2 Gruppen af unitære operatorer og sammenligning af projektioner

For yderligere læsning herom anbefales [Blackadar, afsnit 4], [Murphy, kapitel 7] og [Wegge–Olsen, kapitel 4–5].

2.1 Definition

Lad A være en C^*-algebra med enhed. Benævn med $\mathcal{U}(A)$ gruppen af unitære elementer i A. For $u, v \in \mathcal{U}(A)$ defineres

$$u \sim_h v \text{ (i } \mathcal{U}(A)) \overset{\text{def}}{\iff} \exists w \in C([0,1], \mathcal{U}(A)) : u = w(0) \text{ og } v = w(1).$$

Definér endvidere $\mathcal{U}_0(A)$ til at være mængden af alle unitære u i A, for hvilke $u \sim_h 1$ i $\mathcal{U}(A)$.

2.2 Lemma

Antag A er unital og $u, v \in \mathcal{U}(A)$. Så gælder

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

i $\mathcal{U}(M_2(A))$. Specielt er

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bevis: Bemærk først, at

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi t}{2}) \cdot 1 & -\sin(\frac{\pi t}{2}) \cdot 1 \\ \sin(\frac{\pi t}{2}) \cdot 1 & \cos(\frac{\pi t}{2}) \cdot 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1],$$

er en kontinuert sti i $\mathcal{U}(M_2(A))$, som implementerer relationen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sim_h \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dermed får vi

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De øvrige udsagn fremkommer på tilsvarende måde. □

2.3 Sætning

Hvis A er en C^*-algebra med enhed, så er $\mathcal{U}_0(A)$ en normal undergruppe af $\mathcal{U}(A)$, og $\mathcal{U}_0(A)$ er åben og lukket relativt til $\mathcal{U}(A)$. Et element $u \in A$ tilhører $\mathcal{U}_0(A)$, hvis og kun hvis der findes et $n \in \mathbb{N}$ og selv-adjungerede elementer $h_1, \dots, h_n \in A$, så

$$u = \exp(ih_1) \cdot \exp(ih_2) \cdot \dots \cdot \exp(ih_n).$$

Bevis: Det er ret let at se, at $\mathcal{U}_0(A)$ er en normal undergruppe af $\mathcal{U}(A)$ (overvej dette!), og at $\mathcal{U}_0(A)$ er sammenhængende — faktisk kurvesammenhængende.

Den kontinuerte funktionskalkyle (Afsnit 1.7) giver, at hvis $h \in A$ er selv-adjungeret, så er $\exp(ih)$ er et unitært element i A, $t \mapsto \exp(ith)$ er kontinuert, $\exp(0) = 1_A$, og $\exp(ih)^* = \exp(-ih)$. Det følger specielt heraf, at $\exp(ih) \in \mathcal{U}_0(A)$.

Lad G være mængden af elementer af formen $\exp(ih_1) \cdot \exp(ih_2) \cdot \dots \cdot \exp(ih_n)$, hvor $n \in \mathbb{N}$, og $h_1, h_2, \dots, h_n$ er selv-adjungerede elementer i A. Det følger af ovenstående, at $G \subseteq \mathcal{U}_0(A)$. Det ses let, at G er en gruppe.

Antag $u \in \mathcal{U}(A)$ og $v \in G$ opfylder $\|u - v\| < 2$. Da er $\|1 - uv^*\| = \|u - v\| < 2$, hvilket implicerer, at $-1 \notin \mathrm{sp}(uv^*)$. Lad $f\colon \mathrm{sp}(uv^*) \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(e^{it}) = t$, for $-\pi < t < \pi$. Da er f kontinuert, og $h = f(uv^*)$ er selv-adjungeret. Da $z = \exp(if(z))$ for $z \in \mathrm{sp}(uv^*)$, ser vi, at $uv^* = \exp(if(uv^*)) = \exp(ih)$. Dette viser, at $u = \exp(ih)v \in G$, og at G således er åben relativt til $\mathcal{U}(A)$.

Komplementet $\mathcal{U}(A) \setminus G$ er en disjunkt forening af sideklasser af formen Gu, $u \in \mathcal{U}(A)$, og hver af disse sideklasser er homeomorfe med G og dermed åbne. Dette viser, at G er afsluttet relativt til $\mathcal{U}(A)$.

