7 Klassifikation af AF-Algebraer

7.1 Endelige direkte summer af matrix-algebraer

Lad $r \in \mathbb{N}$ og $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ være givet. Betragt C^*-algebraen

$$A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C}).$$

Lad $e(n,i,j)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ være den (i,j)'te standard matrix-enhed i $M_n(\mathbb{C})$ (dvs. $n \times n$-matricen med 1 på (i,j)'te plads og 0 på de øvrige pladser). Sæt

$$e_{ij}^{(k)} = (0, \ldots, 0, e(n_k, i, j), 0, \ldots, 0) \in A,$$

$1 \leqslant k \leqslant r$ og $1 \leqslant i,j \leqslant n_k$. Systemet $\{e_{ij}^{(k)}\}$ kaldes *standard matrix-enhederne* for A og opfylder

(i) $e_{ij}^{(k)} e_{jl}^{(k)} = e_{il}^{(k)}$,

(ii) $e_{ij}^{(k)} e_{ab}^{(l)} = 0$, hvis $k \neq l$ eller $j \neq a$,

(iii) $\left(e_{ij}^{(k)}\right)^* = e_{ji}^{(k)}$,

(iv) $A = \operatorname{span}\{e_{ij}^{(k)} \mid 1 \leqslant k \leqslant r;\ 1 \leqslant i,j \leqslant n_k\}$.

Hvis B er en C^*-algebra, og hvis der findes elementer $f_{ij}^{(k)} \in B$, $1 \leqslant k \leqslant r$ og $1 \leqslant i,j \leqslant n_k$, som opfylder (i), (ii) og (iii) (med $f_{ij}^{(k)}$ i stedet for $e_{ij}^{(k)}$), så findes en *-homomorfi $\varphi \colon A \to B$, som opfylder $\varphi(e_{ij}^{(k)}) = f_{ij}^{(k)}$. Sættet $\{f_{ij}^{(k)}\}$ kaldes et *system af matrix-enheder* (i B svarende til A). Hvis alle $f_{ij}^{(k)} \neq 0$, så er φ injektiv, og φ er surjektiv, hvis $\operatorname{span}\{f_{ij}^{(k)}\} = B$.

Det følger af Eksempel 3.10, Sætning 4.4, Sætning 4.15 og Sætning 5.10, at $K_0(A) \cong \mathbb{Z}^r$,

$$K_0(A)^+ \cong (\mathbb{Z}^+)^r = \{(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{Z}^r \mid x_j \geqslant 0\},$$

og ved denne isomorfi svarer $[1_A]_0$ til $(n_1, \ldots, n_r)$. Dette kan konkretiseres på følgende måde:

$$\begin{aligned} K_0(A) &= \mathbb{Z}[e_{11}^{(1)}]_0 + \mathbb{Z}[e_{11}^{(2)}]_0 + \cdots + \mathbb{Z}[e_{11}^{(r)}]_0 \ \cong \mathbb{Z}^r, \\ K_0(A)^+ &= \mathbb{Z}^+[e_{11}^{(1)}]_0 + \mathbb{Z}^+[e_{11}^{(2)}]_0 + \cdots + \mathbb{Z}^+[e_{11}^{(r)}]_0 \ \cong (\mathbb{Z}^+)^r, \\ [1_A]_0 &= n_1[e_{11}^{(1)}]_0 + n_2[e_{11}^{(2)}]_0 + \cdots + n_r[e_{11}^{(r)}]_0. \end{aligned}$$

7.2 Lemma

Antag $\{e_{ii}^{(k)} \mid 1 \leqslant k \leqslant r;\ 1 \leqslant i \leqslant n_k\}$ er en familie af indbyrdes ortogonale projektioner i en C^*-algebra B, og at

$$e_{11}^{(k)} \sim e_{22}^{(k)} \sim \cdots \sim e_{n_k n_k}^{(k)}$$

for $1 \leqslant k \leqslant r$. Så kan systemet $\{e_{ii}^{(k)}\}$ udvides til et system af matrix-enheder $\{e_{ij}^{(k)}\}$ beliggende i B.

Bevis: Der findes $e_{1i}^{(k)} \in B$, $1 \leqslant k \leqslant r$, $1 \leqslant i \leqslant n_k$, så

$$e_{1i}^{(k)} e_{1i}^{(k)*} = e_{11}^{(k)}\ , \quad e_{1i}^{(k)*} e_{1i}^{(k)} = e_{ii}^{(k)}.$$

Sæt $e_{ij}^{(k)} = e_{1i}^{(k)*} e_{1j}^{(k)}$, og bemærk, at dette stemmer overens med de allerede definerede $e_{ij}^{(k)}$. Systemet $\{e_{ij}^{(k)}\}$ ses let at opfylde (i), (ii) og (iii) i 7.1. □

En del-C^*-algebra D af en C^*-algebra A kaldes en *maksimalt abelsk delalgebra* (eller *masa* i forkortelse af *maximal abelian sub-algebra*), hvis D er abelsk og ikke er ægte indeholdt i nogen abelsk del-C^*-algebra af A. Et Zorn's Lemma argument giver, at enhver abelsk del-C^*-algebra er indeholdt i en masa, og at masa'er således eksisterer i rigt mål.

Mængden D af diagonale $n \times n$ matricer udgør en masa i $M_n(\mathbb{C})$.

7.3 Lemma

Lad D være en masa i A.

(i) Hvis $a \in A$ er normal og $ad = da$ for alle $d \in D$, så er $a \in D$.

(ii) Hvis D er unital med 1-element 1_D, så er A også unital, og 1_D er 1-element for A.

(iii) Hvis p er en projection i D, som opfylder $pDp = \mathbb{C}p$, så gælder $pAp = \mathbb{C}p$.

Bevis: (i). Hvis a er normal og kommuterer med alle elementer i D, så er $C^*(D, a)$ abelsk (overvej dette). Da $D \subseteq C^*(D, a)$, og da D er en masa, har vi $C^*(D, a) = D$ og dermed $a \in D$.

(ii). Vi viser, at $a \cdot 1_D = a$ for alle $a \in A$, og det vil medføre, at 1_D er 1-element for A, thi da er også $1_D \cdot a = (a^* \cdot 1_D)^* = a$.

