13 Induktive grænser af dimensionsdrop-algebraer

Formålet med dette kapitel er at vise, at der til ethvert par G_0 og G_1 af tællelige abelske grupper findes en (separabel) C^*-algebra A, således at $K_0(A) \cong G_0$ og $K_1(A) \cong G_1$.

13.1 Dimensionsdrop-algebraerne

For ethvert naturligt tal $n \geqslant 2$ er *dimensionsdrop-algebraen* D_n defineret til at være

$$D_n = \{f \in C([0,1], M_n(\mathbb{C})) \mid f(0) = 0 \ , \ f(1) \in \mathbb{C}1_n\}.$$

Idet

$$SM_n(\mathbb{C}) = \{f \in C([0,1], M_n(\mathbb{C})) \mid f(0) = f(1) = 0\} \subseteq D_n,$$

får vi den kort-eksakte følge af C^*-algebraer

$$0 \longrightarrow SM_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\iota} D_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

hvor $\pi(f) = f(1)$. Dette giver anledning til den eksakte heksagon

$$\begin{tikzcd} K_0(SM_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & K_0(D_n) \arrow[r] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, "\delta_0"] \\ K_1(\mathbb{C}) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(D_n) \arrow[l] & K_1(SM_n(\mathbb{C})) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Idet $K_0(SM_n(\mathbb{C})) = 0$ og $K_1(\mathbb{C}) = 0$, reducerer heksagonen til nedenstående eksakte følge:

$$0 \longrightarrow K_0(D_n) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(\mathbb{C}) \xrightarrow{\delta_0} K_1(SM_n(\mathbb{C})) \xrightarrow{K_1(\iota)} K_1(D_n) \longrightarrow 0.$$

Vi ønsker at bestemme udseendet af eksponential-afbildningen δ_0. Vi benytter hertil, og i resten af kapitlet, følgende identifikationer:

$$\tilde{D}_n = \{f \in C([0,1], M_n(\mathbb{C})) \mid f(0) \in \mathbb{C}1_n \text{ og } f(1) \in \mathbb{C}1_n\},$$

$$SM_n(\mathbb{C})^\sim = \{f \in C([0,1], M_n(\mathbb{C})) \mid f(0) = f(1) \in \mathbb{C}1_n\} \subseteq \tilde{D}_n.$$

Lad p være en fast valgt én-dimensional projektion i $M_n(\mathbb{C})$. Da er $K_0(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[p]_0$, og $[p]_0$ har uendelig orden, jvf. 7.1. Definér $u_n, v_n \in \mathcal{U}((SM_n(\mathbb{C}))^{\sim}) \subseteq \mathcal{U}(\tilde{D}_n)$ ved

$$u_n(t) = e^{2\pi it}1_n, \quad v_n(t) = e^{2\pi itp} = e^{2\pi it}p + (1_n - p), \quad t \in [0, 2\pi],$$

og bemærk, at $n[v_n]_1 = [u_n]_1$ i $K_1(SM_n(\mathbb{C}))$ og i $K_1(D_n)$. Ifølge definitionen af Bott-isomorfien $\beta\colon K_0(M_n(\mathbb{C})) \to K_1(SM_n(\mathbb{C}))$ fra Kapitel 11 har vi $\beta([p]_0) = [v_n]_1$, og vi konkluderer heraf, at $K_1(SM_n(\mathbb{C}))$ er isomorf med $\mathbb{Z}$, og at $[v_n]_1$ er en generator for denne gruppe. Det ses videre, at $K_1(D_n)$ er en cyklisk gruppe med generator $[v_n]_1$ (nu opfattet som element i $K_1(D_n)$).

Lad $h \in D_n$ være givet ved $h(t) = t \cdot 1_n$ for $t \in [0, 1]$. Bemærk, at $\pi(h) = 1_{\mathbb{C}}$, at h er selv-adjungeret, og at $\mathrm{sp}(h) = [0, 1]$. Idet $u_n = \exp(2\pi ih)$, giver Sætning 12.3 (ii)

$$\delta_0\left([1_{\mathbb{C}}]_0\right) = -[u_n]_1 = -n \cdot [v_n]_1.$$

Dette viser dels, at δ_0 er injektiv og dermed $K_0(D_n) = 0$, dels at

$$\mathrm{Ker}(K_1(\iota)) = \mathrm{Im}(\delta_0) = \mathbb{Z}(n[v_n]_1).$$

Heraf ses, at $[v_n]_1$ har orden n i $K_1(D_n)$, og $K_1(D_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