Sammenfattende har vi, $G \subseteq \mathcal{U}_0(A)$, G er åben og afsluttet relativt til $\mathcal{U}(A)$, og $\mathcal{U}_0(A)$ er sammenhængende. Derfor er $\mathcal{U}_0(A) = G$, hvilket beviser sætningen. □

2.4 Lemma

Lad A og B være C^*-algebraer med enhed, og lad $\varphi\colon A \to B$ være en surjektiv enhedsbevarende *-homomorfi. Da følger:

(i) $\varphi(\mathcal{U}_0(A)) = \mathcal{U}_0(B)$.

(ii) For ethvert $u \in \mathcal{U}(B)$ findes $v \in \mathcal{U}_0(M_2(A))$ opfyldende

$$\varphi_2(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

(iii) Hvis $u \in \mathcal{U}(B)$, og hvis der findes et $v \in \mathcal{U}(A)$ med $u \sim_h \varphi(v)$, så er $u \in \varphi(\mathcal{U}(A))$.

Bevis: (i). Inklusionen $\varphi(\mathcal{U}_0(A)) \subseteq \mathcal{U}_0(B)$ er klar ud fra definitionen af $\mathcal{U}_0(\cdot)$.

Omvendt, hvis $u \in \mathcal{U}_0(B)$, så er

$$u = \exp(ih_1) \cdot \exp(ih_2) \cdots \exp(ih_n),$$

hvor $h_j = h_j^* \in B$. Da φ er surjektiv, findes $x_j \in A$, så $\varphi(x_j) = h_j$. Sæt $k_j = \frac{1}{2}(x_j + x_j^*)$, og bemærk at $k_j = k_j^*$ og $\varphi(k_j) = h_j$. Sæt

$$v = \exp(ik_1) \cdot \exp(ik_2) \cdots \exp(ik_n) \in \mathcal{U}_0(A).$$

Så er $\varphi(v) = u$.

(ii) følger af (i) sammen med Lemma 2.2.

(iii). Hvis $u \sim_h \varphi(v)$, så er $u\varphi(v^*) \in \mathcal{U}_0(B) = \varphi(\mathcal{U}_0(A))$. Derfor findes $w \in \mathcal{U}_0(A)$ med $\varphi(w) = u\varphi(v^*)$. Dette giver $u = \varphi(wv) \in \varphi(\mathcal{U}(A))$. $\square$

Gruppen $\mathcal{U}(A)$ af unitære elementer i en unital C^*-algebra A er en undergruppe af gruppen af invertible elementer, $\mathrm{GL}(A)$, i A. Der gælder herom:

2.5 Sætning

(i) For alle $z \in \mathrm{GL}(A)$ findes $u \in \mathcal{U}(A)$, så $z \sim_h u$ i $\mathrm{GL}(A)$ (i.e. der findes en kontinuert sti $t \mapsto z_t \in \mathrm{GL}(A)$, så $z_0 = z$ og $z_1 = u$).

(ii) Hvis $u, v \in \mathcal{U}(A)$ og $u \sim_h v$ i $\mathrm{GL}(A)$, så er $u \sim_h v$ i $\mathcal{U}(A)$.

Bevis: (i) Hvis z er invertibel, så er z^*z og $(z^*z)^{1/2}$ invertible, og der findes $\lambda > 0$ sådan at $(z^*z)^{1/2} \geqslant \lambda \cdot 1$. Det ses nu, at $u = z(z^*z)^{-1/2}$ er unitær, idet u er invertibel og $u^*u = 1$, og $z = u(z^*z)^{1/2}$. Sæt $h_t = t \cdot 1 + (1-t)(z^*z)^{1/2}$, og bemærk at $h_t \geqslant \min\{\lambda, 1\} \cdot 1$, hvis $t \in [0,1]$, og derfor er h_t invertibel for alle $t \in [0,1]$. Idet $h_0 = (z^*z)^{1/2}$ og $h_1 = 1$, følger det, at $t \mapsto uh_t \in \mathrm{GL}(A)$ er en kontinuert sti, som forbinder z med u.

