{Inv}_0(n)$, og dermed $g \in \mathrm{Trig}(n)$.

Da $\mathbb{T}$ er kompakt, findes endelig mange åbne mængder $U_1, \ldots, U_k \subseteq \mathbb{T}$ og tilhørende punkter $z_j \in U_j$, så $\{U_j\}_{j=1}^k$ overdækker $\mathbb{T}$ og $\|f(z) - f(z_j)\| \leqslant \varepsilon/2$ for alle $z \in U_j$. Lad $\{h_j\}_{j=1}^k$ være en deling af enheden hørende til overdækningen $\{U_j\}_{j=1}^k$, dvs. $h_j \in C(\mathbb{T})$, $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq U_j$, $0 \leqslant h_j \leqslant 1$, og $\sum_{j=1}^k h_j = 1$. Der gælder så

$$\|f(z)h_j(z) - f(z_j)h_j(z)\| \leqslant \varepsilon/2 \cdot h_j(z),$$

for alle $z \in \mathbb{T}$ og alle j, og dermed

$$\|f(z) - \sum_{j=1}^{k} f(z_j)h_j(z)\| \leqslant \varepsilon/2$$

for alle $z \in \mathbb{T}$.

Stone–Weierstrass' sætning giver, at

$$L = \Big\{g \in C(\mathbb{T}) \mid g(z) = \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j z^j \ , \ m \in \mathbb{N}, \ \alpha_j \in \mathbb{C}\Big\}$$

udgør en tæt delmængde af $C(\mathbb{T})$ mht. supremumnormen $\|\cdot\|_\infty$. Vi kan derfor finde $g_1, \dots, g_k \in L$, så

$$\|h_j - g_j\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2k\|f(z_j)\|}.$$

Sæt

$$g(z) = \sum_{j=1}^{k} f(z_j)g_j(z) \ , \quad z \in \mathbb{T}.$$

Så har g den ønskede form, og $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$. □

Hvis $f \in \mathrm{Inv}_0(n)$, så lader vi i det følgende $z^k f \in \mathrm{Inv}_0(n)$ være funktionen givet ved $(z^k f)(z) = z^k f(z)$, $z \in \mathbb{T}$.

11.5 Lemma

(i) Til ethvert $f \in \mathrm{Inv}_0(n)$ findes $k \in \mathbb{N}$ og $g \in \mathrm{Pol}(n)$, så $z^k f \sim_h g$ i $\mathrm{Inv}_0(n)$.

(ii) Hvis $f, g \in \mathrm{Proj}(n)$ og $f \sim_h g$ i $\mathrm{Inv}_0(n)$, så findes $k, m \in \mathbb{N}$, så $z^k f \sim_h z^k g$ i $\mathrm{Pol}(n, m)$.

Bevis: (i) Ifølge Lemma 11.4 findes $g_0 \in \mathrm{Trig}(n)$, så $\|f - g_0\| < \|f^{-1}\|^{-1}$, og $f \sim_h g_0$ i $\mathrm{Inv}_0(n)$ ifølge Sætning 2.6. Find $k \in \mathbb{N}$, så $(g =)\ z^k g_0 \in \mathrm{Pol}(n)$. Da er $z^k f \sim_h z^k g_0 = g$, som ønsket.

(ii) Antag $t \mapsto f_t \in \mathrm{Inv}_0(n)$ er en kontinuert sti, så $f_0 = f$ og $f_1 = g$. Sæt

$$\delta = \min\big\{\|f_t^{-1}\|^{-1} \mid t \in [0,1]\big\} > 0,$$

og find en inddeling $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$, sådan at

$$\|f_{t_{j+1}} - f_{t_j}\| < \delta/4, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Sæt $g_0 = f_0$, $g_1 = f_1$, og benyt Lemma 11.4 til at finde $g_{t_1}, \ldots, g_{t_{N-1}} \in \mathrm{Trig}(n)$, så

