3 Om gruppen $K_{00}(A)$

3.1 Grothendieckkonstruktionen

Lad $(S,+)$ være en abelsk semigruppe. Definér en ækvivalensrelation $\sim$ på $S \times S$ ved

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists z \in S : x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

(Check, at $\sim$ faktisk er en ækvivalensrelation.) Kvotienten $(S \times S)/\sim$ betegnes $G(S)$, og $\langle (x,y) \rangle \in G(S)$ er ækvivalensklassen, som indeholder $(x,y) \in S \times S$.

Operationen

$$\langle (x_1, y_1) \rangle + \langle (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \rangle$$

er veldefineret (overvej dette), og med den bliver $(G(S),+)$ en abelsk gruppe. Bemærk, at $-\langle (x,y) \rangle = \langle (y,x) \rangle$, og at $\langle (x,x) \rangle = 0$. $G(S)$ kaldes *Grothendieckgruppen* for S.

Grothendieckafbildningen

$$g : S \to G(S)\ , \quad x \mapsto \langle (x+y, y) \rangle$$

er uafhængig af $y \in S$, og den er additiv.

Semigruppen $(S,+)$ siges at have *kancelleringsegenskaben*, hvis

(C) $$\forall x, y, z \in S : x + z = y + z \Longrightarrow x = y.$$

Følgende egenskaber ved Grothendieck-konstruktionen eftervises let:

(i) [Den universelle egenskab] Hvis H er en abelsk gruppe, og $\varphi\colon S \to H$ er additiv, så findes netop én gruppehomomorfi $\psi\colon G(S) \to H$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "g"'] & & H \\ & G(S) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer.

(ii) [Funktorialitet] Til enhver additiv afbildning $\varphi\colon S \to T$ mellem semigrupperne S

og T findes netop én gruppehomomorfi $G(\varphi)\colon G(S) \to G(T)$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & T \arrow[d, "g"] \\ G(S) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(T) \end{tikzcd}$$

kommuterer.

(iii) Hvis $(H, +)$ er en abelsk gruppe, og hvis $S \subseteq H$ er lukket under addition, så er $(S, +)$ en abelsk semigruppe med kancelleringsegenskaben, og $G(S)$ er isomorf med undergruppen H_0 genereret af S (dvs. $H_0 = \{x - y \mid x, y \in S\}$).

(iv) $G(S) = \{g(x) - g(y) \mid x, y \in S\}$.

(v) $g(x) = g(y) \iff \exists z \in S : x + z = y + z$.

(vi) $g\colon S \to G(S)$ er injektiv, hvis og kun hvis S har kancelleringsegenskaben.

Grothendieckgruppen hørende til $(\mathbb{N}_0, +)$ er (isomorf med) $(\mathbb{Z}, +)$, og Grothendieckgruppen hørende til semigruppen $(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, +)$ er 0.

3.2 Definition af $K_{00}(A)$

Husk fra 2.16 definitionen af mængden $P_\infty(A)$, ækvivalensrelationen $\sim$ og operationen $\oplus$. Til en C^*-algebra A sættes

$$V(A) = P_\infty(A)/\sim .$$

Lad $[p]_V \in V(A)$ være ækvivalensklassen, som indeholder $p \in P_\infty(A)$. Sæt, for $p, q \in P_\infty(A)$,

$$[p]_V + [q]_V = [p \oplus q]_V,$$

og benyt Sætning 2.17 til at konkludere, at $+$ er veldefineret, og at $(V(A), +)$ er en abelsk semigruppe.

Lad $K_{00}(A)$ være Grothendieckgruppen hørende til $V(A)$. For $p \in P_\infty(A)$, sæt

$$[p]_{00} = g([p]_V) \in K_{00}(A),$$

hvor $g\colon V(A) \to K_{00}(A)$ er Grothendieckafbildningen.

