6 Induktive grænser

6.1 Produkt og sum

Til enhver familie $\{A_i\}_{i\in I}$ af C^*-algebraer knytter vi to C^*-algebraer $\prod_{i\in I} A_i$ og $\sum_{i\in I} A_i$. Sæt $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ (som mængde). Lad $\prod_{i\in I} A_i$ være mængden af alle funktioner $a\colon I \to X$, som opfylder $a(i) \in A_i$ for alle $i \in I$ og

$$\|a\| \overset{\text{def}}{=} \sup\{\|a(i)\|_{A_i} \mid i \in I\} < \infty.$$

Udstyr $\prod A_i$ med punktvis defineret skalarmultiplikation, addition, multiplikation og involution. Så er $\prod A_i$ en C^*-algebra.

Lad os checke nogle af aksiomerne. Benyt notationen $(a_i)_{i\in I}$ eller blot (a_i) for elementet $a \in \prod A_i$, hvor $a(i) = a_i$. Bemærk, at $\|a_i\| \leqslant \|a\|$ for alle $i \in I$.

Vi har

$$\|(a+b)_i\| = \|a_i + b_i\| \leqslant \|a_i\| + \|b_i\| \leqslant \|a\| + \|b\|$$

for alle $i \in I$, hvilket giver $\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$.

Det følger af

$$\|(a^*a)_i\| = \|a_i^* a_i\| = \|a_i\|^2,$$

at $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Lad $\{a_n\}$ være en Cauchy-følge i $\prod A_i$. Så er $\{a_n(i)\}_{n=1}^\infty$ en Cauchy-følge i A_i for ethvert $i \in I$. Der findes derfor $a(i) \in A_i$ så $a_n(i) \to a(i)$. Vælg $\varepsilon > 0$ og find $n_0 \in \mathbb{N}$ så $\|a_n - a_m\| \leqslant \varepsilon$ for $n, m \geqslant n_0$. Da gælder for alle $n \geqslant n_0$ og alle $i \in I$,

$$\|a_n(i) - a(i)\| = \lim_{m\to\infty} \|a_n(i) - a_m(i)\| \leqslant \varepsilon.$$

Heraf ses specielt, at $\|a(i)\| \leqslant \|a_{n_0}(i)\| + \varepsilon$ for alle $i \in I$, hvilket giver $\|a\| \leqslant \|a_{n_0}\| + \varepsilon < \infty$. Deraf fås $a \in \prod A_i$. Det ses yderligere, at $\|a_n - a\| \leqslant \varepsilon$ for alle $n \geqslant n_0$. Det er dermed vist, at $a_n \to a$, så $\prod_{i\in I} A_i$ er fuldstændig.

Lad $\sum_{i\in I} A_i$ være afslutningen af det algebraiske ideal

$$\mathcal{I} = \Big\{a \in \prod_{i\in I} A_i \mid a(i) = 0 \text{ for alle på nær endelig mange } i \in I\Big\}.$$

Da er $\sum A_i$ et lukket tosidet ideal i $\prod A_i$ og dermed specielt C^*-algebra. Lad

$$\pi\colon \prod A_i \to \prod A_i / \sum A_i$$

være kvotientafbildningen.

Hvis $I = \mathbb{N}$ og $a \in \prod A_n$, så er

$$\|\pi(a)\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|.$$

Dette kan ses ved at benytte, at $\|\pi(a)\| = \inf\{\|a-b\| \mid b \in \mathcal{I}\}$, jvf. (1.3) og kontinuitet af afbildningen $b \mapsto \|a-b\|$. Vi får specielt, at $a \in \sum A_n$ hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$.

6.2 Definition

Ved en *induktiv følge af C^*-algebraer* forstås en følge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ af C^*-algebraer udstyret med en følge af *-homomorfier $\varphi_n\colon A_n \to A_{n+1}$. Til en sådan følge defineres *-homomorfierne

$$\varphi_{n,m} = \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \cdots \circ \varphi_n \colon A_n \to A_m$$

for alle $n, m \in \mathbb{N}$, hvor $m > n$. Det kan være bekvemt at sætte $\varphi_{n,n} = \mathrm{id}_{A_n}$ og $\varphi_{n,m} = 0$ for $m < n$. *-homomorfierne φ_n kaldes de *forbindende *-homomorfier* hørende til følgen.