$$\|g_{t_j} - f_{t_j}\| \leqslant \delta/4, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Bemærk, at $\|g_{t_{j+1}} - g_{t_j}\| < 3\delta/4$. Sætning 2.6 giver $\|g_{t_j}^{-1}\|^{-1} \geqslant \|f_{t_j}^{-1}\|^{-1} - \|g_{t_j} - f_{t_j}\| \geqslant 3\delta/4$. Find $k, m \in \mathbb{N}$, så $z^k g_{t_j} \in \mathrm{Pol}(n, m)$ for alle j. Sæt

$$g_t = \frac{(t - t_j)\, g_{t_{j+1}} + (t_{j+1} - t)\, g_{t_j}}{t_{j+1} - t_j}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Sætning 2.6 giver, at g_t er invertibel for alle $t \in [0,1]$. Det ses let, at $t \mapsto g_t$ er kontinuert, og vi får dermed $g_t(z) \in \mathrm{GL}_0(M_n(A))$ for alle t og z, hvilket viser $z^k g_t \in \mathrm{Pol}(n, m)$ for alle $t \in [0,1]$. Vi har dermed $z^k f = z^k f_0 = z^k g_0 \sim_h z^k g_1 = z^k f_1 = z^k g$ i $\mathrm{Pol}(n, m)$ som ønsket. □

11.6 Lemma (Higman's lineariseringstrick)

Der findes for alle $n, m \in \mathbb{N}$ en kontinuert funktion

$$\mu_{n,m} \colon \mathrm{Pol}(n, m) \to \mathrm{Lin}((m+1)n),$$

som opfylder $f \oplus 1_{mn} \sim_h \mu_{n,m}(f)$ i $\mathrm{Pol}((m+1)n)$ for alle $f \in \mathrm{Pol}(n, m)$.

Hvis $f \in \mathrm{Proj}(n) \subseteq \mathrm{Pol}(n, m)$, så er $f \oplus 1_{mn} \sim_h \mu_{n,m}(f)$ i $\mathrm{Lin}((m+1)n)$.

Bevis: Lad

$$f(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j \in \mathrm{Pol}(n, m), \quad a_j \in M_n(A),$$

være givet, og definér hertil

$$\mu_{n,m}(f)(z) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ -z & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & 1 \end{pmatrix}.$$

Kontinuiteten af $\mu_{n,m}$ følger bl.a. af norm-estimatet i afsnit 1.8. Sæt $f_k(z) = \sum_{j=k}^{m} a_j z^{j-k}$ for $k = 0, \ldots, m$ og bemærk, at $f_0 = f$. Sæt endvidere

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -f_1 & -f_2 & \cdots & -f_m \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad G(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ z^2 & z & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^m & z^{m-1} & z^{m-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at F og G er invertible og dermed tilhører $\mathrm{Pol}((m+1)n)$. Bemærk endvidere, at $F \sim_h 1$ og $G \sim_h 1$ i $\mathrm{Pol}((m+1)n)$. En matrix-multiplikation viser

$$\mu_{n,m}(f)G = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

og én mere giver $F\mu_{n,m}(f)G = f \oplus 1_{nm}$. Dette viser dels, at $\mu_{n,m}(f)$ er invertibel (således at $\mu_{n,m}(f) \in \mathrm{Inv}_0((m+1)n)$) og dels, at $f \oplus 1_{mn} \sim_h \mu_{n,m}(f)$ i $\mathrm{Pol}((m+1)n)$.

Antag nu, at $f = f_p$ for et $p \in P_n(A)$. Så er

$$\mu_{n,m}(f_p)(z) = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & \cdots & 0 \\ -z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -z & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Sæt, for $t \in [0,1]$,

$$F_t = \begin{pmatrix} 1 & -tp & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad G_t(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ tz & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ tz^2 & tz & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ tz^m & tz^{m-1} & tz^{m-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Så er $F_0 = G_0 = 1$, $F_1 = F$, $G_1 = G$, F_t og G_t er invertible, og $t \mapsto F_t$, $t \mapsto G_t$ er kontinuerte. En matrixudregning à la den ovenfor giver

$$F_t(z)\mu_{n,m}(f_p)(z)G_t(z) = \begin{pmatrix} (1-p)+(2t-t^2)zp & (1-t)p & 0 & \cdots & 0 \\ -(1-t)z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(1-t)z & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Det ses nu klart, at $F_t\mu_{n,m}(f_p)G_t \in \mathrm{Lin}((m+1)n)$, hvilket viser, at $f_p \oplus 1_{mn} \sim_h \mu_{n,m}(f_p)$ i $\mathrm{Lin}((m+1)n)$. □