Lad $a \in A$ og sæt $z = a - a \cdot 1_D$. Bemærk at $zd = 0$ for alle $d \in D$, og dermed $d(z^*z) = 0 = (z^*z)d$ for alle $d \in D$. Da z^*z er positiv, og dermed normal, giver (i), at $z^*z \in D$. Men så er $(z^*z)(z^*z) = 0$, og altså $\|z\|^4 = \|z^*z\|^2 = \|(z^*z)^2\| = 0$, og hermed $z = 0$ som ønsket.

(iii). Lad $x \in pAp$, sæt $a = (a+a^*)/2$ og $b = (a-a^*)/2i$. Da er a og b selv-adjungerede elementer i pAp, og $x = a+ib$. Det er derfor nok at vise, at hvis $a \in pAp$ er selv-adjungeret, så er $a \in \mathbb{C}p$.

Lad $d \in D$. Da er $pd = dp = pdp = \lambda p$ for et $\lambda \in \mathbb{C}$. Sæt $d_0 = d - pd$. Så har vi $d = \lambda p + d_0$, og $pd_0 = 0 = d_0 p$. For et vilkårligt $a \in pAp$ har vi derfor $ad = \lambda a = da$. Hvis a desuden er selv-adjungeret (og dermed normal), giver (i), at $a \in D$. Dette viser, at $a \in \mathbb{C}p$. $\square$

7.4 Sætning

Enhver endelig-dimensional C^*-algebra er isomorf med $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$ for passende $r \in \mathbb{N}$ og $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$.

Bevis: Lad A være en endelig-dimensional C^*-algebra, og lad D være en masa i A. Ifølge spektralsætningen, se Sætning 1.6, er D isomorf med $C_0(X)$ for et passende lokal-kompakt Hausdorff rum X. Da D desuden vides at være endelig-dimensional, så må rummet X være endeligt (overvej dette!), altså $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Dette giver, at X er kompakt, at $D \cong C_0(X) = C(X)$, og at D således er unital. Ifølge Lemma 7.3 er A også unital med samme 1-element som D's. Dette 1-element kalder vi 1.

Lad $p_1, p_2, \ldots, p_N \in D$ svare til funktionerne $f_1, f_2, \ldots, f_N \in C(X)$ givet ved $f_j(x_i) = \delta_{i,j}$. Da er $p_1, p_2, \ldots, p_N$ projektioner i D, $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$, og $p_j D p_j = \mathbb{C}p_j$, fordi $f_1, f_2, \ldots, f_N$ har disse egenskaber relativt til $C(X)$. Lemma 7.3 fortæller os, at $p_j A p_j = \mathbb{C}p_j$ for alle j.

Antag $p_j A p_i \neq \{0\}$, og vælg $v \in p_j A p_i$ med $\|v\| = 1$. Da $v^*v \in p_i A p_i = \mathbb{C}p_i$ og $vv^* \in p_j A p_j = \mathbb{C}p_j$ er positive med norm 1, følger det, at $v^*v = p_i$ og $vv^* = p_j$. Hvis $x \in p_j A p_i$, så er $x = xp_i = (xv^*)v$. Da $xv^* \in p_j A p_j = \mathbb{C}p_j$ og $p_j v = v$, følger det, at $x \in \mathbb{C}v$. Vi har dermed vist, at enten er $p_j A p_i = \{0\}$, eller også er $p_j \sim p_i$ i A og $p_j A p_i = \mathbb{C}v$, hvor v er en partiel isometri, som implementerer ækvivalensen mellem p_i og p_j.

Inddel mængden $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ i ækvivalensklasser (mht. $\sim$). Antag, at der er r ækvivalensklasser, og at den k'te ækvivalensklasse indeholder n_k elementer (hvorved $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$). Ved at omdøbe projektionerne p_j opnår vi:

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_N\} = \{e_{ii}^{(k)} \mid 1 \leqslant k \leqslant r;\ 1 \leqslant i \leqslant n_k\},$$

hvor $\{e_{11}^{(k)}, e_{22}^{(k)}, \ldots, e_{n_k n_k}^{(k)}\}$ er den k'te ækvivalensklasse. Bemærk, at $e_{ii}^{(k)} A e_{jj}^{(l)} = \{0\}$, hvis $k \neq l$, og at $e_{ii}^{(k)} \sim e_{jj}^{(k)}$.

Lemma 7.2 giver derfor, at systemet $\{e_{ii}^{(k)}\}$ kan udvides til et system af matrix-enheder $\{e_{ij}^{(k)}\}$ i A. Det følger af argumentet ovenfor, at $e_{ii}^{(k)} A e_{jj}^{(k)} = \mathbb{C}e_{ij}^{(k)}$.

Bemærk, at $1 = \sum_{k,i} e_{ii}^{(k)}$. Det betyder, at for ethvert element $a \in A$:

$$a = \Big(\sum_{k,i} e_{ii}^{(k)}\Big) a \Big(\sum_{k,i} e_{ii}^{(k)}\Big) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=1}^{n_k} e_{ii}^{(k)} a e_{jj}^{(k)} = \sum_{i,j=1}^{n_k} \lambda_{ij}^{(k)} e_{ij}^{(k)}$$

for passende $\lambda_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}$. Dette viser, at

$$A = \operatorname{span}\{e_{ij}^{(k)} \mid 1 \leqslant k \leqslant r,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n_k\}.$$

Det er nu vist, at systemet $\{e_{ij}^{(k)}\}$ har egenskaberne (i) – (iv) i Afsnit 7.1, og dette implicerer, at $A \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$. $\square$

En C^*-algebra A med enhed siges at have *kancelleringsegenskaben*, hvis dens tilhørende semigruppe $V(A)$ har kancelleringsegenskaben (se (3.1)). En C^*-algebra A har denne egenskab, hvis og kun hvis ethvert par af stabilt ækvivalente projektioner i $P_\infty(A)$ er ækvivalente. Dette medfører videre, at der for alle n og alle par af projektioner $p, q \in P_n(A)$ gælder, at $p \sim_u q$ hvis (og kun hvis) $[p]_0 = [q]_0$ i $K_0(A)$.