(ii) Antag $t \mapsto z_t \in \mathrm{GL}(A)$ er en kontinuert sti, $z_0 = u$ og $z_1 = v$. En anvendelse af den kontinuerte funktionskalkyle (se Lemma 2.10 og 1.7) giver, at $t \mapsto u_t = z_t(z_t^* z_t)^{-1/2} \in \mathcal{U}(A)$ er en kontinuert sti, og at $u_0 = u$ og $u_1 = v$. $\square$

Hvis A er en unital C^*-algebra (eller Banach-algebra), og hvis $a \in A$ opfylder $\|1 - a\| < 1$, så er a invertibel med invers givet ved den norm-konvergente sum

$$a^{-1} = 1 + (1-a) + (1-a)^2 + (1-a)^3 + \cdots .$$

Et oplagt norm-estimat af højre-siden giver, $\|a^{-1}\| \leqslant (1 - \|1-a\|)^{-1}$. Dette udsagn kan skærpes på følgende måde.

2.6 Sætning

Lad A være en C^*-algebra med enhed. Lad $a, b \in A$, antag a er invertibel, og at $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Det følger, at b er invertibel, og at $\|b^{-1}\|^{-1} \geqslant \|a^{-1}\|^{-1} - \|a-b\|$. Endvidere definerer $c_t = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$, en kontinuert sti i $\mathrm{GL}(A)$ fra a til b, og vi har dermed $a \sim_h b$ i $\mathrm{GL}(A)$.

Bevis: Vi har

$$\|1 - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a-b)\| \leqslant \|a^{-1}\| \cdot \|a-b\| < 1,$$

så $a^{-1}b$ er invertibel, og

$$\|(a^{-1}b)^{-1}\| \leqslant (1 - \|1 - a^{-1}b\|)^{-1}.$$

Dette implicerer, at b er invertibel med invers $b^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$. Vi får således

$$\|b^{-1}\|^{-1} \geqslant \|(a^{-1}b)^{-1}\|^{-1} \cdot \|a^{-1}\|^{-1} \geqslant (1 - \|1 - a^{-1}b\|) \cdot \|a^{-1}\|^{-1} \geqslant \|a^{-1}\|^{-1} - \|a-b\|.$$

Da $\|a - c_t\| = t\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, er c_t invertibel. $\square$

2.7 Definition

Et element $p \in A$ kaldes en *projektion*, hvis $p = p^2 = p^*$, og mængden af alle projektioner i A benævnes $P(A)$. For $p, q \in P(A)$ defineres:

$$\begin{aligned}
p \sim q \quad &\overset{\text{def}}{\iff} \exists v \in A : p = v^*v \text{ og } \; q = vv^* \text{ (Murray–von Neumann-ækvivalens)},\\
p \sim_u q \; &\overset{\text{def}}{\iff} \exists u \in \mathcal{U}(\tilde{A}) : q = upu^* \text{ (unitær ækvivalens)},\\
p \sim_h q \; &\overset{\text{def}}{\iff} \exists e \in C([0,1], P(A)) : p = e(0) \text{ og } q = e(1) \text{ (homotopiækvivalens)}.
\end{aligned}$$

Relationerne $\sim$, $\sim_u$ og $\sim_h$ er ækvivalensrelationer på $P(A)$ (overvej dette!).

2.8 Sætning

Hvis A har enhed, og $p, q \in P(A)$, er følgende udsagn ækvivalente.

(i) $p \sim_u q$,

(ii) $\exists u \in \mathcal{U}(A) : q = upu^*$,

(iii) $p \sim q$ og $1_A - p \sim 1_A - q$.

Bevis: Opgave! Benyt bl.a., at $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$, når A har enhed. $\square$

2.9 Lemma

Lad A være en C^*-algebra, lad p være en projektion i A, og lad a være et selv-adjungeret element i A. Sæt $\delta = \|p - a\|$. Så er

$$\mathrm{sp}(a) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Bevis: Antag $t \in \mathbb{C}$ med $d = \mathrm{dist}(t, \{0, 1\}) > \delta$. Så er $p - t \cdot 1$ invertibel i $\tilde{A}$, og $\|(p - t \cdot 1)^{-1}\| \leqslant d^{-1}$. Det følger, at

$$\|(p - t \cdot 1)^{-1}(a - t \cdot 1) - 1\| = \|(p - t \cdot 1)^{-1}(a - p)\| < 1.$$

Dette viser, at $(p - t \cdot 1)^{-1}(a - t \cdot 1)$ er invertibel. Dermed er også $a - t \cdot 1$ invertibel, så $t \notin \mathrm{sp}(a)$. □

2.10 Lemma

Lad K være en kompakt delmængde af $\mathbb{R}$ og lad $f \colon K \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion. Lad A være en C^*-algebra, og lad Ω_K være mængden af selv-adjungerede elementer i A, hvis spektrum er indeholdt i K. Så er funktionen $\Omega_K \to A$ givet ved $a \mapsto f(a)$ kontinuert.