Til en vilkårlig C^*-algebra B lader vi $I(B)$ være mængden af *idempotente elementer* i B, dvs. $I(B) = \{e \in B \mid e^2 = e\}$. Sæt $I_n(B) = I(M_n(B))$.

11.7 Lemma

Lad B være en C^*-algebra.

(i) Til ethvert $e \in I(B)$ findes $p \in P(B)$, så $e \sim_h p$ i $I(B)$ (dvs. der findes en kontinuert sti $t \mapsto e_t \in I(B)$, så $e_0 = e$ og $e_1 = p$).

(ii) Hvis $p, q \in P(B)$ og $p \sim_h q$ i $I(B)$, så er $p \sim_h q$ i $P(B)$.

Bevis: Lad 1 være enheden i $\tilde{B}$.

(i) Vi viser, at hvis $e \in I(B)$, så er

$$p = ee^*(1 + (e-e^*)(e^*-e))^{-1}$$

en projektion i B, idet vi med det samme ser, at $1 + (e-e^*)(e^*-e)$ $(= h)$ er positiv og invertibel. Vi har endvidere

$$h = 1 + ee^* + e^*e - e - e^*, \quad eh = ee^*e = he, \quad e^*h = e^*ee^* = he^*.$$

Det følger heraf, at $ee^*h = (ee^*)^2 = hee^*$ og $ee^*h^{-1} = h^{-1}ee^*$. Dette viser, at p er selvadjungeret, og at

$$p^2 = ee^*h^{-1}ee^*h^{-1} = (ee^*)^2h^{-2} = ee^*h^{-1} = p,$$

så p er en projektion. (I øvrigt ses, at hvis e er en projektion, så er $p = e$.)

Bemærk, at $pe = e$ og $ep = p$, hvorfor $(e-p)^2 = 0$. Sæt $z_t = 1 - t(e-p)$. Da er z_t invertibel med invers $z_t^{-1} = 1 + t(e-p)$. Der gælder endvidere, at

$$z_1^{-1}ez_1 = (1 + (e-p))e(1 - (e-p)) = p,$$

og $z_t^{-1}ez_t \in I(B)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Dette viser, at $e \sim_h p$ i $I(B)$.

(ii) Antag $t \mapsto e_t \in I(B)$ er en kontinuert sti, som opfylder $e_0 = p$ og $e_1 = q$. Sæt

$$p_t = e_te_t^*(1 + (e_t - e_t^*)(e_t^* - e_t))^{-1}.$$

Beviset for (i) giver, at $t \mapsto p_t \in P(B)$ er en kontinuert sti, og at $p_0 = p$ og $p_1 = q$. □

Sæt

$$\Omega^+ = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha) > 1/2\}\ , \quad \Omega^- = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha) < 1/2\}\ , \quad \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-,$$

og sæt

$$\mathrm{GI}_n(A) = \{a \in M_n(A) \mid \mathrm{sp}(a) \subseteq \Omega\}.$$

Bemærk, at $P_n(A) \subseteq I_n(A) \subseteq \mathrm{GI}_n(A)$.

11.8 Lemma

(i) Til ethvert $a \in \mathrm{GI}_n(A)$ findes $p \in P_n(A)$, så $a \sim_h p$ i $\mathrm{GI}_n(A)$ (dvs. der findes en kontinuert sti $t \mapsto a_t \in \mathrm{GI}_n(A)$, så $a_0 = a$ og $a_1 = p$).

(ii) Hvis $p, q \in P_n(A)$ og $p \sim_h q$ i $\mathrm{GI}_n(A)$, så er $p \sim_h q$ i $P_n(A)$.