3.3 Sætning

Lad A være en C^*-algebra. Afbildningen $[\,\cdot\,]_{00} \colon P_\infty(A) \to K_{00}(A)$ opfylder

(i) $p, q \in P_\infty(A) : [p \oplus q]_{00} = [p]_{00} + [q]_{00}$,

(ii) $[0]_{00} = 0$ (hvor 0 er nulprojektionen i A),

(iii) $p, q \in P_n(A) : p \sim_h q \Longrightarrow [p]_{00} = [q]_{00}$,

(iv) $p, q \in P_n(A) : p \perp q \Longrightarrow p + q \in P_n(A) \quad$ og $\quad [p+q]_{00} = [p]_{00} + [q]_{00}$,

(v) $p, q \in P_\infty(A) : [p]_{00} = [q]_{00} \iff p \sim_s q$.

Relationen $\sim_s$ er *stabil ækvivalens:* $p \sim_s q \overset{\text{def}}{\iff} \exists r \in P_\infty(A) : p \oplus r \sim q \oplus r$.

Bevis: (i)

$$[p \oplus q]_{00} = g([p \oplus q]_V) = g([p]_V + [q]_V) = g([p]_V) + g([q]_V) = [p]_{00} + [q]_{00}.$$

(v) "$\Longrightarrow$" Hvis $[p]_{00} = [q]_{00}$, så findes ifølge 3.1 (v) en projektion $r \in P_\infty(A)$, så $[p]_V + [r]_V = [q]_V + [r]_V$. Men dette implicerer, at $[p \oplus r]_V = [q \oplus r]_V$, som igen giver $p \oplus r \sim q \oplus r$, og dermed $p \sim_s q$.

"$\Longleftarrow$" Antag $p \oplus r \sim q \oplus r$ for en projektion $r \in P_\infty(A)$. Så er $[p \oplus r]_V = [q \oplus r]_V$, og således også $[p \oplus r]_{00} = [q \oplus r]_{00}$. (i) giver $[p]_{00} + [r]_{00} = [q]_{00} + [r]_{00}$, og dermed $[p]_{00} = [q]_{00}$, da $K_{00}(A)$ er en gruppe.

(ii) Da $p \sim p \oplus 0$, giver (i) og (v), at $[p]_{00} = [p]_{00} + [0]_{00}$, så $[0]_{00} = 0$.

(iii) Fra Sætning 2.13 har vi, at $p \sim_h q$ medfører $p \sim q$, og (v) viser, at $[p]_{00} = [q]_{00}$.

(iv) Sætning 2.17 viser, at $p + q \sim p \oplus q$. Derfor er $[p+q]_{00} = [p \oplus q]_{00} = [p]_{00} + [q]_{00}$.

$\square$

Bemærk også, at 3.1 (iv) giver

$$K_{00}(A) = \{[p]_{00} - [q]_{00} \mid p, q \in P_\infty(A)\}.$$

Dette er *standardbilledet* af $K_{00}(A)$.

3.4 Sætning

Lad A være en C^*-algebra, lad G være en abelsk gruppe, og antag, at $\nu \colon P_\infty(A) \to G$ er en afbildning, som opfylder

(i) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$,

(ii) $\nu(0) = 0$ (hvor 0 er nulprojektionen i A),

(iii) $p, q \in P_n(A) : p \sim_h q \Longrightarrow \nu(p) = \nu(q)$.

Så findes netop én gruppehomomorfi $\alpha\colon K_{00}(A) \to G$, som giver et kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd} & P_\infty(A) \arrow[dl, "{[\,\cdot\,]_{00}}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_{00}(A) \arrow[rr, "\alpha"] & & G \end{tikzcd}$$

Bevis: Antag $p, q \in P_\infty(A)$ og $p \sim q$. Find $k, l \in \mathbb{N}$, så $p \in P_k(A)$ og $q \in P_l(A)$, og vælg $n \geqslant \max\{k, l\}$. Så er

$$p \sim p' = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(A), \quad q \sim q' = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(A),$$

hvilket giver $p' \sim q'$. Sætning 2.14 implicerer, at $p' \oplus 0 \sim_h q' \oplus 0$ i $P_{4n}(A)$. Det følger derfor, at

$$\nu(p) = \nu(p) + \underbrace{\nu(0) + \cdots + \nu(0)}_{4n-k} = \nu(p' \oplus 0_{3n}) = \nu(q' \oplus 0_{3n}) = \nu(q).$$

