8 Om gruppen $K_1(A)$

8.1 Definition

Lad A være en C^*-algebra med enhed. Som i Afsnit 2 lader vi $\mathcal{U}(A)$ være gruppen af unitære elementer i A. Sæt $\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A))$ og sæt

$$\mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A).$$

Lad $1_n \in \mathcal{U}_n(A)$ benævne enheden i $M_n(A)$. Hvis $u \in \mathcal{U}_n(A)$ og $v \in \mathcal{U}_m(A)$, så sættes

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{n+m}(A).$$

Hermed defineres en binær operation på $\mathcal{U}_\infty(A)$, som klart er associativ.

Definér endvidere relationen $\sim$ på $\mathcal{U}_\infty(A)$ på følgende måde. Hvis $u \in \mathcal{U}_n(A)$ og $v \in \mathcal{U}_m(A)$, så er $u \sim v$, hvis og kun hvis der findes et $k \in \mathbb{N}$, som er større end eller lig med n og m, således at $u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}$ i $\mathcal{U}_k(A)$. Det ses let, at $\sim$ er en ækvivalensrelation.

8.2 Lemma

Lad A være en C^*-algebra med enhed.

(i) Hvis $u \in \mathcal{U}(A)$ og $\mathrm{sp}(u) \neq \mathbb{T}$, så er $u \sim_h 1$.

(ii) Hvis $u, v \in \mathcal{U}(A)$ og $\|u - v\| < 2$, så er $u \sim_h v$.

(iii) For alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $u, v \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ gælder $u \sim_h v$.

Bevis: (i). Antag $\theta \in \mathbb{R}$ og $e^{i\theta} \notin \mathrm{sp}(u)$. Definér $\varphi\colon \mathrm{sp}(u) \to \mathbb{R}$ ved $\varphi(e^{it}) = t$ for $\theta < t < \theta + 2\pi$. Bemærk, at φ er kontinuert, og at $z = e^{i\varphi(z)}$ for alle $z \in \mathrm{sp}(u)$. Det følger, at $h = \varphi(u) \in A$, $h = h^*$ og $u = e^{ih}$. Sætning 2.3 giver derfor, at $u \sim_h 1$.

(ii). Hvis $\|v^*u - 1\| < 2$, så har vi $-2 \notin \mathrm{sp}(v^*u - 1)$ og $-1 \notin \mathrm{sp}(v^*u)$. (i) giver derfor $v^*u \sim_h 1$ og således $u \sim_h v$.

(iii). Alle unitære elementer i $M_n(\mathbb{C})$ har endeligt spektrum, og det følger derfor af (i), at $u \sim_h 1 \sim_h v$. □

8.3 Lemma

Lad A være en C^*-algebra med enhed.

(i) For alle $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$ og for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder $u \sim u \oplus 1_n$.

(ii) For alle $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$ er $u \oplus v \sim v \oplus u$.

(iii) Hvis $u, u', v, v' \in \mathcal{U}_\infty(A)$ opfylder $u \sim u'$ og $v \sim v'$, så er $u \oplus v \sim u' \oplus v'$.

(iv) For alle $n \in \mathbb{N}$ og $u, v \in \mathcal{U}_n(A)$ har vi $uv \sim vu \sim u \oplus v$.

Bevis: (i) er triviel, og (iv) følger af Lemma 2.2.

(ii). Antag $u \in \mathcal{U}_n(A)$ og $v \in \mathcal{U}_m(A)$. Sæt

$$z = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{U}_{n+m}(\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{U}_{n+m}(A),$$

og check, at $z(u \oplus v)z^* = v \oplus u$. Ifølge Lemma 8.2 (iii) findes en kontinuert sti $t \mapsto z_t \in \mathcal{U}_{n+m}(\mathbb{C})$, så $z_0 = 1_{n+m}$ og $z_1 = z$. Stien $t \mapsto z_t(u \oplus v)z_t^*$ giver derfor en homotopi fra $u \oplus v$ til $v \oplus u$.

(iii). Det er nok at vise

(α) $\forall\, u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)\ \forall\, k, l \in \mathbb{N} :\ (u \oplus 1_k) \oplus (v \oplus 1_l) \sim u \oplus v$ og

(β) $\forall\, u, u' \in \mathcal{U}_n(A)\ \forall\, v, v' \in \mathcal{U}_m(A) :\ u \sim_h u'$ og $v \sim_h v' \Rightarrow u \oplus v \sim_h u' \oplus v'$.

