4 Om gruppen $K_0(A)$

4.1 Definition af K_0

Lad A være en C^*-algebra, og betragt hertil den split-ekstakte følge,

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

som fremkommer ved at tilføje en enhed til A.

Vi definerer da

$$K_0(A) = \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi)).$$

Bemærk, at $K_0(A)$ således er en undergruppe af $K_{00}(\tilde{A})$ og dermed er en abelsk gruppe.

Det følger umiddelbart af Sætning 3.6, at $\mathrm{Im}(\iota) \subseteq \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi))$. Sæt

$$\omega_A \colon K_{00}(A) \to K_0(A), \qquad \omega_A(g) = K_{00}(\iota)(g) \in \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi)),$$

i.e. ω_A er *ko-restriktionen* af $K_{00}(\pi)$ til delmængden $K_0(A)$ af dens sekundærmængde $K_{00}(A)$.

Definer også afbildningen

$$[\,\cdot\,]_0 \colon P_\infty(A) \to K_0(A), \qquad [p]_0 = \omega_A([p]_{00}).$$

Det bemærkes, at mængden $\{[p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A)\}$ generelt ikke er lig med $K_0(A)$, jvf. Eksempel 4.5 nedenfor.

Vi skal nedenfor vise, at $\omega_A \colon K_{00}(A) \to A$ er en *isomorfi*, når A er unital.

To elementer x og y i en C^*-algebra, som opfylder $xy = xy^* = x^*y = x^*y^* = 0$, kaldes *indbyrdes ortogonale*, hvilket skrives $x \perp y$. To *-homomorfier $\varphi, \psi \colon A \to B$ kaldes *indbyrdes ortogonale*, i symboler $\varphi \perp \psi$, hvis $\varphi(x) \perp \psi(y)$ for alle $x, y \in A$.

4.2 Lemma

Hvis $\varphi, \psi \colon A \to B$ er indbyrdes ortogonale *-homomorfier, så er $\varphi + \psi \colon A \to B$ en *-homomorfi, og $K_{00}(\varphi + \psi) = K_{00}(\varphi) + K_{00}(\psi)$.

Bevis: Det er klart, at $\varphi + \psi$ er en *-homomorfi. Det ses endvidere let, at $\varphi_n \perp \psi_n$, hvor $\varphi_n, \psi_n \colon M_n(A) \to M_n(B)$ er induceret af φ og ψ. Endelig er $(\varphi + \psi)_n = \varphi_n + \psi_n$. Dette giver for $p \in P_n(A)$:

$$\begin{aligned} K_{00}(\varphi+\psi)([p]_{00}) &= [(\varphi+\psi)_n(p)]_{00} = [\varphi_n(p)+\psi_n(p)]_{00} \\ &= [\varphi_n(p)]_{00} + [\psi_n(p)]_{00} \\ &= K_{00}(\varphi)([p]_{00}) + K_{00}(\psi)([p]_{00}). \end{aligned}$$

□

4.3 Lemma

Lad A være en C^*-algebra og betragt igen den split-eksakte følge $(\star)$ fra Definition 4.1.

(i) Der gælder generelt, at $\mathrm{Im}(K_{00}(\iota)) \subseteq \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi))$, og $K_{00}(\pi)$ er surjektiv.

(ii) Hvis A har en enhed, så inducerer $(\star)$ en split-eksakt følge

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_{00}(A) \arrow[r, "K_{00}(\iota)"] & K_{00}(\tilde{A}) \arrow[r, shift left, "K_{00}(\pi)"] & K_{00}(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left, "K_{00}(\lambda)"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Bevis: (i) er en umiddelbar følge af Sætning 3.6, idet $\pi \circ \iota = 0$ og $\pi \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