Bevis: Beviset bygger på den holomorfe funktionskalkyle, og vi genkalder nedenfor de dele af denne teori, som vi skal bruge. Se mere herom f.eks. i [Kadison & Ringrose, Afsnit 3.3]. Antag C^+ og C^- er kompakte delmængder af Ω^+ hhv. Ω^-, og at γ^+ og γ^- er lukkede orienterede kurver i Ω^+ hhv. Ω^-, som ikke skærer C^+ hhv. C^-, og som har vindingstal $+1$ omkring hvert punkt i C^+ hhv. C^-. Sæt $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$.

Til ethvert $a \in M_n(A)$ med $\mathrm{sp}(a) \subseteq C^+ \cup C^-$ og enhver holomorf funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sættes

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)(z\cdot 1_A - a)^{-1}dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \varphi(z)(z\cdot 1_A - a)^{-1}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} \varphi(z)(z\cdot 1_A - a)^{-1}dz.\end{aligned}$$

Hvis $\varphi, \psi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ er holomorfe, så følger det af [Kadison & Ringrose, 3.3], at

$$(\varphi\cdot\psi)(a) = \varphi(a)\psi(a), \quad \mathrm{sp}(\varphi(a)) = \varphi(\mathrm{sp}(a)).$$

Hvis $e \in I(A)$, så er

$$(z\cdot 1_A - e)^{-1} = (z-1)^{-1}e + z^{-1}(1_A - e), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}.$$

Det følger heraf, at

$$\varphi(e) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{\varphi(z)}{z-1}e dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-}\frac{\varphi(z)}{z}(1-e)dz = \varphi(1)e + \varphi(0)(1-e).$$

Vi ser specielt, at $\varphi(e) = e$, hvis $\varphi(0) = 0$ og $\varphi(1) = 1$.

Sæt

$$\varphi_s(z) = \begin{cases} sz, & z \in \Omega^- \\ sz + (1-s), & z \in \Omega^+ \end{cases} \qquad s \in [0,1],$$

og bemærk, at $\varphi_s\colon \Omega \to \Omega$ er holomorf for alle s. Vi har også, at $\varphi_1(z) = z$ for alle $z \in \Omega$, mens $\varphi_0(\Omega) = \{0,1\}$ og dermed $\varphi_0^2 = \varphi_0$. Dette medfører, at der for alle $a \in M_n(A)$ med $\mathrm{sp}(a) \subseteq C^+ \cup C^-$ gælder, at $\varphi_s(a) \in \mathrm{GI}_n(A)$ for alle $s \in [0,1]$, $\varphi_1(a) = a$ og $\varphi_0(a) \in I_n(A)$.

(i) Vi kan vælge C^+ og C^- som ovenfor, så $\mathrm{sp}(a) \subseteq C^+ \cup C^-$. Sæt $a_s = \varphi_s(a)$ for $s \in [0,1]$. Det ses af udtrykket for $\varphi_s(a)$, at funktionen $s \mapsto a_s$ er kontinuert, så $a \sim_h \varphi_0(a)$ i $\mathrm{GI}_n(A)$. Der findes ifølge Lemma 11.7 en projektion $p \in P_n(A)$, sådan at $\varphi_0(a) \sim_h p$ i $I_n(A)$, og dette giver, at $a \sim_h p$ i $\mathrm{GI}_n(A)$.

(ii) Lad $t \mapsto a_t \in \mathrm{GI}_n(A)$ være en kontinuert sti, så $a_0 = p$ og $a_1 = q$. Vi viser, at der findes kompakte mængder C^+ og C^- som ovenfor, således at

$$\bigcup_{t\in[0,1]} \mathrm{sp}(a_t) \subseteq C^+ \cup C^- \ (= C).$$

Sæt hertil

$$R = \sup_{t\in[0,1]} \|a_t\| < \infty, \quad r = \inf_{\substack{t\in[0,1]\\ s\in[-R,R]}} \|(a_t - (\tfrac{1}{2} + is)\cdot 1_A)^{-1}\|^{-1} > 0,$$

$$C = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| \leqslant R \quad \text{og} \quad |\mathrm{Re}(\alpha) - 1/2| \geqslant r\}.$$