(α) følger af (i), (ii) og af associativiteten af $\oplus$, og det er en let øvelse at vise (β)! □

8.4 Definition af K_1

Til enhver C^*-algebra A defineres

$$K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})/\sim .$$

Lad $[u]_1 \in K_1(A)$ være ækvivalensklassen indeholdende $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$. Definér en binær operation $+$ på $K_1(A)$ ved $[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1$. Denne operation er veldefineret, associativ og abelsk med neutralt element $[1]_1$ ($= [1_n]_1$) ifølge Lemma 8.3. Endelig giver Lemma 8.3 (iv), at

$$0 = [1_n]_1 = [uu^*]_1 = [u]_1 + [u^*]_1$$

for alle $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, så ethvert element i $K_1(A)$ har et inverst element. Med andre ord, $(K_1(A), +)$ er en abelsk gruppe.

På samme måde som i definitionen ovenfor kan man til enhver unital C^*-algebra A betragte $\mathcal{U}_\infty(A)/\sim$ med operationen $+$, og dette objekt bliver ligesom ovenfor en abelsk gruppe. Kald denne abelske gruppe $K_{11}(A)$, og lad $[u]_{11} \in K_{11}(A)$ være ækvivalensklassen indeholdende $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

Bemærk, at $K_{11}(A)$ kun er defineret for C^*-algebraer med enhed, og at $K_1(A) = K_{11}(\tilde{A})$ for alle C^*-algebraer A pr. definition.

8.5 Sætning

Hvis A er en C^*-algebra med enhed, så er $K_{11}(A) \cong K_1(A)$, og der findes en isomorfi $\rho\colon K_1(A) \to K_{11}(A)$, som får diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_1}"'] & \mathcal{U}_\infty(A) \arrow[d, "{[\,\cdot\,]_{11}}"] \\
K_1(A) \arrow[r, "\rho"'] & K_{11}(A)
\end{tikzcd}$$

til at kommutere. Afbildningen μ er ligesom i beviset for Lemma 4.3:

Sæt $f = 1_{\tilde{A}} - 1_A$, hvorved $\tilde{A} = \{a + \lambda f \mid a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, og definer $\mu\colon \tilde{A} \to A$ ved $\mu(a + \lambda f) = a$, hvor $a \in A$ og $\lambda \in \mathbb{C}$. Udvid μ til *-homomorfier $M_n(\tilde{A}) \to M_n(A)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og bemærk, at $\mu(\mathcal{U}_n(\tilde{A})) \subseteq \mathcal{U}_n(A)$, og at μ således giver en afbildning $\mu\colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \to \mathcal{U}_\infty(A)$.

Bevis: Idet $\mu\colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \to \mathcal{U}_\infty(A)$ klart er surjektiv, er det nok at vise

(α) $\forall u, v \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}):\ \mu(u) \sim \mu(v) \iff u \sim v$,

(β) $\forall u, v \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}):\ \mu(u \oplus v) = \mu(u) \oplus \mu(v)$.

Det er trivielt, at (β) holder. Da μ afbilder enheden i $M_n(\tilde{A})$ i enheden i $M_n(A)$, følger (α), hvis vi kan vise

(α') $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall u, v \in \mathcal{U}_n(\tilde{A}):\ \mu(u) \sim_h \mu(v) \iff u \sim_h v$.

Implikationen "$\Leftarrow$" i (α') er triviel. Antag $u, v \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$ og $\mu(u) \sim_h \mu(v)$ i $\mathcal{U}_n(A)$. Bestem $u_0, v_0 \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}f)$, sådan at $u = \mu(u) + u_0$ og $v = \mu(v) + v_0$. Ifølge Lemma 8.2 (iii) er $u_0 \sim_h v_0$ i $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}f)$, hvilket giver $u \sim_h v$. □

Vi skal fremover (af og til) identificere $K_{11}(A)$ og $K_1(A)$ for unitale C^*-algebraer A.