(ii). Lad $e \in A$ være enheden i A. Så er $\tilde{A} = A + \mathbb{C}(1-e)$, og vi kan definere *-homomorfierne $\mu\colon \tilde{A} \to A$ ved $\mu(a+\alpha(1-e)) = a$ og $\lambda'\colon \mathbb{C} \to \tilde{A}$ ved $\lambda'(\alpha) = \alpha(1-e)$. Idet $\iota \circ \mu \perp \lambda' \circ \pi$ og

$$\mathrm{id}_A = \mu \circ \iota, \qquad \mathrm{id}_{\tilde{A}} = \iota \circ \mu + \lambda' \circ \pi,$$

giver Sætning 3.6, at $K_{00}(\iota)$ er injektiv, og fra Lemma 4.2 fås

$$\mathrm{id}_{K_{00}(\tilde{A})} = K_{00}(\iota) \circ K_{00}(\mu) + K_{00}(\lambda') \circ K_{00}(\pi),$$

som implicerer $\mathrm{Ker}(K_{00}(\pi)) \subseteq \mathrm{Im}(K_{00}(\iota))$. □

4.4 Standardbillede af K_0 i det unitale tilfælde

Hvis A har enhed, så er $K_{00}(A) \cong K_0(A)$, $\omega_A\colon K_{00}(A) \to K_0(A)$ er en isomorfi, og

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 \mid p, q \in P_\infty(A)\}.$$

Generelt (uanset om A har enhed eller ej) gælder

(i) $p, q \in P_\infty(A) : [p \oplus q]_0 = [p]_{00} + [q]_0$,

(ii) $[0]_0 = 0$ (hvor 0 er nulprojektionen i A),

(iii) $p, q \in P_n(A) : p \sim_h q \Rightarrow [p]_0 = [q]_0$,

(iv) $p, q \in P_n(A) : p \perp q \Rightarrow [p+q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.

Hvis A har enhed, så har vi endvidere

(v) $p, q \in P_\infty(A) : [p]_0 = [q]_0 \iff p \sim_s q$ (i betydningen, at $p \oplus r \sim q \oplus r$ i $P_\infty(A)$ for et $r \in P_\infty(A)$.

(vi) Hvis G er en abelsk gruppe, og hvis $\nu\colon P_\infty(A) \to G$ er en afbildning, som opfylder

(a) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$,

(b) $\nu(0) = 0$ (hvor 0 er nulprojektionen i A),

(c) $p, q \in P_n(A) : p \sim_h q \Rightarrow \nu(p) = \nu(q)$,

så findes netop en gruppehomomorfi $\alpha\colon K_0(A) \to G$, som giver et kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd} & P_\infty(A) \arrow[dl, "{[\,\cdot\,]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(A) \arrow[rr, "\alpha"] & & G \end{tikzcd}$$

Bevis: Det følger af Lemma 4.3 (ii), at ω_A er en isomorfi, når A har enhed. De indledende påstande følger af dette, og af standardbilledet af $K_{00}(A)$. Påstandene (i) – (iv) ses ved at benytte $[\,\cdot\,]_0 = \omega_A \circ [\,\cdot\,]_{00}$ og (i) – (iv) i Sætning 3.3.

Antag nu, at A har enhed.

(v). Implikationen "$\Leftarrow$" følger af, at hvis p og q er stabilt ækvivalente over A, så er de også stabilt ækvivalente over den større C^*-algebra $\tilde{A}$. Antag $[p]_0 = [q]_0$. Da ω_A er injektiv, får vi $[p]_{00} = [q]_{00}$, og Lemma 3.3 (v) giver dernæst, at p og q er stabilt ækvivalente i $P_\infty(\tilde{A})$. Dvs. der findes en projektion $r' \in P_\infty(\tilde{A})$, så $p \oplus r \sim q \oplus r$. Lad $\mu\colon \tilde{A} \to A$ være som i beviset for Lemma 4.3, og sæt $r = \mu(r') \in P_\infty(A)$. Da er $p \oplus r = \mu(p \oplus r') \sim \mu(q \oplus r') = q \oplus r$, som ønsket.