Der findes således en funktion $\beta\colon V(A) \to G$, som opfylder $\beta([p]_V) = \nu(p)$. Idet

$$\beta([p]_V + [q]_V) = \beta([p \oplus q]_V) = \nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q) = \beta([p]_V) + \beta([q]_V),$$

ser vi, at β er additiv. Eksistensen af α følger nu af 3.1 (i), og entydigheden følger af standardbilledet af K_{00}. □

3.5 Definition

Lad $\varphi\colon A \to B$ være en *-homomorfi mellem C^*-algebraerne A og B. Bemærk, at φ giver anledning til en *-homomorfi $\varphi\colon M_n(A) \to M_n(B)$ for alle n, og dermed specielt til en afbildning $\varphi\colon P_\infty(A) \to P_\infty(B)$.

Sæt

$$\nu(p) = [\varphi(p)]_{00} \in K_{00}(B)\ , \quad p \in P_\infty(A).$$

Det er let at se, at ν opfylder (i), (ii) og (iii) i Sætning 3.4, og der findes derfor netop én gruppehomomorfi $K_{00}(\varphi)\colon K_{00}(A) \to K_{00}(B)$, som opfylder $K_{00}(\varphi)([p]_{00}) = [\varphi(p)]_{00}$ for alle $p \in P_\infty(A)$. Vi får dermed følgende kommuterende diagram:

$$\begin{tikzcd} P_\infty(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_{00}}"'] & P_\infty(B) \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_{00}}"] \\ K_{00}(A) \arrow[r, "K_{00}(\varphi)"'] & K_{00}(B) \end{tikzcd}$$

3.6 Sætning (Funktorialitet af K_{00})

K_{00} er en funktor, idet der gælder

(i) $K_{00}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_{00}(A)}$,

(ii) hvis $\varphi\colon A \to B$ og $\psi\colon B \to C$ er *-homomorfier, så er $K_{00}(\psi \circ \varphi) = K_{00}(\psi) \circ K_{00}(\varphi)$.

Endvidere gælder

(iii) $K_{00}(0\colon A \to B) = 0\colon K_{00}(A) \to K_{00}(B)$ (hvor 0 er nulafbildningen).

Bevis: Overlades til læseren! $\square$

3.7 Definition

To *-homomorfier $\varphi, \psi\colon A \to B$ kaldes *homotope*, hvis der findes en sti $\varphi_t\colon A \to B$, $t \in [0,1]$, af *-homomorfier, således at $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$ og for hvert fast $a \in A$ er afbildningen $t \mapsto \varphi_t(a)$ kontinuert. Er dette tilfældet, skrives $\varphi \sim_h \psi$.

C^*-algebraerne A og B kaldes *homotopiækvivalente*, hvis der findes *-homomorfier $\varphi\colon A \to B$ og $\psi\colon B \to A$, således at $\psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$ og $\varphi \circ \psi \sim_h \mathrm{id}_B$.

3.8 Sætning (Homotopi-invarians)

(i) Hvis $\varphi, \psi\colon A \to B$ er homotope, så er $K_{00}(\varphi) = K_{00}(\psi)$.

(ii) Hvis C^*-algebraerne A og B er homotopiækvivalente, så er $K_{00}(A) \cong K_{00}(B)$. Mere konkret, hvis $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ er en homotopi, så er $K_{00}(\varphi)\colon K_{00}(A) \to K_{00}(B)$ og $K_{00}(\psi)\colon K_{00}(B) \to K_{00}(A)$ isomorfier og hinandens inverse.