13.2 Byggestenene

Lad $\mathcal{B}_0$ være klassen af C^*-algebraer bestående af $C_0(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R}^2)$, D_n og SD_n for $n \geqslant 2$. K-teorien for disse C^*-algebraer er ifølge 13.1, 11.2, 10.2 og 11.13 givet ved

	K_0	K_1
D_n	0	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
SD_n	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	0
$C_0(\mathbb{R})$	0	$\mathbb{Z}$
$C_0(\mathbb{R}^2)$	$\mathbb{Z}$	0

Bemærk, at $C_0(\mathbb{R}) \cong C_0((0,1)) = S\mathbb{C}$, og at $C_0(\mathbb{R}^2) \cong SC_0(\mathbb{R}) \cong SC_0((0,1))$ (jvf. Eksempel 10.5). Definér $v_1 \in \mathcal{U}(C_0((0,1)))$ ved

$$v_1(t) = e^{2\pi it}, \quad t \in [0, 1]\,.$$

Da er $[v_1]_1 = \beta_{\mathbb{C}}([1_{\mathbb{C}}]_0)$, så elementet $[v_1]_1$ genererer den cykliske gruppe $K_1(C_0((0,1)))$. Vi skal fremover benytte C^*-algebraerne $C_0((0,1))$ og $SC_0((0,1))$ i stedet for $C_0(\mathbb{R})$ og $C_0(\mathbb{R}^2)$.

Lad $\mathcal{B}$ være klassen af alle C^*-algebraer af formen

$$M_{k_1}(B_1) \oplus M_{k_2}(B_2) \oplus \cdots \oplus M_{k_r}(B_r),$$

hvor $r, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ og hvor $B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{B}_0$.

13.3 Sætning

Hvis G er en endeligt frembragt abelsk gruppe, så er G isomorf med en gruppe af formen

$$\mathbb{Z}^k \oplus (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}),$$

for passende $k, r \in \mathbb{N}_0$ og $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$.

Bevis: Slå op i en hvilken som helst rimelig lærebog i algebra. $\square$

Af 13.2, 13.3, 4.15 og 8.14 fås følgende resultat umiddelbart.

13.4 Korollar

Hvis G_0 og G_1 er endeligt frembragte abelske grupper, så findes en C^*-algebra A i $\mathcal{B}$, som opfylder $K_0(A) \cong G_0$ og $K_1(A) \cong G_1$.

Til en C^*-algebra A og et naturligt tal k betragtes *-homomorfien $\lambda_k \colon A \to M_k(A)$ fra Sætning 4.16 og 8.15 og *-homomorfien $\mu_k \colon A \to M_k(A)$ givet ved

$$\mu_k(a) = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}, \quad a \in A.$$

Det ses let, at $K_0(\mu_k) = k \cdot K_0(\lambda_k)$ og $K_1(\mu_k) = k \cdot K_1(\lambda_k)$. Det er vist i Sætning 4.16 og 8.15, at $K_0(\lambda_k)$ og $K_1(\lambda_k)$ er isomorfier.

13.5 Lemma

Lad $A, B \in \mathcal{B}_0$ og antag, at $\alpha_0 \colon K_0(A) \to K_0(B)$ og $\alpha_1 \colon K_1(A) \to K_1(B)$ er gruppehomomorfier. Så findes et naturligt tal k og en *-homomorfi $\varphi \colon A \to M_k(B)$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd} K_i(A) \arrow[rr, "K_i(\varphi)"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & K_i(M_k(B)) \\ & K_i(B) \arrow[ur, "K_i(\lambda_k)"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer for $i = 0, 1$.

Bevis: Bemærk, at enten er $\alpha_0 = 0$ eller $\alpha_1 = 0$. Hvis $\alpha_0 = 0$ og $\alpha_1 = 0$, løses problemet ved at sætte $k = 1$ og ved at lade φ være nulafbildningen. Antag $\alpha_1 \neq 0$. Så er $\alpha_0 = 0$, og vi befinder os i et af følgende tre tilfælde.

(i) $A = B = C_0((0,1))$,

(ii) $A = C_0((0,1)),\ B = D_n$,

(iii) $A = D_{n_1}, \quad B = D_{n_2}$.

De tre tilfælde behandles hver for sig.