(vi). Sætning 3.4 giver en gruppehomomorfi $\alpha_{00}\colon K_{00}(A) \to G$, som opfylder $\alpha_{00} \circ [\,\cdot\,]_{00} = \nu$. Det ses, at $\alpha = \alpha_{00} \circ \omega_A^{-1}\colon K_0(A) \to G$ har den ønskede egenskab. Entydigheden af α skyldes, at $K_0(A)$ er genereret af billedet af $[\,\cdot\,]_0$, når A har enhed. $\square$

4.5 Eksempel

De to topologiske rum S^2 og $P(M_2(\mathbb{C}))$ er homeomorfe. Lad $e\colon S^2 \to P(M_2(\mathbb{C}))$ være en homeomorfi, og opfat e som et element i $P(C(S^2, M_2(\mathbb{C}))) = P_2(C(S^2))$. Vi skal se i Eksempel 11.13, at $K_{00}(C(S^2)) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, og mere konkret, at $K_{00}(C(S^2)) = \mathbb{Z}[1]_{00} + \mathbb{Z}[e]_{00}$.

Vi har $C_0(\mathbb{R}^2)^{\sim} \cong C(S^2)$ og får således en split-eksakt følge

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\ \iota\ } C(S^2) \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\ \pi\ }} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Da $K_{00}(C_0(\mathbb{R}^2)) = 0$ (jvf. Eksempel 3.12) og $K_{00}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ (jvf. Eksempel 3.10), konkluderer vi, at $\mathrm{Im}(K_{00}(\iota)) \neq \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi))$. (Se også Opgave 9.9.)

4.6 Definition

Lad $\varphi\colon A \to B$ være en *-homomorfi, og lad $\tilde{\varphi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$ være den inducerede *-homomorfi. Det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] & \tilde{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] & \mathbb{C} \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\iota"'] & \tilde{B} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

inducerer et kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd} K_{00}(A) \arrow[r, "K_{00}(\iota)"] \arrow[d, "K_{00}(\varphi)"] & K_{00}(\tilde{A}) \arrow[r, "K_{00}(\pi)"] \arrow[d, "K_{00}(\tilde{\varphi})"] & K_{00}(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\ K_{00}(B) \arrow[r, "K_{00}(\iota)"'] & K_{00}(\tilde{B}) \arrow[r, "K_{00}(\pi)"'] & K_{00}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Det ses specielt, at $K_{00}(\tilde{\varphi})(K_0(A)) \subseteq K_0(B)$. Lad $K_0(\varphi)\colon K_0(A) \to K_0(B)$ være restriktionen af afbildningen $K_{00}(\tilde{\varphi})$ til $K_0(A)$.

Bemærk, at $K_0(\varphi) \circ \omega_A = \omega_B \circ K_{00}(\varphi)$, og at $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$ for alle $p \in P_\infty(A)$.

4.7 Sætning (Funktorialitet af K_0)

K_0 er en funktor, idet der gælder

(i) $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$,

(ii) $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.

Endvidere gælder:

(iii) $K_0(0\colon A \to B) = 0\colon K_0(A) \to K_0(B)$.

Bevis: (i) og (ii) følger af (i) og (ii) i Sætning 3.6, idet $(\mathrm{id}_A)^\sim = \mathrm{id}_{\tilde{A}}$ og $(\psi \circ \varphi)^\sim = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}$. Hvis $\varphi\colon A \to B$ er nul-afbildningen, så er $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \lambda \circ \pi$ (med notationen fra Lemma 4.3), så $K_{00}(\tilde{\varphi}) = K_{00}(\tilde{\varphi}) \circ K_{00}(\lambda) \circ K_{00}(\pi)$, og restriktionen af denne afbildning til $\mathrm{Ker}(K_{00}(\pi))$ er nul. $\square$

Følgende sætning fås umiddelbart af Sætning 3.8 og Sætning 4.7.

4.8 Sætning (Homotopi-invarians)

(i) Hvis *-homomorfierne $\varphi, \psi\colon A \to B$ er homotope, så er $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Hvis C^*-algebraerne A og B er homotopiækvivalente, så er $K_0(A) \cong K_0(B)$. Mere konkret, hvis $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ er en homotopi, så er $K_0(\varphi)\colon K_0(A) \to K_0(B)$ og $K_0(\psi)\colon K_0(B) \to K_0(A)$ isomorfier og hinandens inverse.