Bevis: (i) Lad $\varphi_t\colon A \to B$ være en kontinuert sti, som forbinder φ med ψ. Denne kan udvides til kontinuerte stier $\varphi_t\colon M_n(A) \to M_n(B)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $p \in P_n(A)$, følger det derfor, at $\varphi(p) = \varphi_0(p) \sim_h \varphi_1(p) = \psi(p)$, hvilket giver

$$K_{00}(\varphi)([p]_{00}) = [\varphi(p)]_{00} = [\psi(p)]_{00} = K_{00}(\psi)([p]_{00}).$$

Vi konkluderer, at $K_{00}(\varphi) = K_{00}(\psi)$.

(ii) følger af (i) og af Sætning 3.6 (i) og (ii). $\square$

3.9 Spor

Et (begrænset) *spor* på en C^*-algebra A er en begrænset lineær funktion $\tau\colon A \to \mathbb{C}$, som har *sporegenskaben*

$$\forall a, b \in A: \quad \tau(ab) = \tau(ba).$$

Hvis τ er et spor på A, så findes netop ét spor τ_n (eller blot τ) på $M_n(A)$, som opfylder $\tau_n(a \oplus 0_{n-1}) = \tau(a)$ for alle $a \in A$, og τ_n er givet ved

$$\tau_n\left((a_{ij})\right) = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{ii}).$$

Et spor τ giver på denne måde anledning til en funktion $\tau\colon P_\infty(A) \to \mathbb{C}$, som let ses at opfylde (i), (ii) og (iii) i Sætning 3.4. (Husk, at $p \sim_h q \Longrightarrow p \sim q$, og det er klart, at $p \sim q \Longrightarrow \tau(p) = \tau(q)$.) Der findes derfor en gruppehomomorfi $K_{00}(\tau)\colon K_{00}(A) \to \mathbb{C}$, som opfylder

$$K_{00}(\tau)([p]_{00}) = \tau(p), \quad p \in P_\infty(A).$$

3.10 Eksempel

$K_{00}(\mathbb{C}) \cong K_{00}(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$.

Bevis: Lad Tr være det sædvanlige spor på $M_n(\mathbb{C})$ (som er givet ved $\mathrm{Tr}((\alpha_{ij})) = \sum \alpha_{ii}$). Det følger af Opgave 2.22, at to projektioner i $M_m(\mathbb{C})$ med samme spor er unitært ækvivalente. Vi har således, at Tr afbilder $P_\infty(M_n(\mathbb{C}))$ på $\mathbb{N}_0$, og $[p]_{00} = [q]_{00}$ hvis $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(q)$. Dette viser, at

$$K_{00}(\mathrm{Tr})\colon K_{00}(M_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z}$$

er en isomorfi. $\square$

3.11 Eksempel

Hvis H er et uendelig-dimensionalt Hilbertrum, så er $K_{00}(B(H)) = 0$.

Bevis: Antag H er et separabelt uendelig-dimensionalt Hilbertrum. Afbildningen

$$\dim\colon P_\infty(B(H)) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

givet ved

$$\dim(p) = \dim(p(H^n))\ , \quad p \in P_n(B(H)) = P(B(H^n)),$$

er surjektiv. Desuden har vi $\dim(p) = \dim(q)$ hvis og kun hvis $p \sim q$ (se Opgave 2.23), og $\dim(p \oplus q) = \dim(p) + \dim(q)$, så dim inducerer en additiv isomorfi $d\colon V(B(H)) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ved $d([p]_V) = \dim(p)$. Da Grothendieckgruppen af semigruppen $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ er nul, følger det ønskede.

I det ikke-separable tilfælde er $V(B(H))$ isomorf med et passende uendeligt ordensafsnit af kardinaltallene, og Grothendieckgruppen heraf er nul. □

3.12 Eksempel

$K_{00}(C_0(X)) = 0$, hvis X er et sammenhængende, lokalkompakt, ikke-kompakt Hausdorffrum.