8.6 Bemærkning

Det følger af Sætning 2.5, at vi på en naturlig måde kan udvide afbildningen $[\,\cdot\,]_1\colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \to K_1(A)$ til

$$[\,\cdot\,]_1\colon \mathrm{GL}_\infty(\tilde{A}) \to K_1(A),$$

hvor $\mathrm{GL}_n(\tilde{A}) = \mathrm{GL}(M_n(\tilde{A}))$ og $\mathrm{GL}_\infty(\tilde{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n(\tilde{A})$; og hvis A har enhed, så kan afbildningen $[\,\cdot\,]_1 \colon \mathcal{U}_\infty(A) \to K_1(A)$ tilsvarende udvides til

$$[\,\cdot\,]_1 \colon \mathrm{GL}_\infty(A) \to K_1(A).$$

I begge tilfælde defineres udvidelsen sådan, at hvis $a \in \mathrm{GL}_n(\tilde{A})$ (hhv. $a \in \mathrm{GL}_n(A)$), så sættes $[a]_1 = [u]_1$, hvor $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$ (hhv. $u \in \mathcal{U}_n(A)$) er valgt, så $a \sim_h u$ i $\mathrm{GL}_n(\tilde{A})$ (hhv. i $\mathrm{GL}_n(A)$). Man kan f.eks. vælge $u = a(a^*a)^{-1/2}$.

8.7 Sætning (Standardbillede af K_1)

Lad A være en C^*-algebra (med eller uden enhed). Afbildningen $[\,\cdot\,]_1 \colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \to K_1(A)$ opfylder:

(i) $[u \oplus v]_1 = [u]_1 + [v]_1$,

(ii) $[\,1\,]_1 = 0$,

(iii) $u, v \in \mathcal{U}_n(\tilde{A}):\ u \sim_h v \Rightarrow [u]_1 = [v]_1$,

(iv) $u, v \in \mathcal{U}_n(\tilde{A}):\ [uv]_1 = [vu]_1 = [u]_1 + [v]_1$,

(v) $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}):\ [u]_1 = [v]_1 \iff u \sim v$.

Endvidere gælder

$$K_1(A) = \big\{[u]_1 \mid u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})\big\}.$$

Bevis: (i), (ii), (v) og den sidste påstand følger direkte af definitionen af gruppen $K_1(A)$. (iii) følger af (v), og (iv) følger af Lemma 8.3 (iv). $\square$

8.8 Sætning

Lad A være en C^*-algebra, lad G være en abelsk gruppe, og antag $\nu \colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \to G$ er en afbildning, som opfylder:

(i) $\nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v)$,

(ii) $\nu(1) = 0$,

(iii) $u, v \in \mathcal{U}_n(\tilde{A}) : u \sim_h v \Rightarrow \nu(u) = \nu(v)$.

Da findes netop én gruppehomomorfi $\alpha\colon K_1(A) \to G$, således at diagrammet

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \arrow[dl, "{[\,\cdot\,]_1}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_1(A) \arrow[rr, "\alpha"'] & & G \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Bevis: Betingelserne (i) og (ii) giver $\nu(1_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Antag $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, $v \in \mathcal{U}_m(\tilde{A})$ og $u \sim v$. Så findes $k \geqslant \max\{n, m\}$, så $u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}$ i $\mathcal{U}_k(\tilde{A})$. (i) og (iii) giver nu

$$\nu(u) = \nu(u \oplus 1_{k-n}) = \nu(v \oplus 1_{k-m}) = \nu(v).$$

Det følger heraf, at der findes en afbildning $\alpha\colon K_1(A) \to G$, som får diagrammet ovenfor til at kommutere. Idet

$$\alpha([u]_1 + [v]_1) = \alpha([u \oplus v]_1) = \nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v) = \alpha([u]_1) + \alpha([v]_1),$$

ser vi, at α er en gruppehomomorfi. α er entydig, fordi $[\,\cdot\,]_1$ er surjektiv. $\square$

8.9 Definition

Lad $\varphi\colon A \to B$ være en *-homomorfi mellem C^*-algebraerne A og B. Denne inducerer en *-homomorfi $\tilde{\varphi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$, som er enhedsbevarende, og $\tilde{\varphi}$ kan udvides til enhedsbevarende *-homomorfier $\tilde{\varphi}\colon M_n(\tilde{A}) \to M_n(\tilde{B})$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi får hermed en afbildning $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) \to \mathcal{U}_\infty(\tilde{B})$. Sæt

$$\nu(u) = [\tilde{\varphi}(u)]_1 \in K_1(B)\ , \quad u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}).$$

Det ses let, at ν opfylder (i), (ii) og (iii) i Sætning 8.8, og der findes derfor netop én gruppehomomorfi $K_1(\varphi)\colon K_1(A) \to K_1(B)$, som opfylder $K_1(\varphi)([u]_1) = [\tilde{\varphi}(u)]_1$ for alle $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})$.