4.9 Eksempel

Til en C^*-algebra A sættes

$$CA = \{f \in C([0,1], A) \mid f(0) = 0\}.$$

CA er en C^*-algebra, kaldet *keglen* over A. Der gælder $K_0(CA) = 0$, idet CA er homotopiækvivalent med C^*-algebraen 0. Thi lad $\varphi\colon CA \to 0$ og $\psi\colon 0 \to CA$ være nul-afbildningerne. Så er $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. Lad $\varphi_t\colon CA \to CA$ være givet ved $(\varphi_t(f))(s) = f(st)$, $s, t \in [0,1]$. Så er $t \mapsto \varphi_t(f)$ kontinuert for alle $f \in CA$, $\varphi_1 = \mathrm{id}$ og $\varphi_0 = \psi \circ \varphi = 0$.

Bemærk i øvrigt, at vi har en kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0,$$

hvor $SA = C_0((0,1), A) = \{f \in C([0,1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ er *suspensionen* over A, og hvor $\psi(f) = f(1)$. Der gælder følgelig, at $K_0(\iota) = 0$ og $K_0(\psi) = 0$.

4.10 Definition af skalarafbildningen

Med notationen fra Definition 4.1, sæt $s = \lambda \circ \pi\colon \tilde{A} \to \tilde{A}$. Bemærk, at $\pi \circ s = \pi$, at $s(\tilde{A}) = \mathbb{C} \cdot 1 \subseteq \tilde{A}$, og at $a - s(a) \in A$ for alle $a \in \tilde{A}$. Lad s_n (eller blot s) være den inducerede afbildning $M_n(\tilde{A}) \to M_n(\tilde{A})$, som således opfylder $\mathrm{Im}(s_n) = M_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\tilde{A})$ og $a - s_n(a) \in M_n(A)$ for alle $a \in M_n(\tilde{A})$.

4.11 Standardbillede af $K_0(A)$, når A ikke har enhed

(i) Ethvert element g i $K_0(A)$ kan skrives på formen $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$ for et $p \in P_\infty(\tilde{A})$, og vi får dermed

$$K_0(A) = \Big\{ [p]_{00} - [s(p)]_{00} \mid p \in P_\infty(\tilde{A}) \Big\}.$$

Hvis $p, q \in P_\infty(\tilde{A})$ og $p \sim q$, så er $[p]_{00} - [s(p)]_{00} = [q]_{00} - [s(q)]_{00}$.

(ii) Hvis $[p]_{00} - [s(p)]_{00} = 0$, så findes $q \in P_\infty(\mathbb{C}) \subseteq P_\infty(\tilde{A})$, så $p \oplus q \sim s(p \oplus q)$ $(= s(p) \oplus q)$.

(iii) Hvis $\varphi\colon A \to B$ er en *-homomorfi, så er

$$K_0(\varphi)([p]_{00} - [s(p)]_{00}) = [\tilde{\varphi}(p)]_{00} - [s(\tilde{\varphi}(p))]_{00}.$$

(iv) Hvis $\varphi\colon A \to B$ er en *-homomorfi og $g \in \mathrm{Ker}(K_0(\varphi))$, så findes $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_n(\tilde{A})$ og $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$ opfyldende

$$g = [p]_{00} - [s(p)]_{00} \quad \text{og} \quad u\tilde{\varphi}(p)u^* = s(\tilde{\varphi}(p)).$$

(v) Hvis $\varphi\colon A \to B$ er en surjektiv *-homomorfi og $g \in \mathrm{Ker}(K_0(\varphi))$, så findes $p \in P_\infty(\tilde{A})$, så $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$ og $\tilde{\varphi}(p) = s(\tilde{\varphi}(p))$.

Bevis: (i). Vi har $g = [e]_{00} - [f]_{00}$ for passende $e, f \in P_n(\tilde{A})$. Sæt

$$p = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1_n - f \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \in P_{2n}(\tilde{A}).$$

Så er $g = [p]_{00} - [q]_{00}$ og $q = s(q)$. Endvidere, da $K_{00}(\pi)(g) = 0$,

$$[s(p)]_{00} - [q]_{00} = [s(p)]_{00} - [s(q)]_{00} = K_{00}(s)(g) = (K_{00}(\lambda) \circ K_{00}(\pi))(g) = 0.$$

Dette giver $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$, som ønsket.