6.3 Sætning

Til enhver induktiv følge af C^*-algebraer

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

findes en C^*-algebra A og *-homomorfier $\mu_n\colon A_n \to A$, som opfylder

(i) diagrammerne

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

kommuterer, dvs. $\mu_n = \mu_{n+1} \circ \varphi_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$,

(iii) $\mathrm{Ker}(\mu_n) = \big\{a \in A_n \big| \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{n,m}(a)\| = 0\big\}$.

Bevis: Lad

$$\pi\colon \prod_{n=1}^{\infty} A_n \to \prod_{n=1}^{\infty} A_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

være som i (6.1). Definér *-homomorfier $\lambda_n\colon A_n \to \prod_{m=1}^{\infty} A_m$ ved $(\lambda_n(a))(m) = \varphi_{n,m}(a)$. Sæt $\mu_n = \pi \circ \lambda_n$ og sæt

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n\,(A_n)}.$$

Idet $\mu_1(A_1) \subseteq \mu_2(A_2) \subseteq \mu_3(A_3) \subseteq \cdots$, ses det, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)$ er en *-algebra. Det følger heraf, at A er en C^*-algebra.

(i). For alle $a \in A_n$ gælder

$$\big(\lambda_n(a) - (\lambda_{n+1} \circ \varphi_n)(a)\big)(m) = \varphi_{n,m}(a) - \big(\varphi_{n+1,m} \circ \varphi_n\big)(a) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m \neq n \\ a & \text{hvis } m = n \end{cases}.$$

Heraf ses $\lambda_n(a) - (\lambda_{n+1} \circ \varphi_n)(a) \in \sum_{n=1}^{\infty} A_m$, så

$$\mu_n(a) - (\mu_{n+1} \circ \varphi_n)(a) = \pi(\lambda_n(a) - (\lambda_{n+1} \circ \varphi_n)(a)) = 0.$$

(ii) følger af definitionen af A.

(iii). Fra (6.1) ser vi, at $\mu_n(a) = 0$, hvis og kun hvis

$$\limsup_{m\to\infty} \|\varphi_{n,m}(a)\| = 0.$$

□

6.4 Definition

C^*-algebraen A, med de tilhørende *-homomorfier $\mu_n\colon A_n \to A$ konstrueret i Sætning 6.3, kaldes den *induktive grænse* af følgen $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$, og den benævnes $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ eller blot $\varinjlim A_n$.

Vi vil af og til benytte skrivemåden

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \longrightarrow A\,,$$

som implicit indeholder afbildningerne $\mu_n\colon A_n \to A$.

Den induktive grænse er essentielt entydig i følgende betydning:

6.5 Sætning (Den universelle egenskab)

Lad $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$ være en følge af C^*-algebraer med induktiv grænse $A = \varinjlim A_n$ og tilhørende *-homomorfier $\mu_n \colon A_n \to A$.

Antag B er en C^*-algebra, og at $\lambda_n \colon A_n \to B$ er *-homomorfier, som opfylder $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Så findes netop én *-homomorfi $\lambda \colon A \to B$, som får diagrammerne

$$
\begin{tikzcd}
 & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\
A \arrow[rr, "\lambda"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

til at kommutere for alle $n \in \mathbb{N}$.

Det gælder videre, at λ er injektiv, hvis og kun hvis

$$\operatorname{Ker}(\lambda_n) = \operatorname{Ker}(\mu_n) \ \Big(= \{a \in A_n \mid \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{n,m}(a)\| = 0\} \Big)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$, og λ er surjektiv, hvis og kun hvis $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$.

