12 Den eksakte heksagon

12.1 Definition af eksponential-afbildningen

Enhver kort-eksakt følge af C^*-algebraer

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

inducerer en kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0.$$

Der hører hertil en indeks-afbildning $\delta_1'\colon K_1(SB) \to K_0(SI)$. Lad $\beta_B\colon K_0(B) \to K_1(SB)$ og $\theta_I\colon K_1(I) \to K_0(SI)$ være isomorfierne fra de to foregående kapitler, og definér *eksponential-afbildningen* δ_0 ved

$$\delta_0 = \theta_I^{-1} \circ \delta_1' \circ \beta_B\colon K_0(B) \to K_1(I).$$

Vi opnår dermed nedenstående kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\beta_B"'] & K_1(I) \arrow[d, "\theta_I"] \\
K_1(SB) \arrow[r, "\delta_1'"'] & K_0(SI)
\end{tikzcd}$$

12.2 Sætning (Den eksakte heksagon)

For enhver eksakt følge $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ af C^*-algebraer er nedenstående seks-ledede følge eksakt

$$\begin{tikzcd}
K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\psi)"] & K_1(I) \arrow[l, "K_1(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

Bevis: Ifølge Sætning 9.4 er det tilstrækkeligt at vise eksakthed ved $K_0(B)$ og ved $K_1(I)$. Ved at benytte at Bott-afbildningen er naturlig, det kommuterende diagram i Sætning 10.2 og definitionen af eksponential-afbildningen δ_0 får vi, at nedenstående diagram kommuterer.

$$\begin{array}{ccccccc}
K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(S\psi)} & K_1(SB) & \xrightarrow{\delta_1'} & K_0(SI) & \xrightarrow{K_0(S\varphi)} & K_0(SA) \\
\beta_A \uparrow \cong & & \beta_B \uparrow \cong & & \theta_I \uparrow \cong & & \theta_A \uparrow \cong \\
K_0(A) & \xrightarrow[K_0(\psi)]{} & K_0(B) & \xrightarrow[\delta_0]{} & K_1(I) & \xrightarrow[K_1(\varphi)]{} & K_1(A)
\end{array}$$

Da den øverste række er eksakt (jvf. Sætning 9.4), følger det, at nederste række ligeledes er eksakt. □

Følgende sætning giver et eksplicit udtryk for eksponential-afbildningen.

12.3 Sætning

Lad $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ være en kort-eksakt følge af C^*-algebraer.

(i) Lad $p \in P_n(\tilde{B})$ og $a \in M_n(\tilde{A})$, og antag, at $\tilde{\psi}(a) = p$, a er selv-adjungeret og $\mathrm{sp}(a) \subseteq [0,1]$. Så findes netop én unitær $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{I})$, så

$$\tilde{\varphi}(u) = \exp(2\pi i a), \quad \delta_0([p]_{00} - [s(p)]_{00}) = -[u]_1.$$

(ii) Antag, at A (og dermed B og ψ) er unitale. Lad $\bar{\varphi}\colon \tilde{I} \to A$ være som i Sætning 9.7. Lad $p \in P_n(B)$ og $a \in M_n(A)$, og antag, at $\psi(a) = p$, a er selv-adjungeret og $\mathrm{sp}(a) \subseteq [0,1]$. Så findes netop én unitær $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{I})$, så

$$\bar{\varphi}(u) = \exp(2\pi i a), \quad \delta_0([p]_0) = -[u]_1.$$

Bevis: Vi viser først (ii). Da

$$\psi(\exp(2\pi i a)) = \exp(2\pi i \psi(a)) = \exp(2\pi i p) = 1,$$

findes $u \in M_n(\tilde{I})$, så $\bar{\varphi}(u) = \exp(2\pi i a)$. Idet $\bar{\varphi}$ er injektiv, og $\bar{\varphi}(u)$ er unitær, konkluderer vi, at u er unitær.