Hvis $p, q \in P_\infty(\tilde{A})$ og $p \sim q$, så er $s(p) \sim s(q)$ fordi $s\colon \tilde{A} \to \mathbb{C}$ er en *-homomorfi. Derfor er $[p]_{00} = [q]_{00}$ og $[s(p)]_{00} = [s(q)]_{00}$, og dette viser den sidste påstand i (i).

(ii). Hvis $[p]_{00} - [s(p)]_{00} = 0$, da er $p \sim_s s(p)$ ifølge Sætning 3.3 (v), så der findes et $r \in P_m(\tilde{A})$ med $p \oplus r \sim s(p) \oplus r$. Dermed er

$$\begin{aligned} p \oplus 1_m = p \oplus (r + (1_m - r)) &\sim p \oplus r \oplus (1_m - r) \\ &\sim s(p) \oplus r \oplus (1_m - r) \sim s(p) \oplus 1_m \end{aligned}$$

ved brug af Sætning 2.17.

(iii). følger af definitionerne 3.5, 4.6 og af identiteten $s \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ s$.

(iv). Antag $K_0(\varphi)(g) = 0$. Ifølge (i) og (iii) findes $p' \in P_\infty(\tilde{A})$ så $g = [p']_{00} - [s(p')]_{00}$ og

$$[\tilde{\varphi}(p')]_{00} - [s(\tilde{\varphi}(p'))]_{00} = 0.$$

Ifølge (ii) findes $q' \in P_\infty(\mathbb{C}) \subseteq P_\infty(\tilde{B})$, så $\tilde{\varphi}(p') \oplus q' \sim s(\tilde{\varphi}(p') \oplus q')$. Da $\tilde{\varphi}$ afbilder $P_\infty(\mathbb{C}) \subseteq P_\infty(\tilde{A})$ isomorft på $P_\infty(\mathbb{C}) \subseteq P_\infty(\tilde{B})$, findes $q \in P_\infty(\mathbb{C}) \subseteq P_\infty(\tilde{A})$ så $\tilde{\varphi}(q) = q'$. Sæt $p_1 = p' \oplus q$. Så er $g = [p_1]_{00} - [s(p_1)]_{00}$ og

$$\tilde{\varphi}(p_1) = \tilde{\varphi}(p') \oplus q' \sim s(\tilde{\varphi}(p') \oplus q') = s(\tilde{\varphi}(p_1)).$$

Vi har $p_1 \in P_{n_1}(\tilde{A})$ for et $n_1 \in \mathbb{N}$. Sæt $n = 2n_1$ og sæt $p = \left(\begin{smallmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in P_n(\tilde{A})$. Det følger så fra Sætning 2.14, at $u\tilde{\varphi}(p)u^* = s(\tilde{\varphi}(p))$ for et $u \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{B}))$.

(v). Ifølge (iv) findes $n \in \mathbb{N}$, $p' \in P_n(\tilde{A})$ og $u \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{B}))$, så $g = [p']_{00} - [s(p')]_{00}$ og $u\tilde{\varphi}(p')u^* = s(\tilde{\varphi}(p'))$. Benyt Lemma 2.4 til at finde $v \in \mathcal{U}(M_{2n}(\tilde{A}))$ så $\tilde{\varphi}(v) = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{smallmatrix}\right)$. Sæt $p = v\left(\begin{smallmatrix} p' & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)v^*$. Der gælder

$$\tilde{\varphi}(p) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(p') & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(\tilde{\varphi}(p')) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Det følger, at $s(\tilde{\varphi}(p)) = \tilde{\varphi}(p)$. Videre har vi

$$[p]_{00} = [p']_{00}, \quad [s(p)]_{00} = [s(v) \begin{pmatrix} s(p') & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s(v)^*]_{00} = [s(p')]_{00},$$

så $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$. □

4.12 Lemma

Lad

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

være en kort-eksakt følge af C^*-algebraer. Da gælder:

(i) Afbildningerne $\tilde{\varphi}_n \colon M_n(\tilde{I}) \to M_n(\tilde{A})$ er injektive for alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $a \in \mathrm{Im}(\tilde{\varphi}_n)$ hvis og kun hvis $\tilde{\psi}_n(a) = s(\tilde{\psi}_n(a))$,

(iii) $s(\tilde{\varphi}_n(x)) = \tilde{\varphi}_n(s(x))$ for alle $x \in M_n(\tilde{I})$.