Det følger af Eksempel 3.10, at C^*-algebraen $M_n(\mathbb{C})$ har kancelleringsegenskaben, idet $[p]_0 = [q]_0$ medfører, at p og q har samme spor, hvilket igen medfører, at p og q er unitært ækvivalente. Det ses let heraf (og ved benyttelse af Sætning 7.4), at enhver endelig-dimensional C^*-algebra har kancelleringsegenskaben.

7.5 Sætning

Lad A være en endelig-dimensional C^*-algebra og lad B være en unital C^*-algebra med kancelleringsegenskaben.

(i) Til enhver positiv homomorfi $\alpha\colon K_0(A) \to K_0(B)$, som opfylder $\alpha([1_A]_0) \leqslant [1_B]_0$ findes en *-homomorfi $\varphi\colon A \to B$, så $K_0(\varphi) = \alpha$. Hvis $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$, så er φ enhedsbevarende.

(ii) Hvis $\varphi, \psi\colon A \to B$ er *-homomorfier og $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$, så findes et unitært element $u \in B$, så $\psi = \operatorname{Ad} u \circ \varphi$. (Se Opgave 4.21 for definitionen af $\operatorname{Ad} u$.)

Bevis: (i). Vi viser først, at hvis $p \in B$ er en projektion og $g \in K_0(B)$ opfylder $0 \leqslant g \leqslant [1_B]_0 - [p]_0$, så findes en projektion $q \in B$, som er ortogonal på p, og som opfylder $[q]_0 = g$. Find hertil $n \in \mathbb{N}$ og indbyrdes ortogonale projektioner $e, f \in P_n(B)$, så $[e]_0 = g$ og $[f]_0 = [1_B]_0 - [p]_0 - g$. Da er $[e + f]_0 = [1_B - p]_0$. Da B har kancelleringsegenskaben, følger det, at $e + f \sim 1_B - p$. Find $v \in M_{1,n}(B)$, så $v^*v = e + f$ og $vv^* = 1_B - p$. Sæt $q = vev^* \in B$. Så er $q \leqslant 1_B - p$ og $q \sim e$, hvilket viser, at $[q]_0 = [e]_0 = g$.

Lad $\{e_{ij}^{(k)}\}$, $1 \leqslant k \leqslant r$; $1 \leqslant i,j \leqslant n_k$, være systemet af standard matrix-enheder for A. Argumentet ovenfor, sammen med antagelsen $\alpha([1_A]_0) \leqslant [1_B]_0$, giver, at der findes indbyrdes ortogonale projektioner $\{f_{ii}^{(k)}\}$, $1 \leqslant k \leqslant r$; $1 \leqslant i \leqslant n_k$, i B, så $\alpha([e_{ii}^{(k)}]_0) = [f_{ii}^{(k)}]_0$.

Ved endnu en gang at benytte, at B har kancelleringsegenskaben, får vi

$$e_{ii}^{(k)} \sim e_{jj}^{(k)} \Rightarrow [e_{ii}^{(k)}]_0 = [e_{jj}^{(k)}]_0 \Rightarrow [f_{ii}^{(k)}]_0 = [f_{jj}^{(k)}]_0 \Rightarrow f_{ii}^{(k)} \sim f_{jj}^{(k)}.$$

Ifølge Lemma 7.2 kan systemet $\{f_{ii}^{(k)}\}$ udvides til et system af matrix-enheder $\{f_{ij}^{(k)}\} \in B$, og 7.1 viser herefter, at der findes en *-homomorfi $\varphi\colon A \to B$, som opfylder $\varphi(e_{ij}^{(k)}) = f_{ij}^{(k)}$.

Endelig, da $K_0(A)$ er frembragt af elementerne $[e_{11}^{(1)}]_0, \dots, [e_{11}^{(r)}]_0$, og da

$$K_0(\varphi)([e_{11}^{(k)}]_0) = [\varphi(e_{11}^{(k)})]_0 = [f_{ii}^{(k)}]_0 = \alpha([e_{11}^{(k)}]_0),$$

ser vi, at $K_0(\varphi) = \alpha$.

Antag nu, at $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$ og sæt $p = \sum_{i,k} f_{ii}^{(k)}$. Så er p en projektion i B og $\varphi(1_A) = p$. Det følger, at

$$[1_B - p]_0 = [1_B]_0 - [p]_0 = \alpha([1_A]_0) - K_0(\varphi)([1_A]_0) = 0.$$

Kancelleringsegenskaben giver $1_B - p \sim 0$. Dermed har vi, at $1_B - p = 0$, så $\varphi(1_A) = p = 1_B$.

(ii). Lad igen $\{e_{ij}^{(k)}\}$ være matrix-enhederne for A. Bemærk, at

$$\begin{aligned}
[\varphi(e_{11}^{(k)})]_0 &= K_0(\varphi)([e_{11}^{(k)}]_0) = K_0(\psi)([e_{11}^{(k)}]_0) = [\psi(e_{11}^{(k)})]_0,\\
[1_B - \varphi(1_A)]_0 &= [1_B]_0 - K_0(\varphi)([1_A]_0) = [1_B]_0 - K_0(\psi)([1_A]_0) = [1_B - \psi(1_A)]_0.
\end{aligned}$$

Ligesom i beviset for (i) giver kancelleringsegenskaben for B, at der findes $v_k, w \in B$, så

$$\begin{aligned}
&v_k^* v_k = \varphi(e_{11}^{(k)}), \quad v_k v_k^* = \psi(e_{11}^{(k)}), \quad 1 \leqslant k \leqslant r,\\
&w^* w = 1_B - \varphi(1_A), \quad w w^* = 1_B - \psi(1_A).
\end{aligned}$$

Sæt

$$u = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)}) + w.$$

En direkte udregning giver nu, at $u\varphi(e_{ij}^{(k)})u^* = \psi(e_{ij}^{(k)})$. Det følger let heraf, at u er unitær, og at $\operatorname{Ad} u \circ \varphi = \psi$. □

7.6 Definition

En (tællelig) *dimensionsgruppe* er en ordnet abelsk gruppe, som er isomorf med den induktive grænse af en følge af formen

$$\mathbb{Z}^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}^{n_2} \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{Z}^{n_3} \longrightarrow \cdots ,$$

hvor $\mathbb{Z}^{n_j}$ er udstyret med den sædvanlige orden $(\mathbb{Z}^{n_j})^+ = (\mathbb{Z}^+)^{n_j}$, og hvor de forbindende homomorfier α_j er positive.