(i) Her er $\alpha_1([v_1]_1) = m[v_1]_1$ for et $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Antag først $m > 0$. Sæt $k = m$, og sæt $\varphi = \mu_k \colon C_0((0,1)) \to M_k(C_0((0,1)))$. Da har vi

$$K_1(\varphi)\,([v_1]_1) = k \cdot K_1(\lambda_k)\,([v_1]_1) = (K_1(\lambda_k) \circ \alpha_1)\,([v_1]_1),$$

hvilket viser, at $K_1(\varphi) = K_1(\lambda_k) \circ \alpha_1$.

Antag nu, at $m < 0$. Definér en automorfi τ på $C_0((0,1))$ ved

$$\tau(f)\,(t) = f(1-t), \quad t \in [0,1],$$

og bemærk, at $\tau(v_1) = v_1^*$, og dermed $K_1(\tau)([v_1]_1) = -[v_1]_1$. Sæt $k = -m$ og sæt $\varphi = \mu_k \circ \tau \colon C_0((0,1)) \to M_k(C_0((0,1)))$. Så er

$$K_1(\varphi)([v_1]_1) = -k \cdot K_1(\lambda_k)([v_1]_1) = (K_1(\lambda_k) \circ \alpha_1)([v_1]_1),$$

og igen konkluderes $K_1(\varphi) = K_1(\lambda_k) \circ \alpha_1$.

(ii) Bestem $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, så $\alpha_1([v_1]_1) = k[v_n]_1$. Lad φ være sammensætningen af *-homomorfierne

$$C_0\big((0,1)\big) \xrightarrow{\lambda_n} M_n\big(C_0\big((0,1)\big)\big) \xrightarrow{\mu_k} M_k\big(M_n\big(C_0((0,1))\big)\big) \xhookrightarrow{\iota} M_k(D_n).$$

Direkte inspektion viser, at $K_1(\varphi)([v_1]_1) = k \cdot K_1(\lambda_k)([v_n]_1)$, hvoraf det ses, at $K_1(\varphi) = K_1(\lambda_k) \circ \alpha_1$.

(iii) Find $m \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\}$ således, at $\alpha_1([v_{n_1}]_1) = m[v_{n_2}]_1$. Da $n_1[v_{n_1}]_1 = 0$, findes $k \in \mathbb{N}$, så $n_1 m = n_2 k \,(= n)$.

Billedet af afbildningen $\mu_m \colon D_{n_1} \to M_m(D_{n_1})$ er indeholdt i D_n, og vi har en oplagt indlejring $\iota \colon D_n \to M_k(D_{n_2})$. Lad φ være sammensætningen af *-homomorfierne

$$D_{n_1} \xrightarrow{\mu_m} D_n \xhookrightarrow{\iota} M_k(D_{n_2}).$$

Herom gælder $K_1(\varphi)([v_{n_1}]_1) = m \cdot K_1(\lambda_k)([v_{n_2}]_1)$, så $K_1(\varphi) = K_1(\lambda_k) \circ \alpha_1$.

Antag nu, at $\alpha_0 \neq 0$ og $\alpha_1 = 0$. Vi har da, at $A = SA'$ og $B = SB'$, hvor A', B' findes blandt C^*-algebraerne $C_0((0,1))$ og D_n. Idet vi identificerer C^*-algebraerne $SM_k(B')$ og $M_k(B)$, kan vi ifølge det allerede viste finde en *-homomorfi $\varphi \colon A' \to M_k(B')$, således at $S\varphi \colon A \to M_k(B)$ opfylder $K_0(S\varphi) = K_0(\lambda_k) \circ \alpha_0$. $\square$

13.6 Lemma

Lad $A \in \mathcal{B}$, lad $B \in \mathcal{B}_0$ og antag $\alpha_0 \colon K_0(A) \to K_0(B)$ og $\alpha_1 \colon K_1(A) \to K_1(B)$ er gruppehomomorfier. Så findes et naturligt tal k og en *-homomorfi $\varphi \colon A \to M_k(B)$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd} K_i(A) \arrow[rr, "K_i(\varphi)"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & K_i(M_k(B)) \\ & K_i(B) \arrow[ur, "K_i(\lambda_k)"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer for $i = 0, 1$.