Bevis: Øvelse! Begynd med at vise, at

$$\{a \in A_n \mid \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{n,m}(a)\| = 0\} \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda_n).$$

□

6.6 Den induktive grænse af abelske grupper

Den induktive grænse, $\varinjlim G_n = G$, af en følge $G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \xrightarrow{\alpha_3} \cdots$ af abelske grupper er en abelsk gruppe med gruppehomomorfier $\beta_n \colon G_n \to G$, som opfylder

(i) $\beta_n = \beta_{n+1} \circ \alpha_n$,

(ii) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n)$,

(iii) $\operatorname{Ker}(\beta_n) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \operatorname{Ker}(\alpha_{n,m})$, hvor $\alpha_{n,m} = \alpha_{m-1} \circ \cdots \circ \alpha_{n+1} \circ \alpha_n$.

Hvis grupperne G_n er ordnede, og gruppehomomorfierne α_n er positive (dvs. $\alpha_n(G_n^+) \subseteq G_{n+1}^+$), så kan G ordnes ved $G^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n^+)$, og alle gruppehomomorfierne β_n bliver således positive.

Eksistensen af G kan f.eks. vises på samme måde som beviset for Sætning 6.3.

Gruppen G (sammen med homomorfierne $\beta_n \colon G_n \to G$) er entydigt bestemt ved (i), (ii) og (iii) på følgende måde. Hvis H er en abelsk gruppe og $\gamma_n \colon G_n \to H$ er homomorfier, så $\gamma_n = \gamma_{n+1} \circ \alpha_n$ for alle n, så findes netop én homomorfi $\gamma\colon G \to H$, så $\gamma \circ \beta_n = \gamma_n$ for alle n. Homomorfien γ er injektiv, hvis og kun hvis

$$\mathrm{Ker}(\gamma_n) = \mathrm{Ker}(\beta_n) \ (= \bigcup_{m=n}^{\infty} \mathrm{Ker}(\alpha_{n,m}))$$

for alle $n \in \mathbb{N}$, og γ er surjektiv, hvis og kun hvis $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G_n)$.

6.7 Sætning (Kontinuitet af K_0)

For enhver følge af C^*-algebraer

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

har vi

$$K_0(\varinjlim A_n) \cong \varinjlim K_0(A_n)$$

(som ordnede abelske grupper).

Mere konkret, hvis $\beta_n\colon K_0(A_n) \to \varinjlim K_0(A_m)$ og $\mu_n\colon A_n \to \varinjlim A_m$ er morfierne hørende til de induktive grænser, så findes en ordensisomorfi $\gamma\colon \varinjlim K_0(A_n) \to K_0(\varinjlim A_n)$, som giver et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} & K_0(A_m) \arrow[dl, "\beta_m"'] \arrow[dr, "K_0(\mu_m)"] & \\ \varinjlim K_0(A_n) \arrow[rr, "\gamma"'] & & K_0(\varinjlim A_n) \end{tikzcd}$$

for alle $m \in \mathbb{N}$.

Det følger specielt heraf, at

$$(\star) \qquad K_0\left(\varinjlim A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\left(K_0(\mu_n)\right),$$

$$(\star\star) \qquad K_0\left(\varinjlim A_n\right)^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)\left(K_0(A_n)^+\right).$$

Endvidere, hvis $g \in K_0(A_n)$ og $h \in K_0(A_m)$, så er $K_0(\mu_n)(g) = K_0(\mu_m)(h)$ hvis og kun hvis der findes et $l \geqslant \max\{n, m\}$, således at $K_0(\varphi_{n,l})(g) = K_0(\varphi_{m,l})(h)$ i $K_0(A_l)$.

Bevis: For at gøre beviset lidt mere overskueligt viser vi kun sætningen i tilfældet, hvor de forbindende homomorfier $\varphi_n \colon A_n \to A_{n+1}$ alle er injektive.

De forbindende homomorfier i følgen

$$K_0(A_1) \to K_0(A_2) \to K_0(A_3) \to \cdots$$

er givet ved $K_0(\varphi_n)$. Idet $K_0(\mu_n) = K_0(\mu_{n+1}) \circ K_0(\varphi_n)$ følger det af universielle egenskab for induktive grænser af abelske grupper, se (6.6), at der findes en gruppehomomorfi $\gamma \colon \varinjlim K_0(A_n) \to K_0(\varinjlim A_n)$, som opfylder $\gamma \circ \beta_n = K_0(\mu_n)$.