7.7 Sætning (Effros–Handelman–Shen)

En tællelig ordnet abelsk gruppe G er en dimensionsgruppe, hvis og kun hvis

(i) G er *uperforeret:* for alle $g \in G$ og alle $n \in \mathbb{N}$ gælder $g \geqslant 0$ hvis $ng \geqslant 0$, og

(ii) G har *Riesz' interpolationsegenskab:* for alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$, som opfylder $x_i \leqslant y_j$ for $i, j = 1, 2$, findes $z \in G$, så $x_i \leqslant z \leqslant y_j$ for $i, j = 1, 2$.

Bevis: Se [Effros, Handelman & Shen] eller [Goodearl]. Det er en let øvelse at vise "kun hvis"-delen af sætningen. □

7.8 Eksempler

(i) Enhver tællelig totalt ordnet abelsk gruppe er en dimensionsgruppe. Specielt er enhver tællelig undergruppe af $\mathbb{R}$, med ordensrelation nedarvet fra $\mathbb{R}$, en dimensionsgruppe.

(ii) Lad G og H være dimensionsgrupper, sæt $D = G \oplus H$ og sæt

$$D^+ = \{(g, h) \mid g \geqslant 0, \quad h \geqslant 0\}.$$

Så er (D, D^+) en dimensionsgruppe.

(iii) Lad igen G og H være dimensionsgrupper, og sæt $D = G \oplus H$. Sæt

$$D^+ = \{(g, h) \mid g > 0 \text{ og } h > 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Så er (D, D^+) en ordnet abelsk gruppe, men (D, D^+) er i almindelighed *ikke* en dimensionsgruppe. Hvis f.eks. $G = \mathbb{Z}$ med den sædvanlige orden og hvis H indeholder elementer h_1, h_2, h_1', h_2', således at $h_1 \neq h_2$, $h_1' \neq h_2'$ og $h_i < h_j'$ for alle i, j, så er D ikke en dimensionsgruppe. (Prøv med $x_1 = (0, h_1)$, $x_2 = (0, h_2)$, $y_1 = (1, h_1')$, $y_2 = (1, h_2')$.) Hvis derimod $G = H = \mathbb{Q}$ udstyret med den sædvanlige orden, så er D en dimensionsgruppe.

(iv) Lad G være en dimensionsgruppe, lad H være en tællelig, torsionsfri abelsk gruppe, sæt $D = G \oplus H$ og sæt

$$D^+ = \{(g,h) \mid g > 0\} \cup \{(0,0)\}.$$

Så er (D, D^+) en ordnet abelsk gruppe. Hvis f.eks. $G = \mathbb{Z}$ med sædvanlig ordning og $H \neq \{0\}$, så er D *ikke* en dimensionsgruppe. (Se vinket i eksempel (iii).) Hvis derimod G er en tæt undergruppe af $\mathbb{R}$, så er D en dimensionsgruppe uanset valget af H.

(v) Sæt $D = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ og lad $n \in \mathbb{N}$. Sæt

$$D^+ = \{(x,y) \mid x \geqslant n\} \cup \{(0,0),(1,0),\ldots,(n-1,0)\}.$$

Så er D en ordnet abelsk gruppe, som *ikke* er en dimensionsgruppe. Det kan vises, at (D, D^+) er ordensisomorf med $K_0(C(S^{2n}))$ udstyret med den sædvanlige orden.

7.9 Definition

En (separabel) *AF-algebra* ("approximately finite-dimensional") er en C^*-algebra, som er isomorf med den induktive grænse af en følge af endelig-dimensionale C^*-algebraer.

Det kan vises, at en separabel C^*-algebra A er en AF-algebra, hvis og kun hvis der for alle endelige delmængder $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ af A og for alle $\epsilon > 0$ findes en endelig-dimensional del-C^*-algebra B af A og en delmængde $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ af B, således at $\|a_j - b_j\| < \epsilon$ for alle j.

7.10 Eksempel (Bratteli-diagrammer)

Lad $f_0, f_1, f_2, \ldots$ være Fibonaccitallene, i.e. $f_0 = f_1 = 1$ og $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ for $n \geqslant 2$. Sæt

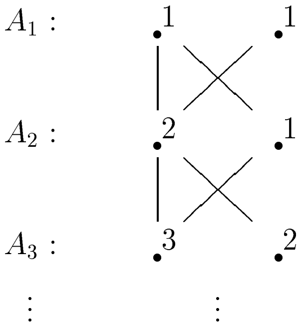
$$A_n = M_{f_n}(\mathbb{C}) \oplus M_{f_{n-1}}(\mathbb{C})$$

og lad $\varphi_n \colon A_n \to A_{n+1}$ være afbildningen givet ved

$$(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, x \right).$$

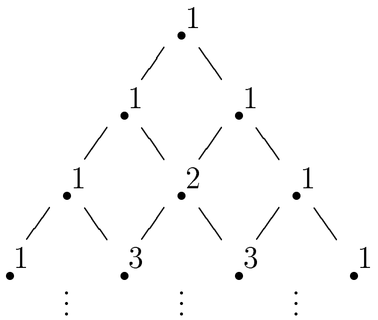
Så er $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$ en induktiv følge af endelig-dimensionale C^*-algebraer, som således definerer en AF-algebra. (Se i øvrigt Opgave 6.10.)

Dette induktive system kan beskrives ved følgende *Bratteli-diagram:*



Overvej selv betydningen af tallene, prikkerne og stregerne.

Omsæt følgende Bratteli-diagram til et induktivt system af endelig-dimensionale C^*-algebraer:



7.11 Sætning

Den ordnede gruppe $K_0(A)$ hørende til en AF-algebra A er en dimensionsgruppe. Omvendt, enhver dimensionsgruppe er ordensisomorf med $K_0(A)$ for en passende AF-algebra A.