Så er C en kompakt mængde, som er indeholdt i Ω. Antag $\alpha \in \mathbb{C}\backslash C$ og $t \in [0,1]$. Hvis $|\alpha| > R$, så er $|\alpha| > \|a_t\|$ og dermed $\alpha \notin \mathrm{sp}(a_t)$. Hvis $|\alpha| \leqslant R$, så er $\alpha = \frac{1}{2} + \delta + is$ for passende $\delta, s \in \mathbb{R}$, som opfylder $|\delta| < r$ og $|s| \leqslant R$. Det følger, at

$$\|(a_t - \alpha 1) - (a_t - (\tfrac{1}{2} + is)\cdot 1_A)\| = |\delta| < r \leqslant \|(a_t - (\tfrac{1}{2} + is)\cdot 1_A)^{-1}\|^{-1}.$$

Sætning 2.6 giver derfor, at $a_t - \alpha 1$ er invertibel, så $\alpha \notin \mathrm{sp}(a_t)$. Vi har dermed vist, at $\mathrm{sp}(a_t) \subseteq C$ for alle $t \in [0,1]$.

Sæt $e_t = \varphi_0(a_t) \in I_n(A)$. Benyt Cauchys integralformel til at vise, at $t \mapsto e_t$ er kontinuert. Da $\varphi_0(z) = z$ for $z \in \{0,1\}$, følger det, at $\varphi_0(p) = p$ og $\varphi_0(q) = q$, så $e_0 = p$ og $e_1 = q$. Vi har derfor $p \sim_h q$ i $I_n(A)$, og Lemma 11.7 giver herefter, at $p \sim_h q$ i $P_n(A)$, som ønsket. □

Definér for hvert $a \in M_n(A)$ funktionen $f_a\colon \mathbb{T} \to M_n(A)$ ved $f_a(z) = az + (1-a)$. Det er klart, at $f_a \in \mathrm{Lin}(n)$, hvis og kun hvis $f_a \in \mathrm{Inv}_0(n)$. Omvendt, hvis $f \in \mathrm{Lin}(n)$ opfylder $f(1) = 1$, så er $f = f_a$, hvor $a = (1 - f(-1))/2$.

11.9 Lemma

$f_a \in \mathrm{Lin}(n)$, hvis og kun hvis $a \in \mathrm{GI}_n(A)$.

Bevis: Idet $f_a(1) = 1$, ses det, at $f_a \in \mathrm{Lin}(n)$, hvis og kun hvis $f_a(z)$ er invertibel for alle $z \in \mathbb{T}\backslash\{1\}$. For $z \neq 1$ gælder

$$f_a(z) = az + (1-a) = a(z-1) + 1 = (z-1)\Big(a - \frac{1}{1-z}\Big).$$

Vi har desuden

$$\{(1-z)^{-1} \mid z \in \mathbb{T}\backslash\{1\}\} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha) = 1/2\},$$

hvilket viser, at $f_a \in \mathrm{Lin}(n)$, hvis og kun hvis $a \in \mathrm{GI}_n(A)$. □

11.10 Lemma

(i) Til ethvert $u \in \mathcal{U}_n((SA)^\sim)$ findes naturlige tal m, k, hvor $m \geqslant n$, og en projektion $p \in P_m(A)$, sådan at $(z^k u) \oplus 1_{m-n} \sim_h f_p$ i $\mathcal{U}_m((SA)^\sim)$.

(ii) Hvis $p, q \in P_n(A)$ og $f_p \sim_h f_q$ i $\mathcal{U}_n((SA)^\sim)$, så findes et naturligt tal $m \geqslant n$ og en projektion $r \in P_{m-n}(A)$, som opfylder $p \oplus r \sim_h q \oplus r$ i $P_m(A)$.