Det er mest praktisk i det følgende at benytte definitionen

$$SD = \{f \in C([0,1], D) \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

for enhver C^*-algebra D. Hvis $p \in P_n(B)$, så er den tilhørende projektionsløkke $f_p \in \mathcal{U}_n((SB)^\sim)$ (fra 11.1) givet ved

$$f_p(t) = e^{2\pi i t} p + (1 - p) = e^{2\pi i t p}.$$

Der findes $v \in \mathcal{U}_{2n}((SA)^\sim)$, så $(S\psi)^\sim(v) = \left(\begin{smallmatrix} f_p & 0 \\ 0 & f_p^* \end{smallmatrix}\right)$. Vi har således, at $v\colon [0,1] \to \mathcal{U}_{2n}(A)$ er kontinuert, $v(0) = v(1) \in M_{2n}(\mathbb{C})$, og

$$\psi(v(t)) = \begin{pmatrix} f_p(t) & 0 \\ 0 & f_p(t)^* \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Da $f_p(0) = f_p(1) = 1$, ser vi, at $v(0) = v(1) = 1$.

Sæt $g_t(s) = \exp(2\pi i s t)$ for $s, t \in [0,1]$, og sæt $z(t) = g_t(a)$. Så er $t \mapsto z(t) \in \mathcal{U}_n(A)$ kontinuert, $z(0) = 1$ og $z(1) = \exp(2\pi i a)$. Bemærk, at $\psi(z(t)) = g_t(\psi(a)) = g_t(p) = f_p(t)$. Det følger heraf, at

$$\psi\big(v(t)\begin{pmatrix} z(t)^* & 0 \\ 0 & z(t) \end{pmatrix}\big) = 1,$$

og der findes derfor $w(t) \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{I})$, så $\bar{\varphi}(w(t)) = v(t)\left(\begin{smallmatrix} z(t)^* & 0 \\ 0 & z(t) \end{smallmatrix}\right)$. Bemærk at $w(0) = 1$, og at

$$\bar{\varphi}(w(1)) = \begin{pmatrix} z(1)^* & 0 \\ 0 & z(1) \end{pmatrix} = \bar{\varphi}\left(\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\right).$$

Det ses heraf, at $w(1) = \left(\begin{smallmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$.

Sætning 10.2 giver

$$\theta_I\left([u^*]_1\right) = [w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*]_{00} - [\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]_{00} \in K_0(SI).$$

Vi har endvidere, at

$$\bar{\varphi}\big(w(t)\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w(t)^*\big) = v(t)\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v(t)^*.$$

Af definitionen af indeks-afbildningen $\delta_1'\colon K_1(SB) \to K_0(SI)$ ses det, at $\delta_1'([f_p]_1) = \theta_I([u^*]_1)$. Dette giver endelig

$$\delta_0([p]_0) = \big(\theta_I^{-1} \circ \delta_1' \circ \beta_B\big)\left([p]_0\right) = \theta_I^{-1}\left(\delta_1'([f_p]_1)\right) = [u^*]_1 = -[u]_1.$$

Vi viser nu (i), og benytter hertil nedenstående kommuterende diagrammer med eksakte rækker.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & B \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"'] & \tilde{A} \arrow[r, "\tilde{\psi}"'] & \tilde{B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & SI \arrow[r] \arrow[d, equal] & SA \arrow[r] \arrow[d, hook] & SB \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & SI \arrow[r] & S\tilde{A} \arrow[r] & S\tilde{B} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Bemærk, at afbildningen $\tilde{\varphi}\colon \tilde{I} \to \tilde{A}$ er lig med afbildningen $\bar{\varphi}\colon \tilde{I} \to \tilde{A}$ hørende til den kort-eksakte følge $0 \to I \to \tilde{A} \to \tilde{B} \to 0$. Lad

$$
\begin{aligned}
&\delta_0\colon K_0(B) \to K_1(I), && \tilde{\delta}_0\colon K_0(\tilde{B}) \to K_1(I), \\
&\delta_1'\colon K_1(SB) \to K_0(SI), && \tilde{\delta}_1'\colon K_1(S\tilde{B}) \to K_0(SI),
\end{aligned}
$$

være de tilhørende eksponential- og indeks-afbildninger.