Antag $g \in K_0(\varinjlim A_m)$, at $g' \in K_0(A_n)$, og at $K_0(\mu_n)(g') = 0$. Vi viser, at $g \in \mathrm{Im}(K_0(\mu_m))$ og at $g' \in \mathrm{Ker}(K_0(\varphi_{m,n}))$ for et passende $m \geqslant n$.

Benyt (4.11) til at finde et $k \in \mathbb{N}$ og projektioner $p \in M_k((\varinjlim A_m)^\sim)$ og $p' \in M_k(A_n^\sim)$, så

$$g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}\ , \quad g' = [p']_{00} - [s(p')]_{00}\ , \quad \tilde{\mu}_n(p') \sim \tilde{\mu}_n(s(p')).$$

Vi har $M_k((\varinjlim A_m)^\sim)$ $(= B)$ er (isomorf med) den induktive grænse af følgen

$$M_k(\tilde{A}_1) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} M_k(\tilde{A}_2) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} M_k(\tilde{A}_3) \longrightarrow \cdots\ ,$$

og at $(B_0 =) \bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{\mu}_m(M_k(\tilde{A}_m))$ er en tæt del-*-algebra af B, som er lukket under kontinuert funktionskalkyle.

Sætning 2.18 giver, at $\tilde{\mu}_n(p') \sim \tilde{\mu}_n(s(p'))$ i B_0. Vi kan derfor finde $m \geqslant n$ og $v \in M_k(\tilde{A}_m)$, så $\tilde{\mu}_n(p') = \tilde{\mu}_m(v)^* \tilde{\mu}_m(v)$ og $\tilde{\mu}_n(s(p')) = \tilde{\mu}_m(v)\tilde{\mu}_m(v)^*$. Da de forbindende homomorfier φ_n er antaget at være injektive, er $\tilde{\mu}_m$ ligeledes injektiv (se Opgave 6.8 (iii)). Derfor er v en partiel isometri, $v^*v = \tilde{\varphi}_{n,m}(p')$ og $vv^* = \tilde{\varphi}_{n,m}(s(p'))$. Dette viser, at $g' \in \mathrm{Ker}(K_0(\varphi_{n,m}))$.

Sætning 2.18 giver ligeledes, at der findes en projektion $q \in B_0$, så $p \sim q$. Det følger, at $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00} = [q]_{00} - [s(q)]_{00}$. Der findes $m \in \mathbb{N}$ og $r \in M_k(\tilde{A}_m)$, så $\tilde{\mu}_m(r) = q$. Da $\tilde{\mu}_m$ er injektiv, er r en projektion, og

$$g = [\tilde{\mu}_m(r)]_{00} - [\tilde{\mu}_m(s(r))]_{00} = K_0(\mu_m)([r]_{00} - [s(r)]_{00}) \in \mathrm{Im}(K_0(\mu_m)).$$

Ovenstående viser

$$\mathrm{Ker}(K_0(\mu_n)) \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} \mathrm{Ker}(K_0(\varphi_{m,n})) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_n),$$

og derfor er γ injektiv (se 6.6). Den sidste påstand i sætningen følger også let udfra ovenstående inklusioner.

Vi har også vist $(\star)$, og dermed, at γ er surjektiv.

For at vise ($\star\star$), lad $g \in K_0(\varinjlim A_n)^+$, og find en projektion $p \in P_\infty(\varinjlim A_n)$, så $g = [p]_0$. På samme måde som i beviset for ($\star$) kan vi finde et $m \in \mathbb{N}$ og en projektion $q \in P_\infty(A_m)$, så $\mu_m(q) \sim p$. Det vil vise, at $g \in K_0(\mu_m)(K_0(A_m)^+)$. $\square$

6.8 Opgave

Lad $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$ være en følge af C^*-algebraer med induktiv grænse A og tilhørende *-homomorfier $\mu_n \colon A_n \to A$.

(i) Antag $1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 \ldots$, sæt $\psi_j = \varphi_{n_j, n_{j+1}}$. Vis, at den induktive grænse af følgen

$$A_{n_1} \xrightarrow{\psi_1} A_{n_2} \xrightarrow{\psi_2} A_{n_3} \longrightarrow \cdots$$

er isomorf med A.