Bevis: Antag $A = \varinjlim A_j$, hvor A_j er endelig-dimensional. Så er $K_0(A_j)$ ordensisomorf med $\mathbb{Z}^{n_j}$, med standard orden, for et passende $n_j \in \mathbb{N}$ ifølge 7.1. Ifølge Sætning 6.7 er $K_0(A)$ ordensisomorf med den induktive grænse af følgen:

$$K_0(A_1) \to K_0(A_2) \to K_0(A_3) \to \cdots,$$

hvor de forbindende homomorfier er induceret af de forbindende *-homomorfier $A_n \to A_{n+1}$, som dermed er positive (se bemærkningen efter Sætning 5.7). Det følger af Definition 7.6, at $K_0(A)$ er en dimensionsgruppe.

Antag omvendt, at G er en dimensionsgruppe, dvs. G er (isomorf med) den induktive grænse af en følge

$$\mathbb{Z}^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}^{n_2} \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{Z}^{n_3} \xrightarrow{\alpha_3} \cdots .$$

Vælg induktivt ordensenheder

$$u_j = (k_1^{(j)}, k_2^{(j)}, \dots, k_{n_j}^{(j)}) \in \mathbb{Z}^{n_j},$$

således at $\alpha_j(u_j) \leqslant u_{j+1}$. Bemærk, at $k_i^{(j)} > 0$. Sæt

$$A_j = M_{k_1^{(j)}}(\mathbb{C}) \oplus M_{k_2^{(j)}}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{k_{n_j}^{(j)}}(\mathbb{C}),$$

og lad $\gamma_j \colon \mathbb{Z}^{n_j} \to K_0(A_j)$ være en ordensisomorfi, som opfylder $\gamma_j(u_j) = [1_{A_j}]_0$.

Ifølge Sætning 7.5 (i) findes *-homomorfier $\varphi_j \colon A_j \to A_{j+1}$, som får diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^{n_1} \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & \mathbb{Z}^{n_2} \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & \mathbb{Z}^{n_3} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_3"'] & \cdots \\
K_0(A_1) \arrow[r, "K_0(\varphi_1)"'] & K_0(A_2) \arrow[r, "K_0(\varphi_2)"'] & K_0(A_3) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

til at kommutere. Kontinuitet af K_0 (Sætning 6.7) giver, at hvis A er den induktive grænse af følgen $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$, så er $K_0(A)$ ordensisomorf med G. □

7.12 Lemma

Lad $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$ være en følge af endelig-dimensionale C^*-algebraer med injektive forbindende *-homomorfier φ_n. Lad A være den induktive grænse af følgen, og lad $\mu_n \colon A_n \to A$ være de tilhørende *-homomorfier. Antag B er en endelig-dimensional C^*-algebra, og at der er givet positive gruppehomomorfier $\alpha \colon K_0(A_1) \to K_0(B)$ og $\gamma \colon K_0(B) \to K_0(A)$, som opfylder $\gamma \circ \alpha = K_0(\mu_1)$.

Det følger, at der findes $n \in \mathbb{N}$ og en positiv homomorfi $\beta \colon K_0(B) \to K_0(A_n)$, som får diagrammet

$$\begin{tikzcd}
K_0(A_1) \arrow[r, "K_0(\varphi_{1,n})"] \arrow[dr, "\alpha"'] & K_0(A_n) \arrow[r, "K_0(\mu_n)"] & K_0(A) \\
& K_0(B) \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

til at kommutere. Hvis alle φ_n er enhedsbevarende, og hvis $\alpha([1_{A_1}]_0) = [1_B]_0$, så er $\beta([1_B]_0) = [1_{A_n}]_0$.

Bevis: Lad $\{e_{ij}^{(k)}\}$, $1 \leqslant k \leqslant r$, $1 \leqslant i,j \leqslant n_k$, være matrix-enheder for B, og sæt $x_i = \gamma([e_{11}^{(i)}]_0) \in K_0(A)^+$. Ifølge Sætning 6.7 er

$$K_0(A)^+ = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_0(\mu_m)\ (K_0(A_m)^+),$$

så der findes $m \in \mathbb{N}$ og $y_1, \ldots, y_r \in K_0(A_m)^+$, så $x_i = K_0(\mu_m)(y_i)$ for alle i. Ifølge 7.1 findes en positiv homomorfi $\beta' \colon K_0(B) \to K_0(A_m)$, som opfylder $\beta'([e_{11}^{(i)}]_0) = y_i$. Idet

$$(K_0(\mu_m) \circ \beta')\ \left(\left[e_{11}^{(i)}\right]_0\right) = K_0(\mu_m)(y_i) = x_i = \gamma\left(\left[e_{11}^{(i)}\right]_0\right),$$

ses det, at $K_0(\mu_m) \circ \beta' = \gamma$.

Lad $g_1, \ldots, g_s$ være et sæt af generatorer for den endeligt frembragte gruppe $K_0(A_1)$. Bemærk, at

$$K_0\left(\mu_m\right) \circ \left(\beta' \circ \alpha - K_0(\varphi_{1,m})\right) = \gamma \circ \alpha - K_0\left(\mu_1\right) = 0.$$

Da $\operatorname{Ker}(K_0(\mu_m)) = \bigcup_{n=m}^{\infty} \operatorname{Ker}(K_0(\varphi_{m,n}))$, findes $n \geqslant m$, således at

$$\left(\beta' \circ \alpha - K_0(\varphi_{1,m})\right)(g_i) \in \operatorname{Ker}\left(K_0(\varphi_{m,n})\right)$$

for alle i. Sæt $\beta = K_0(\varphi_{m,n}) \circ \beta'$. Så er $(\beta \circ \alpha - K_0(\varphi_{1,n}))(g_i) = 0$ for alle i, hvilket giver $\beta \circ \alpha = K_0(\varphi_{1,n})$. Bemærk også, at $\gamma = K_0(\mu_m) \circ \beta' = K_0(\mu_n) \circ K_0(\varphi_{m,n}) \circ \beta' = K_0(\mu_n) \circ \beta$.

Den sidste påstand vedrørende enhederne ses direkte af det kommuterende diagram.