Bevis: Ved at benytte, at afbildningen $A \to A$ givet ved $a \mapsto a^n$ er kontinuert for ethvert n (overvej dette!), følger det, at afbildningen $A \to A$ givet ved $a \mapsto f(a)$ er kontinuert for ethvert polynomium $f \in \mathbb{C}[x]$.

Lad $f \colon K \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion. Lad $a \in \Omega_K$, og betragt et $\varepsilon > 0$. Benyt Weierstrass til at finde et polymomium g, som opfylder $\|f - g\|_{\infty,K} \leqslant \varepsilon/3$. Find herefter et $\delta > 0$, så $\|g(a) - g(b)\| \leqslant \varepsilon/3$ for alle $b \in A$ med $\|a - b\| \leqslant \delta$. Da $\|f(x) - g(x)\| \leqslant \|f - g\|_{\infty,K} \leqslant \varepsilon/3$ for alle $x \in \Omega_K$, ses det, at $\|f(a) - f(b)\| \leqslant \varepsilon$ for alle $b \in \Omega_K$ med $\|a - b\| \leqslant \delta$. □

Lemma 2.10 gælder også i det mere generelle tilfælde, hvor K er en vilkårlig kompakt delmængde af $\mathbb{C}$, og hvor Ω_K er mængden af alle normale elementer i A, hvis spektrum er indeholdt i K. Beviset herfor er dog lidt mere kompliceret — og vi får ikke brug for denne øgede generalitet.

2.11 Sætning

Hvis $p, q \in P(A)$ opfylder $\|p - q\| < 1$, så er $p \sim_h q$.

Bevis: Sæt $a_t = (1 - t)p + tq$ for $t \in [0, 1]$, og bemærk, at a_t er selv-adjungeret, at

$$\min\{\|a_t - p\|, \|a_t - q\|\} \leqslant \|p - q\|/2 < 1/2,$$

og at $t \mapsto a_t$ er kontinuert. Sæt $\delta = \|p - q\|/2$, og sæt

$$K = [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Det følger nu af Lemma 2.9, at $a_t \in \Omega_K$, hvor Ω_K er som i Lemma 2.10. Lad $f \colon K \to \mathbb{C}$ være den kontinuerte afbildning, som antager værdien 0 på intervallet $[-\delta, \delta]$, og som er 1 på intervallet $[1 - \delta, 1 + \delta]$. Så er afbildningen $t \mapsto f(a_t)$ kontinuert ifølge Lemma 2.10, $f(a_t)$ er en projektion for alle t (da $f(a_t)$ er normal med spektrum indeholdt i $\{0, 1\}$) og $f(a_0) = f(p) = p, \; f(a_1) = f(q) = q.$ □

2.12 Sætning

For $p, q \in P(A)$ gælder, at $p \sim_h q$ hvis og kun hvis der findes $u \in \mathcal{U}_0(\tilde{A})$, så $q = upu^*$.

Bevis: Antag $q = upu^*$ for et passende $u \in \mathcal{U}_0(\tilde{A})$. Lad $t \mapsto u_t, \; t \in [0, 1]$, være en kontinuert sti af unitære operatorer i $\tilde{A}$ fra 1 til u. Så er $t \mapsto u_t p u_t{}^*$ en kontinuert sti bestående af projektioner i A, som forbinder p med q.

Antag omvendt, at $p \sim_h q$. Ved at dele en kontinuert sti fra p til q i tilstrækkeligt mange stykker kan vi reducere problemet til situationen, hvor $\|p - q\| < 1/2$. Sæt $z = qp + (1 - q)(1 - p) \in \tilde{A}$, og bemærk, at $zp = qp = qz$. Da

$$\|z - 1\| \leqslant \|q(p - q) + (1 - q)((1 - p) - (1 - q))\| \leqslant 2\|p - q\| < 1,$$

følger det af Sætning 2.6, at z er invertibel og homotop med 1 i $\mathrm{GL}(A)$.