(ii) Sæt $B_n = A_n/\mathrm{Ker}(\mu_n)$ og lad $\pi_n \colon A_n \to B_n$ være kvotientafbildningen. Gør rede for, at der findes injektive *-homomorfier $\psi_n \colon B_n \to B_{n+1}$ og en *-homomorfi $\pi \colon A \to \varinjlim B_n$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"'] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[d, "\pi"'] \\
B_1 \arrow[r, "\psi_1"'] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"'] & B_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \varinjlim B_n
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Vis, at π er en isomorfi.

(iii) Antag, at alle forbindende homomorfier $\varphi_n \colon A_n \to A_{n+1}$ er injektive. Vis, at alle $\mu_n \colon A_n \to A$ er injektive. Antag desuden, at A er unital. Vis, at der findes $n_0 \in \mathbb{N}$, så det for alle $n \geqslant n_0$ gælder, at A_n er unital, og at afbildningerne $\varphi_n \colon A_n \to A_{n+1}$ og $\mu_n \colon A_n \to A$ er enhedsbevarende.

6.9 Opgave

Lad $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$ og $B_1 \xrightarrow{\psi_1} B_2 \xrightarrow{\psi_2} B_3 \xrightarrow{\psi_3} \cdots$ være to følger af C^*-algebraer. Antag, at der findes *-homomorfier $\alpha_n \colon A_n \to B_n$ og $\beta_n \colon B_n \to A_{n+1}$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & A_2 \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\alpha_2"] & & A_3 \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha_3"] & \cdots \arrow[r] & \varinjlim A_n \arrow[d, dashed, shift right, "\alpha"'] \\
& B_1 \arrow[rr, "\psi_1"'] \arrow[ur, "\beta_1"'] & & B_2 \arrow[rr, "\psi_2"'] \arrow[ur, "\beta_2"'] & & B_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \varinjlim B_n \arrow[u, dashed, shift right, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Vis, at der findes *-isomorfier α og β, som angivet punkteret i diagrammet, som kommuterer med det øvrige diagram.

6.10 Opgave

Sæt $G = \varinjlim(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \varphi_n)$, hvor $\varphi_n((x, y)) = (x + y, x)$, og hvor $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ har den sædvanlige ordning givet ved $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^+ = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Bemærk, at alle $\varphi_n \colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ er positive gruppehomomorfier. Sæt $\gamma = (1 + \sqrt{5})/2$; vi vil vise, at G er ordensisomorf med den ordnede gruppe $\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Lad $\alpha_n \colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to G$ være de kanoniske gruppehomomorfier opfyldende $\alpha_n = \alpha_{n+1} \circ \varphi_n$, og definér $\beta_n \colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}$ ved $\beta_n((x, y)) = \gamma^{2-n}x + \gamma^{1-n}y$.

(i) Gør rede for, at der findes en positiv gruppehomomorfi $\beta \colon G \to \mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}$, som er bijektiv, og som får diagrammerne

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[dr, "\beta_n"] & \\ G \arrow[rr, "\beta"'] & & \mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

til at kommutere.

(ii) Lad $t \in \mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}$. Sæt $g_1 = (x, y)$, hvor x og y er bestemt ved, at $t = \gamma x + y$, og sæt $g_{n+1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^n g_1$. Vis, at $\beta_n(g_n) = t$ for alle n.

(iii) Find $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, så $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)u = \gamma u$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)v = (-\gamma)^{-1}v$. Lad t og g_1 være som ovenfor. Find reelle tal $a(t)$ og $b(t)$, så $g_1 = a(t)u + b(t)v$. Vis, at $t \geqslant 0$ hvis og kun hvis $a(t) \geqslant 0$.

(iv) Vis, at β er en ordensisomorfi.

6.11 Opgave

Lad G_1 og G_2 være de induktive grænser af nedenstående to følger af abelske grupper:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots,$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \cdots$$

hvor homomorfien $n \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ er bestemt ved $1 \mapsto n$. Vis at $G_2 \cong \mathbb{Q}$. Beskriv G_1.