Da diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
K_0(B) \arrow[r, "\beta_B"] \arrow[d, "K_0(\iota_B)"'] & K_1(SB) \arrow[r, "\delta_1'"] \arrow[d] & K_0(SI) \arrow[r, "\theta_I^{-1}"] \arrow[d, equal] & K_1(I) \arrow[d, equal] \\
K_0(\tilde{B}) \arrow[r, "\beta_{\tilde{B}}"'] & K_1(S\tilde{B}) \arrow[r, "\tilde{\delta}_1'"'] & K_0(SI) \arrow[r, "\theta_I^{-1}"'] & K_1(I)
\end{tikzcd}
$$

kommuterer, og $\delta_0 = \theta_I^{-1} \circ \delta_1' \circ \beta_B$, $\tilde{\delta}_0 = \theta_I^{-1} \circ \tilde{\delta}_1' \circ \beta_{\tilde{B}}$, har vi $\tilde{\delta}_0 \circ K_0(\iota_B) = \delta_0$.

Eksistensen af $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{I})$ hørende til projektionen $p \in P_n(\tilde{B})$ (og til a) følger af (ii), og (ii) giver videre, at $\tilde{\delta}_0([p]_0) = -[u]_1$. Da $[s(p)]_0 \in \mathrm{Im}(K_0(\tilde{\psi}))$, ses det, at $\tilde{\delta}_0([s(p)]_0) = 0$. Alt i alt har vi

$$
\delta_0\left([p]_{00} - [s(p)]_{00}\right) = \left(\tilde{\delta}_0 \circ K_0(\iota_B)\right)\left([p]_{00} - [s(p)]_{00}\right) = \tilde{\delta}_0\left([p]_0 - [s(p)]_0\right) = -[u]_1.
$$

□

12.4 Opgave

Benyt Sætning 12.2 og halv-eksakthed af K_1 (Sætning 8.12) til at vise, at K_1 er split-eksakt (jvf. Sætning 8.13).

12.5 Opgave

For hvert helt tal $n \geqslant 1$, lad Z_n være n-blomsten, som fremkommer ved at tage n disjunkte cirkler, som identificeres i et fælles punkt. Specielt er $Z_1 = \mathbb{T}$ og Z_2 er "figure eight".

Beregn $K_0(C(Z_n))$ og $K_1(C(Z_n))$ ved at betragte en kort-eksakt følge $0 \to C_0(U) \to C(Z_n) \to C(Y) \to 0$ for passende U og Y.

12.6 Opgave

Betragt ækvivalensrelationen $\sim_n$ på den lukkede enhedsskive $\mathbb{D}$ givet ved $z_1 \sim_n z_2$ hvis $z_1 = z_2$, eller hvis $|z_1| = |z_2| = 1$ og $z_1^n = z_2^n$. Lad X_n være det n'te Moore-rum, givet ved $X_n = \mathbb{D}/\sim_n$.

(i) Sæt $\omega = \exp(2\pi i/n)$. Gør rede for, at

$$C(X_n) = \{f \in C(\mathbb{D}) \mid f(\omega z) = f(z), z \in \mathbb{T}\}.$$

(ii) Find en kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\iota} C(X_n) \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0\,,$$

for et passende valg af afbildningen π, og hvor $\mathbb{D} \setminus \mathbb{T}$ identificeres med $\mathbb{R}^2$.

(iii) Vis at index-afbildningen $\delta_1 \colon K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ hørende til den eksakte følge i (ii) sender en generator for gruppen $K_1(C(\mathbb{T}))$ ind i n gange en generator for gruppen $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$.

(iv) Vis, at $K_0(C(X_n)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, og at $K_1(C(X_n)) = 0$.

12.7 Opgave

Beskriv den eksakte heksagon (idet alle 6 grupper og alle 6 afbildninger identificeres) for hver af de eksakte føger

(1) $$0 \longrightarrow C_0((0,1)) \xrightarrow{\iota} C([0,1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

hvor $\psi(f) = (f(0), f(1))$; tilføjelse af enhed:

(2) $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0;$$

(3) $$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\iota} C(\mathbb{D}) \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

hvor π er restriktionsafbildningen;

(4) $$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} B(H)/\mathcal{K} \longrightarrow 0;$$

(5) $$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0,$$

hvor $\psi(f) = f(1)$.