$\square$

7.13 Sætning (Elliott)

To AF-algebraer A og B med enhed er *-isomorfe hvis og kun hvis deres tilhørende tripler $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$ og $(K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0)$ er isomorfe.

Der gælder endvidere, at der til enhver isomorfi $\alpha\colon K_0(A) \to K_0(B)$, som opfylder $\alpha(K_0(A)^+) = K_0(B)^+$ og $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$, findes en *-isomorfi $\varphi\colon A \to B$, så $K_0(\varphi) = \alpha$.

Bevis: Det er tilstrækkeligt at vise sætningens anden del, idet "kun hvis"-delen af sætningens første del altid er sand, jvf. bemærkningerne efter Sætning 5.7.

Ifølge Opgave 6.8 (i), (ii), (iii), kan vi finde følger af endelig-dimensionale C^*-algebraer med injektive enhedsbevarende forbindende homomorfier

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow \cdots ,$$

$$B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} B_3 \longrightarrow \cdots ,$$

hvis induktive grænser er A, hhv. B. Lad $\mu_n\colon A_n \to A$ og $\lambda_n\colon B_n \to B$ være de tilhørende *-homomorfier. Sæt $B_0 = \mathbb{C}$ og lad $g_0\colon B_0 \to B_1$ og $\psi_0\colon B_0 \to A_1$ være (de trivielle) unitale *-homomorfier. Ved at anvende Lemma 7.12 først på parret

$$K_0(\psi_0)\colon K_0(B_0) \to K_0(A_1), \quad \alpha \circ K_0(\mu_1)\colon K_0(A_1) \to K_0(B),$$

og dernæst induktivt på parrene

$$\begin{aligned} &\alpha_j\colon K_0(A_{n_j}) \to K_0(B_{m_j}), && \alpha^{-1} \circ K_0(\lambda_{m_j})\colon K_0(B_{m_j}) \to K_0(A), \\ &\beta_j\colon K_0(B_{m_j}) \to K_0(A_{n_{j+1}}), && \alpha \circ K_0(\mu_{n_{j+1}})\colon K_0(A_{n_{j+1}}) \to K_0(B) \end{aligned}$$

opnås voksende følger af hele tal $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ og $1 \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$, og positive, ordensenhedsbevarende homomorfier α_j og β_j, så diagrammet

$$\begin{tikzcd} K_0(A_{n_1}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & K_0(A_{n_2}) \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \cdots \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ & K_0(B_{m_1}) \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[rr] & & K_0(B_{m_2}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_0(B) \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Idet de induktive grænser af følgerne

$$A_{n_1} \xrightarrow{f_{n_2,n_1}} A_{n_2} \xrightarrow{f_{n_3,n_2}} A_{n_3} \longrightarrow \cdots$$

$$B_{n_1} \xrightarrow{g_{n_2,n_1}} B_{n_2} \xrightarrow{g_{n_3,n_2}} B_{n_3} \longrightarrow \cdots$$

er A, hhv. B, ifølge Opgave 6.8 (i), kan vi antage, at $n_j = m_j = j$ og $f_{n_j,n_{j+1}} = f_j$,

$g_{n_j,n_{j+1}} = g_j$.

Ifølge Sætning 7.5 (i) findes enhedsbevarende *-homomorfier $\varphi'_j \colon A_j \to B_j$ og $\psi'_j \colon B_j \to A_{j+1}$, som opfylder $K_0(\varphi'_j) = \alpha_j$ og $K_0(\psi'_j) = \beta_j$. Heraf fås specielt

$$\begin{aligned} K_0(f_j) &= \beta_j \circ \alpha_j = K_0(\psi'_j \circ \varphi'_j)\,; & f_j,\ \psi'_j \circ \varphi'_j &\colon A_j \to A_{j+1}, \\ K_0(g_j) &= \alpha_{j+1} \circ \beta_j = K_0(\varphi'_{j+1} \circ \psi'_j)\,; & g_j,\ \varphi'_{j+1} \circ \psi'_j &\colon B_j \to B_{j+1}. \end{aligned}$$

Sætning 7.5 (ii) giver nu eksistensen af unitære elementer $u_j \in A_{j+1}$ og $v_j \in B_j$, som opfylder $v_1 = 1$ og

$$\begin{aligned} f_j &= \mathrm{Ad}u_j \circ \psi'_j \circ \varphi_j = \psi_j \circ \varphi_j, \\ g_j &= \mathrm{Ad}v_{j+1} \circ \varphi'_{j+1} \circ \psi_j = \varphi_{j+1} \circ \psi_j, \end{aligned}$$

hvor $\varphi_j = \mathrm{Ad}v_j \circ \varphi'_j$ og $\psi_j = \mathrm{Ad}u_j \circ \psi'_j$, idet det bemærkes, at $K_0(\varphi_j) = K_0(\varphi'_j)$ og $K_0(\psi_j) = K_0(\psi'_j)$ jvf. Opgave 4.21. Vi er således kommet frem til det kommuterende diagram:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"] & & A_2 \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, "\varphi_2"] & & A_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[d, dashed, shift right, "\varphi"'] \\ & B_1 \arrow[rr, "g_1"'] \arrow[ur, "\psi_1"] & & B_2 \arrow[rr, "g_2"'] \arrow[ur, "\psi_2"] & & B_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B \arrow[u, dashed, shift right, "\psi = \varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Opgave 6.9 giver endelig eksistensen af isomorfierne φ og ψ.

Da de to diagrammer

$$\begin{tikzcd} K_0(A_j) \arrow[r, "K_0(\mu_j)"] \arrow[d, "K_0(\varphi_j) = \alpha_j"'] & K_0(A) \arrow[d, "K_0(\varphi)"] \\ K_0(B_j) \arrow[r, "K_0(\lambda_j)"'] & K_0(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_0(A_j) \arrow[r, "K_0(\mu_j)"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & K_0(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ K_0(B_j) \arrow[r, "K_0(\lambda_j)"'] & K_0(B) \end{tikzcd}$$

kommuterer, ser vi, at $K_0(\varphi) \,|\, \mathrm{Im}(K_0(\mu_j)) = \alpha \,|\, \mathrm{Im}(K_0(\mu_j))$. Ifølge Sætning 6.7 er $K_0(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Im}(K_0(\mu_j))$, så $K_0(\varphi) = \alpha$ som ønsket. $\square$

Klassifikation af UHF-algebraer

7.14 Definition

En C^*-algebra A kaldes en *UHF-algebra* ("Uniformly Hyper-Finite"), hvis A er isomorf med den induktive grænse af en følge

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

hvor de forbindende homomorfier φ_n er enhedsbevarende. Det ses let ud fra (7.1) og Sætning 7.5, at der findes enhedsbevarende *-homomorfier $\varphi\colon M_k(\mathbb{C}) \to M_l(\mathbb{C})$, hvis og kun hvis $k|l$.