Bevis: (i) Benyt Lemma 11.5 (i) til at finde naturlige tal k og m_1 og et polynomium $f \in \mathrm{Pol}(n, m_1)$, sådan at $z^k u \sim_h f$ i $\mathrm{Inv}_0(n)$. Sæt $m = (m_1 + 1)n$. Så giver Lemma 11.6, at der findes $g \in \mathrm{Lin}(m)$, så $f \oplus 1_{m-n} \sim_h g$ i $\mathrm{Pol}(m)$ (og dermed også i $\mathrm{Inv}_0(m)$). Da $g(1) \in \mathrm{GL}_0(M_m(A))$, ses det, at $g \sim_h g(1)^{-1}g$ i $\mathrm{Inv}_0(m)$, og $g(1)^{-1}g = f_a$ for et $a \in \mathrm{GI}_m(A)$ ifølge Lemma 11.9. Benyt Lemma 11.8 til at finde $p \in P_m(A)$, så $a \sim_h p$ i $\mathrm{GI}_m(A)$, og benyt Lemma 11.9 til at konkludere, at $f_a \sim_h f_p$ i $\mathrm{Lin}(m)$. Det følger, at $(z^k u) \oplus 1_{m-n} \sim_h f_p$ i $\mathrm{Inv}_0(m)$. Lemma 11.3 og Sætning 2.5 giver endelig, at denne homotopi kan realiseres inden for $\mathcal{U}_m((SA)^\sim)$.

(ii) Antag f_p og f_q er homotope i $\mathcal{U}_n((SA)^\sim)$ og dermed også i $\mathrm{Inv}_0(n)$. Benyt Lemma 11.5 (ii) til at finde naturlige tal $k < m_1$, sådan at $z^k f_p \sim_h z^k f_q$ i $\mathrm{Pol}(n, m_1)$. Sæt $m_2 = (k+1)n$. Da

$$f_{p\oplus 1_{kn}} = f_p \oplus z1_{kn}\ , \quad f_{q\oplus 1_{kn}} = f_q \oplus z1_{kn},$$

og da $z^k 1_n \oplus 1_{kn} \ \sim_h \ 1_n \oplus z1_{kn}$ i $\mathrm{Pol}(m_2, k)$, konkluderer vi

$$\begin{aligned} f_{p\oplus 1_{kn}} = (1_n \oplus z1_{kn})(f_p \oplus 1_{kn}) &\sim_h (z^k 1_n \oplus 1_{kn})(f_p \oplus 1_{kn}) \\ &\sim_h (z^k 1_n \oplus 1_{kn})(f_q \oplus 1_{kn}) \sim_h f_{q\oplus 1_{kn}} \end{aligned}$$

i $\mathrm{Pol}(m_2, m_1)$. Sæt $m = (m_1 + 1)m_2$, og sæt

$$r = \begin{pmatrix} 1_{kn} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{kn+m_1m_2}(A).$$

Så er $f_{p\oplus r} = f_{p\oplus 1_{kn}} \oplus 1_{m_1m_2}$ og $f_{q\oplus r} = f_{q\oplus 1_{kn}} \oplus 1_{m_1m_2}$. Lemma 11.6 giver derfor

$$f_{p\oplus r} \sim_h \mu_{m_2,m_1}(f_{p\oplus 1_{kn}}) \sim_h \mu_{m_2,m_1}(f_{q\oplus 1_{kn}}) \sim_h f_{q\oplus r}$$

i $\mathrm{Lin}(m)$.

Lad $t \mapsto g_t \in \mathrm{Lin}(m)$ være en kontinuert sti, som forbinder $g_0 = f_{p\oplus r}$ med $g_1 = f_{q\oplus r}$. Sæt

$$a_t = \frac{1}{2}\big(1 - g_t(1)^{-1}g_t(-1)\big).$$

Så er $f_{a_t} = g_t(1)^{-1}g_t \in \mathrm{Lin}(m)$, hvilket ifølge Lemma 11.9 medfører, at $a_t \in \mathrm{GI}_m(A)$. Vi har dermed, at

$$p \oplus r = a_0 \sim_h a_1 = q \oplus r \quad \text{i } \mathrm{GI}_m(A),$$

hvilket sammen med Lemma 11.8 (ii) giver, $p \oplus r \sim_h q \oplus r$ i $P_m(A)$.