Antag A og B er unitale, og at $\varphi\colon A \to B$ er en enhedsbevarende *-homomorfi. Identificeres K_{11} med K_1, så efterses det let, at $K_1(\varphi)([u]_1) = [\varphi(u)]_1$ for alle $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

8.10 Sætning (Funktorialitet af K_1)

K_1 er en funktor, idet der gælder

(i) $K_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_1(A)}$, og

(ii) hvis $\varphi\colon A \to B$ og $\psi\colon B \to C$ er *-homomorfier, så er

$$K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi).$$

Endvidere har vi

(iii) $K_1(0\colon A \to B) = 0\colon K_1(A) \to K_1(B)$,

(iv) hvis *-homomorfierne $\varphi, \psi\colon A \to B$ er homotope, så er $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$,

(v) hvis C^*-algebraerne A og B er homotopiækvivalente, så er $K_1(A) \cong K_1(B)$. Mere konkret, hvis $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ er en homotopi, så er $K_1(\varphi)\colon K_1(A) \to K_1(B)$ og $K_1(\psi)\colon K_1(B) \to K_1(A)$ isomorfier og hinandens inverse.

Bevis: (i) og (ii) overlades til læseren!

(iii). Lad $\varphi\colon A \to B$ være nulafbildningen. Den inducerede afbildning $\tilde{\varphi}\colon M_n(\tilde{A}) \to M_n(\tilde{B})$ er da givet ved $\tilde{\varphi}(a) = s(a) \in M_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\tilde{B})$, hvor s er skalar-afbildningen, se Definition 4.10. Lemma 8.2 (iii) giver nu

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\tilde{\varphi}(u)]_1 = [s(u)]_1 = [1_n]_1 = 0$$

for alle $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$.

(iv). Hvis $\varphi, \psi\colon A \to B$ er homotope, så er $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\colon M_n(\tilde{A}) \to M_n(\tilde{B})$ ligeledes homotope, hvorfor $\tilde{\varphi}(u) \sim_h \tilde{\psi}(u)$ for alle $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$. Dette viser, at

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\tilde{\varphi}(u)]_1 = [\tilde{\psi}(u)]_1 = K_1(\psi)([u]_1),$$

og dermed $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.

(v) følger af (iv), (i) og (ii). □

8.11 Lemma

Lad $\varphi\colon A \to B$ være en *-homomorfi, og lad $g \in \mathrm{Ker}(K_1(\varphi))$.

(i) Der findes $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, så $g = [u]_1$ og $\tilde{\varphi}(u) \sim_h 1$.

(ii) Hvis φ er surjektiv, så findes $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, så $g = [u]_1$ og $\tilde{\varphi}(u) = 1$.

Bevis: (i). Skriv $g = [v]_1$, hvor $v \in \mathcal{U}_m(\tilde{A})$. Da har vi $[\tilde{\varphi}(v)]_1 = 0 = [1_m]_1$, hvilket implicerer, at der findes $n \geqslant m$, sådan at $\tilde{\varphi}(v) \oplus 1_{n-m} \sim_h 1_m \oplus 1_{n-m} = 1_n$. Sæt $u = v \oplus 1_{n-m}$. Da er $[u]_1 = [v]_1 = g$ og $\tilde{\varphi}(u) = \tilde{\varphi}(v) \oplus 1_{n-m} \sim_h 1_n$.

(ii). Ifølge (i) findes $v \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$ sådan at $g = [v]_1$ og $\tilde{\varphi}(v) \sim_h 1$. Lemma 2.4 giver, at $\tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(v)$ for et $w \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, som er homotop med 1. Det ses nu, at $u = w^*v$ har de ønskede egenskaber. □

8.12 Sætning (Halv-eksakthed)

Enhver kort-eksakt følge af C^*-algebraer

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

inducerer en eksakt følge

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B),$$

dvs. $\mathrm{Im}(K_1(\varphi)) = \mathrm{Ker}(K_1(\psi))$.

Bevis: Sætning 8.10 (ii) og (iii) giver $K_1(\psi) \circ K_1(\varphi) = 0$, da $\psi \circ \varphi = 0$, og vi har dermed $\mathrm{Im}(K_1(\varphi)) \subseteq \mathrm{Ker}(K_1(\psi))$.