Fra Sætning 2.5 (i) og dens bevis ses det, at $u = z(z^*z)^{-1/2} \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ er homotop med z (og derfor med 1) i $\mathrm{GL}(A)$. Sætning 2.5 (ii) giver derefter, at $u \in \mathcal{U}_0(\tilde{A})$.

Idet p kommuterer med $z^*z \; (= pqp + (1 - p)(1 - q)(1 - p))$, så vil p også kommutere med alle polynomier i z^*z og med afslutningen af elementer af den form, og således kan man se, at p kommuterer med $(z^*z)^{-1/2}$. Dette giver

$$up = z(z^*z)^{-1/2}p = zp(z^*z)^{-1/2} = qz(z^*z)^{-1/2} = qu$$

som ønsket. □

2.13 Sætning

For alle projektioner p, q i en C^*-algebra A gælder

(i) $p \sim_h q \Rightarrow p \sim_u q$,

(ii) $p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$.

Bevis: Første del følger umiddelbart af Sætning 2.12. Anden del er let at vise (se også (i) $\Rightarrow$ (iii) i Sætning 2.8) $\square$

2.14 Sætning

For alle $p, q \in P(A)$ gælder

(i) $p \sim q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M_2(A)$,

(ii) $p \sim_u q \Rightarrow \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M_2(A)$.

Bevis: (i) Find $v \in A$ så $p = v^*v$ og $q = vv^*$. Sæt

$$u = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at u og w er unitære elementer i $M_2(\tilde{A})$, og at

$$wu \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^*w^* = w \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da vi endvidere har,

$$wu = \begin{pmatrix} v + (1-q)(1-p) & (1-q)v^* \\ q(1-p) & (1-q) + qv^* \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_0(M_2(A)^\sim),$$

er påstand (i) bevist.

(ii) Find $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ så $q = upu^*$. Ifølge Lemma 2.2 findes en kontinuert sti $t \mapsto w_t \in \mathcal{U}(M_2(\tilde{A}))$, så

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Sæt $e_t = w_t\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)w_t^* \in P(M_2(A))$. Så er $t \mapsto e_t$ kontinuert, $e_0 = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ og $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $\square$

2.15 Bemærkning

Implikationerne $p \sim q \Rightarrow p \sim_u q$ og $p \sim_u q \Rightarrow p \sim_h q$ gælder ikke generelt.

Bevis: Antag A er en C^*-algebra med enhed, som indeholder en ikke-unitær isometri, i.e. der findes $s \in A$ opfyldende $s^*s = 1$, men $ss^* \neq 1$. Så gælder åbenbart, at $s^*s \sim ss^*$.

Men $1 - s^*s$ $(= 0)$ er ikke ækvivalent med $1 - ss^*$ $(\neq 0)$. Derfor er s^*s og ss^* ikke unitært ækvivalente, jvf. Sætning 2.8. For eksistensen af en C^*-algebra med en ikke-unitær isometri tag f.eks. $A = B(H)$, hvor H er et uendelig-dimensionalt Hilbertrum. (Se Opgave 2.23 og Eksempel 3.11.)

Et eksempel på unitært ækvivalente projektioner, som ikke er homotope, er noget vanskeligere at konstruere. Det vises senere i disse noter (se Eksempel 11.14), at der findes en C^*-algebra A med enhed, således at der i $M_2(A)$ findes et unitært element u, som opfylder, at der *ikke* findes noget $v \in \mathcal{U}(A)$, for hvilket u er homotop med $\left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. De åbenbart unitært ækvivalente projektioner

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^*,$$

er ikke homotope. For antag, at de var homotope. Så vil der ifølge Sætning 2.12 findes $w \in \mathcal{U}_0(M_2(A))$ med

$$wu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* w^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og dermed

$$wu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} wu.$$

En direkte matrixudregning viser, at ovenstående implicerer, at $wu = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, hvor $a, b \in \mathcal{U}(A)$. Dette fører til en modstrid, idet Lemma 2.2 giver

$$u \sim_h wu = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.16 Definition