7.15 Definition

Lad $\{p_1, p_2, \dots\}$ være primtallene nummereret i voksende orden. Et *supernaturligt* tal n er en følge $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, hvor $n_j \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$, som angiver "primtalsfaktoriseringen" af n. Vi benytter også følgende formelle udtryk

$$n = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_j}.$$

Et supernaturligt tal n tilhører $\mathbb{N}$, hvis og kun hvis $\sum_{j=1}^{\infty} n_j < \infty$. To supernaturlige tal kan på en oplagt måde ganges med hinanden.

Til ethvert supernaturligt tal $n = \{n_j\}$ knyttes undergruppen $G(n)$ af $(\mathbb{Q}, +)$ ved

$$G(n) = \Big\{ x/y \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N},\ y = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{m_j}\ ,\ m_j \leqslant n_j \Big\}.$$

7.16 Sætning

(i) Hvis G er en undergruppe af $(\mathbb{Q}, +)$, og hvis $1 \in G$, så er $G = G(n)$ for et supernaturligt tal n,

(ii) $(G(n), 1) \cong (G(n'), 1)$ (dvs. der findes en isomorfi $\alpha\colon G(n) \to G(n')$, så $\alpha(1) = 1$), hvis og kun hvis $n = n'$,

(iii) $G(n) \cong G(n')$ hvis og kun hvis der findes $m, m' \in \mathbb{N}$, så $mn = m'n'$.

Bevis: (i). Antag G er en undergruppe af $\mathbb{Q}$ og at $1 \in G$. Sæt

$$n_j = \sup\{m \in \mathbb{N}_0 \mid 1/p_j^m \in G\} \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\},$$

og sæt $n = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$. Lad $t = x/y \in \mathbb{Q}$, hvor $x, y \in \mathbb{Z}$ er indbyrdes primiske, og hvor

$$y = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Sæt $y_j = y/p_j^{m_j} \in \mathbb{Z}$. Find $a, b \in \mathbb{Z}$, så $1 = ax + by$. Så er

$$(\star) \qquad 1/p_j^{m_j} = y_j/y = y_j \frac{ax + by}{y} = y_j(at + b).$$

Der findes $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$, så $1 = c_1 y_1 + \cdots + c_k y_k$. Dermed er

$$(\dagger) \qquad t = \sum_{j=1}^{k} \frac{x}{y} c_j y_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{x c_j}{p_j^{m_j}}.$$

Det følger af $(\star)$ og $(\dagger)$, at

$$\begin{aligned} t \in G &\iff 1/p_1^{m_1}, 1/p_2^{m_2}, \ldots, 1/p_k^{m_k} \in G \\ &\iff m_1 \leqslant n_1, \ldots, m_k \leqslant n_k \iff t \in G(n). \end{aligned}$$

Det er hermed vist, at $G = G(n)$.

(ii). Antag $\alpha \colon G(n) \to G(n')$ er en isomorfi og at $\alpha(1) = 1$. Hvis $t = x/y \in G(n)$, hvor $x \in \mathbb{Z}$ og $y \in \mathbb{N}$, så er $y\alpha(t) = \alpha(yt) = \alpha(x) = x$, og dermed $\alpha(t) = t$. Dette viser, at $G(n) = G(n')$ (og at $\alpha = \mathrm{id}$). Vi har ligesom i beviset for (i), at

$$n_j = \sup\{m \mid 1/p_j^m \in G(n)\} = \sup\{m \mid 1/p_j^m \in G(n')\} = n'_j,$$

hvilket giver $n = n'$.

(iii). Antag $\alpha \colon G(n) \to G(n')$ er en isomorfi. Så findes $m, m' \in \mathbb{Z}$ så $\alpha(m) = m'$, $m, m' \neq 0$. Ved at erstatte α med $-\alpha$ om nødvendigt, kan vi antage, at $m, m' \in \mathbb{N}$. Sammensætningen af isomorfierne

$$G(nm) \xrightarrow{m} G(n) \xrightarrow{\alpha} G(n') \xrightarrow{(m')^{-1}} G(n'm'),$$

hvor isomorfierne m og $(m')^{-1}$ er givet ved $t \mapsto mt$ og $t \mapsto t/m'$, definerer en isomorfi $\beta \colon G(nm) \to G(n'm')$, som klart opfylder $\beta(1) = 1$. (ii) implicerer nu, at $nm = n'm'$.

Hvis omvendt $nm = n'm'$, så definerer sammensætningen

$$G(n) \xrightarrow{n^{-1}} G(nm) \xrightarrow{\mathrm{id}} G(n'm') \xrightarrow{m'} G(n')$$

en isomorfi. $\square$

7.17 Definition

Betragt en følge af naturlige tal $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, som opfylder $k_j \,|\, k_{j+1}$, og skriv

$$k_i = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_{i,j}}.$$

Associ´ er hertil det supernaturlige tal $n = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, hvor $n_j = \sup\{n_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

7.18 Lemma

Lad $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ og n være som ovenfor, og lad der desuden være givet en følge af C^*-algebraer

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots$$

med induktiv grænse A, hvor de forbindende homomorfier φ_j er enhedsbevarende. Så er

(i) $G(n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_j}\mathbb{Z}$,

(ii) $(K_0(A), [1]_0) \cong (G(n), 1)$.