□

Bevis for Sætning 11.2: Det skal vises, at Bott-afbildningen β_A er (i) surjektiv og (ii) injektiv.

(i) Lad $g \in K_1(SA)$ og find $n \in \mathbb{N}$ og $u \in \mathcal{U}_n((SA)^\sim)$, så $g = [u]_1$. Benyt Lemma 11.10 (i) til at finde naturlige tal $m \geqslant n$ og k og en projektion $p \in P_m(A)$, således at $(z^k u) \oplus 1_{m-n} \sim_h f_p$. Idet $f_{1_{nk}} = z1_{nk}$, får vi

$$\beta_A([p]_0 - [1_{nk}]_0) = [f_p]_1 - [f_{1_{nk}}]_1 = [z^k u]_1 - [z1_{nk}]_1 = [u]_1 + [z^k 1_n]_1 - [z1_{nk}]_1 = g$$

(ii) Antag nu, at $g \in K_0(A)$ og $\beta_A(g) = 0$. Find $n \in \mathbb{N}$ og $p, q \in P_n(A)$, så $g = [p]_0 - [q]_0$. Så er $[f_p]_1 = [f_q]_1$, hvilket implicerer, at $f_p \oplus 1_{m-n} \sim_h f_q \oplus 1_{m-n}$ i $\mathcal{U}_m((SA)^\sim)$ for et $m \geqslant n$. Sæt

$$p_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_m(A), \quad q_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_m(A).$$

Så er $f_{p_1} = f_p \oplus 1_{m-n}$ og $f_{q_1} = f_q \oplus 1_{m-n}$, og dermed $f_{p_1} \sim_h f_{q_1}$ i $\mathcal{U}_m((SA)^\sim)$. Nu giver Lemma 11.10 (ii), at $p_1 \oplus r \sim_h q_1 \oplus r$ i $P_k(A)$ for et passende $k \geqslant m$ og $r \in P_{k-m}(A)$. Dette giver endelig, at

$$g = [p]_0 - [q]_0 = [p_1 \oplus r]_0 - [q_1 \oplus r]_0 = 0,$$

så β_A er injektiv. □

11.11 Korollar

For alle C^*-algebraer A og for alle $n \geqslant 0$ gælder

$$K_{n+2}(A) \cong K_n(A).$$

Bevis: Dette er præcis udsagnet af Sætning 11.2 for $n = 0$. Det generelle udsagn følger ved induktion efter n, idet der for $n \geqslant 1$ gælder

$$K_{n+2}(A) = K_{n+1}(SA) \cong K_{n-1}(SA) = K_n(A).$$

$\square$

11.12 Eksempel

Det følger af Korollar 11.11 og Eksempel 10.5, at for n *lige* er

$$\begin{aligned} K_0\left(C_0(\mathbb{R}^n)\right) &\cong K_n(\mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \\ K_1\left(C_0(\mathbb{R}^n)\right) &\cong K_{n+1}(\mathbb{C}) \cong K_1(\mathbb{C}) = 0, \end{aligned}$$

og for n *ulige* er

$$\begin{aligned} K_0\left(C_0(\mathbb{R}^n)\right) &\cong K_n(\mathbb{C}) \cong K_1(\mathbb{C}) = 0, \\ K_1\left(C_0(\mathbb{R}^n)\right) &\cong K_{n+1}(\mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

11.13 Eksempel

Da $C_0(\mathbb{R}^n)^\sim \cong C(S^n)$, giver Eksempel 11.12 og Eksempel 4.17 at

$$K_0(C(S^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n \text{ lige} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ulige} \end{cases}$$

$$K_1(C(S^n)) \cong K_1(C_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} 0 & n \text{ lige} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ulige} \end{cases}$$

11.14 Eksempel

Opgave 10.6 og Korollar 11.11 giver, at

$$K_0(\mathbb{T}A) \cong K_1(\mathbb{T}A) \cong K_0(A) \oplus K_1(A)$$

for alle C^*-algebraer A. Da $\mathbb{T}^n\mathbb{C} \cong C(\mathbb{T}^n)$ (ifølge Opgave 10.6 (iii)), har vi specielt, at

$$K_0(C(\mathbb{T}^n)) \cong K_1(C(\mathbb{T}^n)) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}.$$