Sæt $P_n(A) = P(M_n(A))$ og $P_\infty(A) = \cup_{n=1}^\infty P_n(A)$. For $p \in P_n(A)$ og $q \in P_m(A)$ defineres

$$p \sim q \overset{\text{def}}{\iff} \exists v \in M_{m,n}(A) : v^*v = p \quad \text{og} \quad vv^* = q,$$

$$p \oplus q \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \in P_{n+m}(A).$$

$\sim$ er en ækvivalensrelation på $P_\infty(A)$, som stemmer overens med relationen defineret i 2.1, hvis $p, q \in P_n(A)$. Vi har

$$p \sim \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{n+m}(A)$$

for alle $n, m \in \mathbb{N}$ og alle $p \in P_n(A)$, hvilket ses ved at sætte $v = (p \quad 0)$.

2.17 Sætning

For alle $p, q, r, p', q' \in P_\infty(A)$ gælder:

(i) $p \sim p'$ og $q \sim q' \Rightarrow p \oplus q \sim p' \oplus q'$,

(ii) $p \oplus q \sim q \oplus p$,

(iii) Hvis $p, q \in P_n(A)$ og $p \perp q$ (i.e. $pq = 0$), så er $p + q \sim p \oplus q$,

(iv) $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$

Bevis: Påstand (iv) er triviel. Hvis $p \sim p'$ og $q \sim q'$, da findes v, w så $p = v^*v$, $p' = vv^*$, $q = w^*w$ og $q' = ww^*$. Sæt

$$u_1 = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

(u_3 er kun defineret, hvis p, q ligger i samme matrix algebra). Da er $u_1^*u_1 = p \oplus q$, $u_1u_1^* = p' \oplus q'$, $u_2^*u_2 = p \oplus q$, og $u_2u_2^* = q \oplus p$. Hvis $pq = 0$, da er $u_3^*u_3 = p + q$ og $u_3u_3^* = p \oplus q$. $\square$

2.18 Sætning

Antag A_0 er en tæt del-*-algebra af en C^*-algebra A, og antag, at A_0 er afsluttet under kontinuert funktionskalkyle (dvs. hvis $a \in A_0$ er normal og $f \in C(\mathrm{sp}(a))$, så vil $f(a) \in A_0$, hvis enten $0 \notin \mathrm{sp}(a)$ eller $f(0) = 0$). Da gælder

(i) for alle $p \in P(A)$ findes $q \in P(A_0)$, så $p \sim q$ i A,

(ii) hvis $p, q \in P(A_0)$ og $p \sim q$ i A, så er $p \sim q$ i A_0.

Bevis:

(i) Find $b \in A_0$ så $\|p - b\| < \frac{1}{2}$. Sæt $a = \frac{1}{2}(b + b^*) \in A_0$, og bemærk, at $a = a^*$ og $(\delta =)\ \|p - a\| \leqslant \|p - b\| < \frac{1}{2}$. Fra Lemma 2.9 får vi

$$\mathrm{sp}(a) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Definér $f \in C(\mathrm{sp}(a))$ ved $f(t) = 0$, hvis $t < \frac{1}{2}$, og $f(t) = 1$, hvis $t > \frac{1}{2}$. Så er $|f(t) - t| \leqslant \delta$ for alle $t \in \mathrm{sp}(a)$ og $f(0) = 0$. Det følger, at $(q =)\ f(a)$ tilhører A_0 og $\|a - q\| \leqslant \delta$. Da $\|p - q\| \leqslant \|p - a\| + \|a - q\| \leqslant 2\delta < 1$, er $p \sim q$ jvf. Sætning 2.11 og Sætning 2.13.

(ii) Find $v \in A$, så $v^*v = p$ og $vv^* = q$, og find derefter $b \in A_0$, så $\|b\| = 1$ og $(\delta =)\ \|v - b\| < \frac{1}{2}$. Sæt $a = qbp \in A_0$, og bemærk, at $\|v - a\| \leqslant \delta$. Det følger, at a^*a ligger i pA_0p, aa^* ligger i qA_0q, og

$$\|a^*a - p\| \leqslant 2\delta < 1, \qquad \|aa^* - q\| \leqslant 2\delta < 1.$$