Bevis: (i). Da $n_{i,j} \leqslant n_j$, er $1/k_i \in G(n)$, så

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i}\,\mathbb{Z} \subseteq G(n).$$

Omvendt, hvis $t \in G(n)$, så er $t = x/y$, hvor $x \in \mathbb{Z}$ og $y \in \mathbb{N}$ er indbyrdes primiske og $y = \prod {p_j}^{m_j}$, hvor $m_j \leqslant n_j$. Da $\sum_{j=1}^{\infty} m_j < \infty$, ses det videre, at der findes $i \in \mathbb{N}$, så $m_j \leqslant n_{i,j}$ for alle j. Dermed er y divisor i k_i, så $t \in \frac{1}{k_i}\mathbb{Z}$.

(ii). Lad $\{e_{\alpha\beta}^{(j)}\}$ være matrix-enhederne for $M_{k_j}(\mathbb{C})$. Lad $\beta_j \colon K_0(M_{k_j}(\mathbb{C})) \to G(n)$ være givet ved $\beta_j([e_{11}^{(i)}]_0) = 1/k_j$, således at $\mathrm{Im}(\beta_j) = \frac{1}{k_j}\mathbb{Z}$. Da

$$k_j \cdot K_0(\varphi_j)\left([e_{11}^{(j)}]_0\right) = K_0\left(\varphi_j\right)\,([1]_0) = [1]_0 = k_{j+1}[e_{11}^{(j+1)}]_0,$$

ses det, at $\beta_{j+1} \circ K_0(\varphi_j) = \beta_j$. Ifølge Sætning 6.7 findes en homomorfi $\beta \colon K_0(A) \to G(n)$, som opfylder $\beta \circ K_0(\mu_j) = \beta_j$, hvor $\mu_j \colon M_{k_j}(\mathbb{C}) \to A$ er *-homomorfierne hørende til den induktive grænse. Da alle β_j er injektive, er β injektiv, og β er surjektiv, da $G(n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Im}(\beta_j)$. Endelig har vi $\beta([1_A]_0) = \beta_1([1_{M_{k_1}(\mathbb{C})}]_0) = \beta_1(k_1[e_{11}^{(1)}]_0) = 1$. □

7.19 Definition

Til en UHF-algebra A, som er den induktive grænse af en følge

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots ,$$

knyttes det samme supernaturlige tal n, som i Definition 7.17 blev knyttet til følgen $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$. Det ses af Lemma 7.18 og af Sætning 7.16 (ii), at n ikke afhænger af valget af følgen, som repræsenterer A.

7.20 Sætning

(i) Lad A og A' være UHF-algebraer med tilhørende supernaturlige tal n, hhv. n'. Følgende fire betingelser er ækvivalente:

  (a) $A \cong A'$,

  (b) $n = n'$,

  (c) $(K_0(A), [1]_0) \cong (K_0(A'), [1]_0)$,

  (d) $(K_0(A), K_0(A)^+, [1]_0) \cong (K_0(A'), K_0(A')^+, [1]_0)$.

(ii) Til enhver undergruppe G af $\mathbb{Q}$, som indeholder 1, findes en UHF-algebra A, så $(K_0(A), [1]_0) \cong (G, 1)$.

(iii) Til ethvert supernaturligt tal n findes en UHF-algebra A, hvis associerede supernaturlige tal (jvf. Definition 7.19) er n.

Bevis: (i). Fra Lemma 7.18 (ii) kombineret med Sætning 7.16 (ii) ser vi, at (b) $\iff$ (c). Klassifikationssætningen 7.13 giver (d) $\iff$ (a), og implikationen (d) $\Rightarrow$ (c) er triviel.

Vi mangler nu kun at vise (c) $\implies$ (d). Vi viser hertil først, at hvis B er en UHF-algebra og hvis $g \in K_0(B)$, så er $g \in K_0(B)^+$ hvis og kun hvis der findes $k, l \in \mathbb{N}$, så $lg = k[1_B]_0$. Idet $K_0(B)$ er isomorf med en undergruppe af $\mathbb{Q}$ (se Lemma 7.18), findes til ethvert $g \in K_0(B)$ elementer $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, sådan at $lg = k[1_B]_0$. Da $K_0(B)$ er uperforeret (se Definition 7.7), ses det, at $g \in K_0(B)^+$ hvis $k \geqslant 0$, og at $-g \in K_0(B)^+$, hvis $k \leqslant 0$. Den positive kegle $K_0(B)^+$ er altså bestemt ud fra den algebraiske struktur af $K_0(B)$ og positionen af elementet $[1_B]_0$.

Det ses af ovenstående, at enhver gruppeisomorfi $\alpha\colon K_0(A) \to K_0(A')$, som opfylder $\alpha([1_A]_0) = [1_{A'}]_0$, automatisk vil opfylde $\alpha(K_0(A)^+) = K_0(A')^+$. Hermed er (c) $\implies$ (d) bevist.

(ii). Ifølge Sætning 7.16 er $G = G(n)$ for et supernaturligt tal $n = \{n_j\}_1^\infty$. Sæt

$$k_i = \prod_{j=1}^{i} p_j^{\max\{i,n_j\}}.$$

Så er n det supernaturlige tal associeret til følgen $\{k_j\}$ (jvf. Definition 7.17). Find enhedsbevarende *-homomorfier $\varphi_j\colon M_{k_j}(\mathbb{C}) \to M_{k_{j+1}}(\mathbb{C})$ (jvf. 7.14, eller mere direkte ved at lade φ_j være *-homomorfien, som fremkommer ved at afbilde et element x i $M_{k_j}(\mathbb{C})$ ind i det blok-diagonale element i $M_{k_{j+1}}(\mathbb{C})$, som har k_{j+1}/k_j kopier af x i diagonalen). Lad A være den induktive grænse af følgen

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots .$$

Så er $(K_0(A), [1]_0)$ isomorf med $(G(n), 1) = (G, 1)$ ifølge Lemma 7.18.

(iii). Beviset herfor er nærmest identisk med beviset for (ii). $\square$

Det følger nemt fra Sætning 7.16 og Sætning 7.20, at der findes overtælligt mange indbyrdes ikke-isomorfe abelske undergrupper af $\mathbb{Q}$ og dermed overtælligt mange indbyrdes ikke-isomorfe UHF-algebraer.