Det ses heraf, at $K_1(C(\mathbb{T}^3)) \cong \mathbb{Z}^4$. Ifølge Opgave 8.28 er $\mathcal{U}(C(\mathbb{T}^3))/\mathcal{U}_0(C(\mathbb{T}^3)) \cong \mathbb{Z}^3$. Dette viser, at afbildningen

$$\Delta\colon K_1(C(\mathbb{T}^3)) \to \mathcal{U}(C(\mathbb{T}^3))/\mathcal{U}_0(C(\mathbb{T}^3))$$

fra afsnit 8.18 *ikke* er injektiv, og at afbildningen

$$\mathcal{U}(C(\mathbb{T}^3)) \to K_1(C(\mathbb{T}^3))$$

ikke er surjektiv.

Dette eksempel kan også benyttes til at afslutte Bemærkning 2.15, hvori det vises, at unitært ækvivalente projektioner ikke nødvendigvis er homotope. Ovenstående giver, at der findes $g \in K_1(C(\mathbb{T}^3))$, som ikke er repræsenteret af noget unitært element i $C(\mathbb{T}^3)$. Lad k være det mindste naturlige tal, sådan at der findes $u \in \mathcal{U}_{2k}(C(\mathbb{T}^3))$ med $g = [u]_1$, og sæt $A = M_k(C(\mathbb{T}^3))$. Vi har da, at der ikke findes noget $v \in \mathcal{U}(A)$, for hvilket u er homotop med $\left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Bemærk endelig, at $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$, så afbildningen

$$\Delta\colon K_1(C(\mathbb{T})) \to \mathcal{U}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{U}_0(C(\mathbb{T}))$$

er en isomorfi.

11.15 Opgave

Giv en eksplicit beskrivelse af isomorfierne $\alpha\colon K_0(A) \to K_0(S^2A)$ og $\beta\colon K_1(A) \to K_1(S^2A)$ i tilfældet, hvor A er unital. Vis specielt, at hvis $p \in P(A)$, så er $\alpha([p]_0) = [\tilde{p}]_{00} - [s(\tilde{p})]_{00}$ for et passende $\tilde{p} \in P_2((S^2A)^\sim)$, og hvis $u \in \mathcal{U}(A)$, så er $\beta([u]_1) = [\tilde{u}]_1$ for et passende $\tilde{u} \in \mathcal{U}_2((S^2A)^\sim)$.

11.16 Opgave

Vis at afbildningen

$$\dim K_0(C(S^n)) \to \mathbb{Z}$$

er en isomorfi, når n er ulige, mens dim ikke er injektiv, når n er lige.

Find $p \in P_2(C(S^2))$, så $K_0(C(S^2)) = \mathbb{Z}[1]_0 + \mathbb{Z}[p]_0$. Angiv et element i kernen for $\dim\colon K_0(C(S^2)) \to \mathbb{Z}$.

11.17 Opgave

Find en reference i en bog om algebraisk topologi, eller vis selv, at $U(C(S^n)) = U_0(C(S^n))$, hvis $n \geqslant 2$.

Vis at afbildningen

$$\Delta\colon K_1(C(S^n)) \to U(C(S^n))/U_0(C(S^n))$$

er en isomorfi, hvis $n = 1$ eller hvis n er lige, og at Δ ikke er injektiv, hvis n er ulige og $n \geqslant 3$.

Find $u \in \mathcal{U}_2(C(S^3))$, således at $K_1(C(S^3)) = \mathbb{Z}[u]_1$ og $\Delta(u) = 1$.

11.18 Opgave

Lad A være en unital C^*-algebra, som indeholder et element a, hvis spektrum ikke er sammenhængende. Vis at A indeholder en ikke-triviel projektion, dvs. en projektion forskellig fra 0 og 1_A.

Lad A være en vilkårlig C^*-algebra (med eller uden enhed), og antag, at A indeholder et element a, hvis spektrum ikke er sammenhængende. Vis at A indeholder en projektion forskellig fra 0.