Bevis: Øvelse! □

4.13 Sætning (Halv-eksakthed)

Enhver kort-eksakt følge af C^*-algebraer

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

inducerer en eksakt følge

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B),$$

dvs. $\mathrm{Im}(K_0(\varphi)) = \mathrm{Ker}(K_0(\psi))$.

Bevis: Da $\psi \circ \varphi = 0$ giver Sætning 4.7, at $K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = 0$, hvorfor $\mathrm{Im}(K_0(\varphi)) \subseteq \mathrm{Ker}(K_0(\psi))$.

Antag omvendt, at $g \in \mathrm{Ker}(K_0(\psi))$. Så findes ifølge Sætning 4.11 (v) et $p \in P_n(\tilde{A})$, så $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$ og $\tilde{\psi}(p) = s(\tilde{\psi}(p))$. Ifølge Lemma 4.12 findes $e \in M_n(\tilde{I})$, så $\tilde{\varphi}(e) = p$ og $\tilde{\varphi}(s(e)) = s(\tilde{\varphi}(e)) = s(p)$, og da $\tilde{\varphi}$ er injektiv, er e en projektion. Vi har derfor

$$K_0(\varphi)([e]_{00} - [s(e)]_{00}) = [\tilde{\varphi}(e)]_{00} - [\tilde{\varphi}(s(e))]_{00} = g.$$

Dette viser, at $\mathrm{Ker}(K_0(\psi)) \subseteq \mathrm{Im}(K_0(\varphi))$. $\square$

4.14 Sætning (Split-eksakthed)

Enhver split-eksakt følge af C^*-algebraer

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \underset{\tau}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

inducerer en split-eksakt følge

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \underset{K_0(\tau)}{\overset{K_0(\psi)}{\rightleftarrows}} K_0(B) \longrightarrow 0$$

Bevis: Da $\psi \circ \tau = \mathrm{id}_B$, får vi $\mathrm{id}_{K_0(B)} = K_0(\psi) \circ K_0(\tau)$, og $K_0(\psi)$ er surjektiv. Givet Sætning 4.13 mangler vi kun at vise, at $K_0(\varphi)$ er injektiv.

Antag $g \in \mathrm{Ker}(K_0(\varphi))$. Ifølge Sætning 4.11 (iv) findes $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_n(\tilde{I})$ og $u \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{A}))$, så $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$ og $u\tilde{\varphi}(p)u^* = \tilde{\varphi}(s(p))$. Sæt $v = (\tilde{\tau} \circ \tilde{\psi})(u^*)u \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{A}))$. Så er $\tilde{\psi}(v) = 1$, hvilket medfører, at $\tilde{\varphi}(w) = v$ for et $w \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{I}))$. Bemærk, at

$(\tilde{\tau} \circ \tilde{\psi})(\tilde{\varphi}(p)) = \tilde{\varphi}(s(p))$. Vi har derfor

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(wpw^*) &= v\tilde{\varphi}(p)v^* = (\tilde{\tau} \circ \tilde{\psi})(u^*)\tilde{\varphi}(s(p))(\tilde{\tau} \circ \tilde{\psi})(u)) \\ &= (\tilde{\tau} \circ \tilde{\psi})(u^*\tilde{\varphi}(s(p))u) = (\tilde{\tau} \circ \tilde{\psi})(\tilde{\varphi}(p)) = \tilde{\varphi}(s(p)),\end{aligned}$$

og da $\tilde{\varphi}$ er injektiv, følger $wpw^* = s(p)$. Dermed er $p \sim_u s(p)$ i $M_n(\tilde{I})$, så $g = 0$. □

Split-eksakthed kan alternativt vises ved at benytte den lang-eksakte følge i K-teori, som vil blive udviklet senere i noterne. Se Opgave 9.10.