Dette implicerer, at a^*a — og dermed $(a^*a)^{1/2}$ — er invertible i pAp, og der findes derfor et positivt element $b \in pAp$ (den inverse til $(a^*a)^{1/2}$ i pAp), som opfylder $ba^*ab = p$. Idet $a^*a \in A_0$ giver betingelsen, at A_0 er afsluttet under kontinuert funktionskalkyle, at $C^*(a^*a)$ er indeholdt i A_0 (jvf. Afsnit 1.7). Opfat et øjeblik $C^*(a^*a)$ som en del-C*-algebra af pAp. Da er $b = f(a)$, hvor $f \in C(\mathrm{sp}(a^*a))$ er givet ved $f(t) = t^{-1/2}$. Husk at $0 \notin \mathrm{sp}(a^*a)$, når a^*a opfattes som et element i pAp. Dette viser $b \in C^*(a^*a)$, og dermed $b \in A_0$.

Sæt $w = ab \in A_0$. Da får vi $p = w^*w$.

Vi har endelig, at $ww^* \in qA_0q$, og ww^* er en projektion (jvf. Opgave 2.20). Dermed er $q_0 = q - ww^*$ også en projektion. Da $q_0ww^* = 0$, er $\|q_0w\|^2 = \|q_0ww^*q_0\| = 0$, så

$$q_0a = q_0ap = q_0a(a^*a)^{-1/2}(a^*a)^{1/2} = q_0w(a^*a)^{1/2} = 0.$$

Dvs. $\|q_0\| = \|q_0(aa^* - q)\| \leqslant 2\delta < 1$, hvilket medfører $q_0 = 0$. Dermed er $ww^* = q$, som ønsket. □

2.19 Opgave

To projektioner p, q i en C^*-algebra A siges at være indbyrdes ortogonale (i symboler: $p \perp q$), hvis $pq = 0$. Vis at $p \perp q$ hvis og kun hvis $p + q$ er en projektion.

2.20 Opgave

Lad A være en C^*-algebra, og antag $v \in A$ opfylder v^*v er en projektion. Vis at så er vv^* en projektion.

2.21 Opgave

Vis at den unitære gruppe $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$ er sammenhængende, dvs. $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C})) = \mathcal{U}_0(M_n(\mathbb{C}))$. Vis også at den unitære gruppe $\mathcal{U}(B(H))$ er sammenhængende, hvor H er et Hilbertrum.

2.22 Opgave

Lad $\mathrm{Tr}\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ være det sædvanlige spor. Lad $p, q \in M_n(\mathbb{C})$ være projektioner. Vis at følgende tre betingelser er ækvivalente:

(i) $p \sim q$,

(ii) $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(q)$,

(iii) $\dim(p(\mathbb{C}^n)) = \dim(q(\mathbb{C}^n))$.

Vis også, at $p \sim q \Rightarrow p \sim_u q$, og at $p \sim q \Rightarrow p \sim_h q$.

2.23 Opgave

Lad H være et uendelig dimensionalt separabelt Hilbertrum. Lad $p, q \in B(H)$ være projektioner.

(i) Vis at $p \sim q$ hvis og kun hvis $\dim(p(H)) = \dim(q(H))$.

(ii) Vis at $p \sim_u q$ hvis og kun hvis $\dim(p(H)) = \dim(q(H))$ og $\dim(p(H)^\perp) = \dim(q(H)^\perp)$.

(iii) Vis at $p \sim_u q \Rightarrow p \sim_h q$.

2.24 Opgave

Betragt den kort-eksakte følge

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\varphi} C(\mathbb{D}) \xrightarrow{\psi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

hvor $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, hvor ψ er restriktionsafbildningen, og hvor φ fremkommer ved at identificere $\mathbb{D} \setminus \mathbb{T}$ med $\mathbb{R}^2$. Lad $v \in C(\mathbb{T})$ være givet ved $v(z) = z$ for alle $z \in \mathbb{T}$.

(i) Gør rede for, at v er unitær.

(ii) Vis, at v ikke har noget løft til et unitært element i $C(\mathbb{D})$, i.e. der findes intet unitært $u \in C(\mathbb{D})$, så $\psi(u) = v$. [Vink: Benyt f.eks. Brouwer's fixpunktsætning, som siger, at enhver kontinuert afbildning $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ har et fixpunkt.]

(iii) Gør rede for, at $v \notin \mathcal{U}_0(C(\mathbb{T}))$. Vis eksplicit, at der ikke findes et selv-adjungeret element $h \in C(\mathbb{T})$, så $v = \exp(ih)$.