Bevis: Vi har

$$A = M_{l_1}(A_1) \oplus M_{l_2}(A_2) \oplus \cdots \oplus M_{l_r}(A_r)$$

for passende $r, l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$ og $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{B}_0$. Lad $\iota_j \colon M_{l_j}(A_j) \to A$ og $\pi_j \colon A \to M_{l_j}(A_j)$ være de kanoniske afbildninger. Ifølge Lemma 13.5 findes $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ og *-homomorfier $\varphi_j \colon A_j \to M_{k_j}(B)$, således at

$$K_i(\varphi_j) = K_i(\lambda_{k_j}) \circ \alpha_i \circ K_i(\iota_j \circ \lambda_{l_j} \colon A_j \to A), \quad i = 0, 1.$$

Lad $\hat{\varphi}_j\colon M_{l_j}(A_j) \to M_{k_j l_j}(B)$ være *-homomorfien induceret af φ_j, og bemærk, at

$$\begin{aligned} &K_i(\hat{\varphi}_j) \circ K_i\left(\lambda_{l_j}\colon A_j \to M_{l_j}(A_j)\right) \\ &= K_i\left(\lambda_{l_j}\colon M_{k_j}(B) \to M_{k_j l_j}(B)\right) \circ K_i(\varphi_j), \end{aligned}$$

og dermed $K_i(\hat{\varphi}_j) = K_i(\lambda_{k_j l_j}) \circ \alpha_i \circ K_i(\iota_j)$.

Sæt $k = \sum_{j=1}^r k_j l_j$, og lad $\eta_j\colon M_{k_j l_j}(B) \to M_k(B)$ være indbyrdes ortogonale *-homomorfier, som fremkommer ved at dele $M_k(B)$ ind i blok-matricer på passende vis. Vi har da

$$K_i(\eta_j) \circ K_i\left(\lambda_{k_j l_j}\colon B \to M_{k_j l_j}(B)\right) = K_i\left(\lambda_k\colon B \to M_k(B)\right).$$

Nu sættes

$$\varphi = \sum_{j=1}^r \eta_j \circ \hat{\varphi}_j \circ \pi_j\colon A \to M_k(B),$$

og da $\sum_{j=1}^r K_i(\iota_j \circ \pi_j) = \mathrm{id}_{K_i(A)}$, har vi

$$\begin{aligned} K_i(\varphi) &= \sum_{j=1}^r K_i(\eta_j) \circ K_i(\lambda_{k_j l_j}) \circ \alpha_i \circ K_i(\iota_j) \circ K_i(\pi_j) \\ &= \sum_{j=1}^r K_i(\lambda_k) \circ \alpha_i \circ K_i(\iota_j \circ \pi_j) = K_i(\lambda_k) \circ \alpha_i. \end{aligned}$$

□

13.7 Sætning

Lad $A \in \mathcal{B}$, lad G_0 og G_1 være endeligt frembragte abelske grupper, og lad $\alpha_0\colon K_0(A) \to G_0$ og $\alpha_1\colon K_1(A) \to G_1$ være gruppehomomorfier. Så findes en C^*-algebra B i $\mathcal{B}$, en *-homomorfi $\varphi\colon A \to B$ og gruppeisomorfier $\beta_0\colon K_0(B) \to G_0$ og $\beta_1\colon K_1(B) \to G_1$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd} K_i(A) \arrow[rr, "K_i(\varphi)"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & K_i(B) \arrow[dl, "\beta_i"] \\ & G_i, & \end{tikzcd}$$

kommuterer for $i = 0, 1$.

Bevis: Ved at kombinere 13.2 og Sætning 13.3 findes $B_1, \dots, B_r$ i $\mathcal{B}_0$ således, at

$$G_i \cong K_i(B_1) \oplus K_i(B_2) \oplus \cdots \oplus K_i(B_r), \quad i = 0, 1.$$

Lad $p_j^{(i)} \colon G_i \to K_i(B_j)$ og $q_j^{(i)} \colon K_i(B_j) \to G_i$ være de tilhørende (kanoniske) homomorfier, således at

$$\mathrm{id}_{G_i} = \sum_{j=1}^{r} q_j^{(i)} \circ p_j^{(i)} , \qquad \mathrm{id}_{K_i(B_j)} = p_j^{(i)} \circ q_j^{(i)}.$$