4.15 Sætning

For ethvert par af C^*-algebraer A og B gælder

$$K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B).$$

Mere konkret, hvis $\iota_A \colon A \to A \oplus B$ og $\iota_B \colon B \to A \oplus B$ er de kanoniske inklusionsafbildninger, så er afbildningen

$$\begin{aligned}K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B) \colon K_0(A) \oplus K_0(B) &\to K_0(A \oplus B), \\ (g, h) &\mapsto K_0(\iota_A)(g) + K_0(\iota_B)(h)\end{aligned}$$

en isomorfi.

Bevis: Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & K_0(A) \oplus K_0(B) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)"] & K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\iota_A)"'] & K_0(A \oplus B) \arrow[r, "K_0(\pi_B)"'] & K_0(B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

hvor $j(g) = (g, 0)$, $p((g, h)) = h$, og hvor $\pi_B \colon A \oplus B \to B$ er afbildningen $(a, b) \mapsto b$. Rækkerne i dette diagram er eksakte (ifølge Sætning 4.14), og da $\pi_B \circ \iota_A = 0$ og $\pi_B \circ \iota_B = \mathrm{id}_B$ ses det, at diagrammet kommuterer. En elementær diagramjagt giver således, at $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)$ er en isomorfi. □

4.16 Sætning (Stabilitet af K_0)

Lad A være en C^*-algebra og lad $n \in \mathbb{N}$. Definér

$$\lambda_{n,A} \colon A \to M_n(A), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da er $K_0(\lambda_{n,A}) \colon K_0(A) \to K_0(M_n(A))$ en isomorfi.

Beviset er givet i Opgave 4.22 nedenfor.

4.17 Eksempel

Det følger af Sætning 4.14, at $K_0(\tilde{A}) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$ for alle C^*-algebraer A.

4.18 Eksempel

Betragt følgen

$$0 \longrightarrow C_0((0,1)) \xrightarrow{\iota} C([0,1]) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

fra 1.4. Det følger af Sætning 4.15, at $K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}^2$, og fra Eksempel 3.14 ser vi, at $K_0(C([0,1])) \cong \mathbb{Z}$. Derfor er $K_0(\pi)$ ikke surjektiv.

4.19 Eksempel

Lad H være et separabelt uendelig-dimensionalt Hilbertrum, og lad $\mathcal{K}$ være det lukkede to-sidede ideal i $B(H)$ af de kompakte operatorer. Så har vi en kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} B(H)/\mathcal{K} \longrightarrow 0.$$

Fra Eksempel 3.11 har vi $K_0(B(H)) = 0$. Det vises i Sætning 9.6, at $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$. Derfor er $K_0(\iota)$ ikke injektiv.

4.20 Opgave

Vis, at $K_0(A)$ er en tællelig abelsk gruppe, hvis A er en separabel C^*-algebra. (Se Opgave 3.15.)

4.21 Opgave

Lad A være en C^*-algebra, og lad $\mathrm{Aut}(A)$ være gruppen af automorfier på A.

(i) Lad $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$. Vis, at afbildningen $a \mapsto uau^*$ definerer en automorfi $\mathrm{Ad}\,u \colon A \to A$.

(ii) Vis, at afbildningen $u \mapsto \mathrm{Ad}u$ er en gruppehomomorfi $\mathcal{U}(\tilde{A}) \to \mathrm{Aut}(A)$.

Sæt $\mathrm{Inn}(A) = \{\mathrm{Ad}u \mid u \in \mathcal{U}(\tilde{A})\}$. Elementerne i $\mathrm{Inn}(A)$ kaldes *indre automorfier.*

(iii) Vis, at $\mathrm{Inn}(A) \lhd \mathrm{Aut}(A)$.

(iv) Hvis A har enhed, så er enhver indre automorfi α lig med $\mathrm{Ad}u$ for en passende unitær u i A.

(v) Vis, at $K_0(\alpha) = \mathrm{id}$ for alle $\alpha \in \mathrm{Inn}(A)$.