Bevis: Bemærk først, at $M_n(C_0(X)) = C_0(X, M_n(\mathbb{C}))$, og således også, at $P_n(C_0(X)) = P(C_0(X, M_n(\mathbb{C})))$. Lad Tr være det sædvanlige spor på $M_n(\mathbb{C})$. Lad $p \in P_n(C_0(X))$. Så vil funktionen $x \mapsto \mathrm{Tr}(p(x))$ tilhøre $C_0(X, \mathbb{Z})$. Men $C_0(X, \mathbb{Z}) = \{0\}$, så $p = 0$. Derfor er $P_n(C_0(X)) = \{0\}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og dette viser, at $K_{00}(C_0(X)) = 0$. □

3.13 Eksempel

Antag, at X er et kompakt, sammenhængende Hausdorffrum. Så findes en surjektiv gruppehomomorfi $\dim\colon K_{00}(C(X)) \to \mathbb{Z}$, som opfylder $\dim([p]_{00}) = \mathrm{Tr}(p(x))$ for alle $p \in P_\infty(C(X))$ og alle $x \in X$.

Bevis: Vælg $x \in X$. Sæt $\delta_x(f) = f(x)$ for $f \in C(X)$, og benyt 3.9 til at definere homomorfien $\dim_x = K_{00}(\delta_x)\colon K_{00}(C(X)) \to \mathbb{Z}$. Så er

$$\dim_x([p]_{00}) = \mathrm{Tr}(p(x))\ , \quad p \in P_\infty(C(X)).$$

Da funktionen $x \mapsto \mathrm{Tr}(p(x))$ er kontinuert og antager værdier i den diskrete mængde $\mathbb{N}_0$, må den være konstant, dvs. uafhængig af det valgte x. □

3.14 Eksempel

Et kompakt Hausdorffrum X kaldes *kontraktibelt*, hvis der findes et $x_0 \in X$ og en kontinuert afbildning $\alpha\colon [0,1] \times X \to X$, så $\alpha(1,x) = x$ og $\alpha(0,x) = x_0$ for alle $x \in X$. Definér hertil *-homomorfier $\varphi_t\colon C(X) \to C(X)$, $t \in [0,1]$, ved $\varphi_t(f)(x) = f(\alpha(t,x))$. Så er $\varphi_1 = \mathrm{id}$, $\varphi_0(f)(x) = f(x_0)$, og afbildningerne $t \mapsto \varphi_t(f)$ er kontinuerte for alle $f \in C(X)$. Med andre ord, $\varphi_0 \sim_h \mathrm{id}$.

Definér $\varphi\colon C(X) \to \mathbb{C}$ og $\psi\colon \mathbb{C} \to C(X)$ ved $\varphi(f) = f(x_0)$ og $\psi(\alpha) = \alpha \cdot 1$. Så er $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ og $\psi \circ \varphi = \varphi_0$, hvilket viser, at

$$C(X) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} C(X)$$

er en homotopi. Det følger derfor fra Sætning 3.8 (ii) og Eksempel 3.10, at $K_{00}(C(X)) \cong K_{00}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$. Vi har mere konkret, at afbildningen $\dim\colon K_{00}(C(X)) \to \mathbb{Z}$ er en isomorfi for kontraktible rum X. Dette skyldes, at diagrammet

$$\begin{tikzcd} K_{00}\big(C(X)\big) \arrow[rr, "\dim"] \arrow[dr, "K_{00}(\varphi)"'] & & \mathbb{Z} \\ & K_{00}(\mathbb{C}) \arrow[ur, "K_{00}(\mathrm{Tr})"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer, og $K_{00}(\varphi)$ og $K_{00}(\mathrm{Tr})$ er isomorfier.

3.15 Opgave

Vis, at $K_{00}(A)$ er en tællelig abelsk gruppe, hvis A er en separabel C^*-algebra.

3.16 Opgave

Vis, at hvis X er et totalt usammenhængende, lokalkompakt Hausdorffrum, så er

$$K_{00}(C_0(X)) \cong C_0(X, \mathbb{Z}).$$