Ifølge Lemma 13.6 findes $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ og *-homomorfier $\varphi_j \colon A \to M_{k_j}(B_j)$, som får diagrammerne

$$\begin{tikzcd}
K_i(A) \arrow[rr, "K_i(\varphi_j)"] \arrow[dr, "p_j^{(i)} \circ \alpha_i"'] & & K_i(M_{k_j}(B_j)) \\
& K_i(B_j) \arrow[ur, "K_i(\lambda_{k_j})"'] &
\end{tikzcd}$$

til at kommutere. Sæt

$$B = M_{k_1}(B_1) \oplus M_{k_2}(B_2) \oplus \cdots \oplus M_{k_r}(B_r),$$

lad $\pi_j \colon B \to M_{k_j}(B_j)$ og $\iota_j \colon M_{k_j}(B_j) \to B$ være de kanoniske afbildninger, og definér $\varphi \colon A \to B$ ved

$$\varphi(a) = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), \dots, \varphi_r(a)) .$$

Betragt gruppe-homomorfierne

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{r} q_j^{(i)} \circ K_i \left(\lambda_{k_j} \colon B_j \to M_{k_j}(B_j)\right)^{-1} \circ K_i(\pi_j) \colon K_i(B) \to G_i,$$

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{r} K_i(\iota_j) \circ K_i \left(\lambda_{k_j} \colon B_j \to M_{k_j}(B_j)\right) \circ p_j^{(i)} \colon G_i \to K_i(B).$$

Det ses, at $\beta_i \circ \gamma_i = \mathrm{id}_{G_i}$ og $\gamma_i \circ \beta_i = \mathrm{id}_{K_i(B)}$, så β_i er en isomorfi. Endelig, da $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$, får vi

$$\beta_i \circ K_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{r} q_j^{(i)} \circ K_i(\lambda_{k_j})^{-1} \circ K_i(\varphi_j) = \sum_{j=1}^{r} q_j^{(i)} \circ p_j^{(i)} \circ \alpha_i = \alpha_i.$$

□

13.8 Sætning

Lad G_0 og G_1 være tællelige abelske grupper. Der findes en induktiv følge af C^*-algebraer

$$B_1 \xrightarrow{\varphi_1} B_2 \xrightarrow{\varphi_2} B_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

med induktiv grænse B, sådan at $K_0(B) \cong G_0$, $K_1(B) \cong G_1$, og alle B_j tilhører $\mathcal{B}$.

Bevis: Skriv grupperne G_0 og G_1 på listeform

$$G_i = \{g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, g_3^{(i)}, \dots\},$$

evt. med repetition, og lad $G_i^{(n)}$ være undergruppen af G_i frembragt af $\{g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_n^{(i)}\}$. Vi viser, at der findes en induktiv følge af C^*-algebraer $B_1, B_2, B_3, \dots \in \mathcal{B}$ med forbindende *-homomorfier $\varphi_n \colon B_n \to B_{n+1}$ og gruppeisomorfier $\beta_i^{(n)} \colon K_i(B_n) \to G_i^{(n)}$, således at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
G_i^{(1)} \arrow[r, hook, "\iota"] & G_i^{(2)} \arrow[r, hook, "\iota"] & G_i^{(3)} \arrow[r, hook] & \cdots \\
K_i(B_1) \arrow[u, "\beta_i^{(1)}"] \arrow[r, "K_i(\varphi_1)"'] & K_i(B_2) \arrow[u, "\beta_i^{(2)}"] \arrow[r, "K_i(\varphi_2)"'] & K_i(B_3) \arrow[u, "\beta_i^{(3)}"] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommuterer for $i = 0, 1$. Korollar 13.4 giver eksistensen af C^*-algebraen B_1 og isomorfierne $\beta_0^{(1)} \colon K_0(B_1) \to G_0^{(1)}$ og $\beta_1^{(1)} \colon K_1(B_1) \to G_1^{(1)}$. Benyt herefter Sætning 13.7, med $A = B_{n-1}$ og $\alpha_i = \iota \circ \beta_i^{(n-1)} \colon K_i(B_{n-1}) \to G_i^{(n)}$, til at finde $B_n \in \mathcal{B}$, *-homomorfien $\varphi_{n-1} \colon B_{n-1} \to B_n$, og gruppeisomorfierne $\beta_i^{(n)} \colon K_i(B_n) \to G_i^{(n)}$, $i = 0, 1$, som får den pågældende firkant i diagrammet til at kommutere.

Sæt $B = \varinjlim(B_n, \varphi_n)$. Kontinuitet af K_0 og K_1 (se Sætning 6.7 og Opgave 10.8) giver nu

$$K_i(B) \cong \varinjlim (K_i(B_n), K_i(\varphi_n)) \cong \varinjlim \left(G_i^{(n)}, \iota\right) \cong \bigcup_{n=1}^{\infty} G_i^{(n)} = G_i.$$