Et element $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ kaldes *approksimativt indre*, hvis der til enhver endelig delmængde F af A og ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\beta \in \mathrm{Inn}(A)$, så $\|\alpha(a) - \beta(a)\| < \varepsilon$ for alle $a \in F$. (Hvis A er separabel, er dette ækvivalent med, at der findes en følge $\{\alpha_n\}$ i $\mathrm{Inn}(A)$, så $\alpha_n \to \alpha$ punktvis (dvs. $\forall a \in A : \alpha_n(a) \to \alpha(a)$).) Mængden af approksimativt indre automorfier benævnes $\overline{\mathrm{Inn}(A)}$.

(vi) Vis, at $\overline{\mathrm{Inn}(A)} \lhd \mathrm{Aut}(A)$.

(vii) Vis, at $K_0(\alpha) = \mathrm{id}$ for alle $\alpha \in \overline{\mathrm{Inn}(A)}$.

(viii) Vis, at $K_0(\alpha) \in \mathrm{Aut}(K_0(A))$ for alle $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$.

(ix) Vis, at afbildningen $\alpha \mapsto K_0(\alpha)$ er en gruppehomomorfi $\mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{Aut}(K_0(A))$.

(x) Giv et eksempel på A og $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$, så $K_0(\alpha) \neq \mathrm{id}$. (Vink: Prøv med $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.)

4.22 Opgave

Formålet med denne opgave er at vise Sætning 4.16.

(i) Gør rede for, at

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,A}"'] & \tilde{A} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\lambda_{n,\tilde{A}}"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_n(A) \arrow[r] & M_n(\tilde{A}) \arrow[r, "s_n"] & M_n(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

er et kommuterende diagram med spliteksakte rækker og (dermed), at

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,A})"'] & K_0(\tilde{A}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\tilde{A}})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(M_n(A)) \arrow[r] & K_0(M_n(\tilde{A})) \arrow[r] & K_0(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

er et kommuterende diagram med eksakte rækker.

Vis, at $K_0(\lambda_{n,\tilde{A}})$ er en isomorfi, hvis $K_0(\lambda_{n,\tilde{A}})$ og $K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})$ er det. Konkludér, at det er nok at vise sætningen i tilfældet, hvor A er unital.

Bemærk, at $M_k(M_n(A)) \cong M_{kn}(A)$. Denne isomorfi kan opnås ved at slette et passende udvalg af paranteser. Vi tager os den frihed at identificere disse to matrix-algebraer.

Lad i det følgende A være en unital C^*-algebra.

(ii) Begrund, at hvis B er en unital C^*-algebra, hvis $m, l \in \mathbb{N}$, og hvis p er en projektion i $M_l(B)$, så er $\lambda_{m,M_l(B)}(p) \sim p$ i $P_\infty(B)$.

(iii) Lad $n, k \in \mathbb{N}$. Betragt *-homomorfierne

$$(\lambda_{n,A})_k \colon M_k(A) \to M_k(M_n(A)) \;\; (= M_{kn}(A)),$$
$$\lambda_{n,M_k(A)} \colon M_k(A) \to M_n(M_k(A)) \;\; (= M_{kn}(A)),$$

hvor $(\lambda_{n,A})_k$ er induceret af $\lambda_{n,A} \colon A \to M_n(A)$. Vis, at der findes en unitær $u \in M_{kn}(A)$, så

$$(\lambda_{n,A})_k = \mathrm{Ad}u \circ \lambda_{n,M_k(A)}.$$

(iv) Lad $p \in P_k(A)$. Benyt (ii) og (iii) til at vise, at $p \sim (\lambda_{n,A})_k(p)$ i $P_\infty(A)$.

(v) Benyt (iv) til at vise, at $K_0(\lambda_{n,A})$ er surjektiv.

(vi) Antag $K_0(\lambda_{n,A})(g) = 0$. Benyt bl.a. (iv) til at vise, at der findes $k \in \mathbb{N}$ og $p, q \in P_k(A)$ således, at $g = [p]_0 - [q]_0$ og $\lambda_{n,A}(p) \sim \lambda_{n,A}(q)$ i $M_{nk}(A)$. Benyt herefter (iv) igen til at vise, at $p \sim q$ i $M_k(A)$. Konkluder, at $K_0(\lambda_{n,A})$ er injektiv.