Antag $g \in \mathrm{Ker}(K_1(\psi))$. Ifølge Lemma 8.11 (ii) findes $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, så $g = [u]_1$ og $\tilde{\psi}(u) = 1$, og ved at benytte Lemma 4.12 findes $v \in \mathcal{U}_n(\tilde{I})$, så $\tilde{\varphi}(v) = u$. Vi har derfor $[v]_1 \in K_1(I)$ og $K_1(\varphi)([v]_1) = [\tilde{\varphi}(v)]_1 = [u]_1 = g$ som ønsket. $\square$

De to nedenstående sætninger anføres uden bevis, idet beviserne for de analoge resultater for K_0 (Sætningerne 4.14 og 4.15) næsten kan overføres til den nuværende situation (overvej dette!). Endvidere vil disse resultater faktisk følge af de tilsvarende resultater for K_0 ved hjælp af isomorfien $K_1(A) \cong K_0(SA)$, som vises i Kapitel 10. Se også Opgave 12.4.

8.13 Sætning (Split-eksakthed)

Enhver split-eksakt følge af C^*-algebraer

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[r, shift left, "\psi"] & B \arrow[l, shift left, "\tau"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

inducerer en split-eksakt følge

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, shift left, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[l, shift left, "K_1(\tau)"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

8.14 Sætning

For ethvert par af C^*-algebraer A og B gælder

$$K_1(A \oplus B) \cong K_1(A) \oplus K_1(B).$$

Mere konkret, hvis $\iota_A\colon A \to A \oplus B$ og $\iota_B\colon B \to A \oplus B$ er de kanoniske inklusionsafbildninger, så er afbildningen

$$K_1(\iota_A) \oplus K_1(\iota_B)\colon K_1(A) \oplus K_1(B) \to K_1(A \oplus B)$$

$$(g, h) \mapsto K_1(\iota_A)(g) + K_1(\iota_B)(h)$$

en isomorfi.

8.15 Sætning (Stabilitet af K_1)

Lad A være en C^*-algebra og lad $n \in \mathbb{N}$. Lad $\lambda_{n,A}\colon A \to M_n(A)$ være som i Sætning 4.16. Da er $K_1(\lambda_{n,A})\colon K_1(A) \to K_1(M_n(A))$ en isomorfi.

Beviset er givet i Opgave 10.9.

8.16 Eksempel

$K_1(\mathbb{C}) = K_1(M_n(\mathbb{C})) = K_1(B(H)) = 0$.

Bevis: Bemærk først, at $\mathcal{U}_k(M_n(\mathbb{C})) = \mathcal{U}(M_k(M_n(\mathbb{C})))$ og $M_k(M_n(\mathbb{C})) = M_{nk}(\mathbb{C})$. Lemma 8.2 (iii) giver derfor, at $u \sim_h 1$ og dermed $[u]_1 = 0$ i $K_1(M_n(\mathbb{C}))$ for alle $u \in \mathcal{U}_\infty(M_n(\mathbb{C}))$. Dette viser, at $K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$.

Lad $u \in \mathcal{U}_n(B(H))$. Da $M_n(B(H)) \cong B(H^n)$, kan vi betragte u som en unitær på H^n. Definér $\varphi\colon \mathbb{T} \to [0, 2\pi[$ ved

$$\varphi(e^{i\theta}) = \theta\ , \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

φ er en Borel-funktion, og $z = e^{i\varphi(z)}$ for alle $z \in \mathbb{T}$. Borel-funktionskalkylen for normale operatorer på $B(H)$ (se [Kadison & Ringrose, Sætning 5.2.8]) giver $\varphi(u) = \varphi(u)^* \in B(H^n)$ og $u = \exp(i\varphi(u))$. Sætning 2.3 giver derfor $u \sim_h 1$, så $[u]_1 = 0$, hvilket viser, at $K_1(B(H)) = 0$. □

8.17 Bemærkning

Lad A være en C^*-algebra med enhed. Afbildningen $[\,\cdot\,]_1\colon \mathcal{U}(A) \to K_1(A)$ er en gruppehomomorfi ifølge Sætning 8.7 (iv), og dens kerne indeholder $\mathcal{U}_0(A)$ ifølge Sætning 8.7 (ii) og (iii). Der findes derfor en gruppehomomorfi

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A) \arrow[rr, dashed] & & K_1(A) \\ & \mathcal{U}(A) \arrow[ul] \arrow[ur, "{[\,\cdot\,]_1}"'] & \end{tikzcd}$$

som giver et kommutativt diagram. Homomorfien $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A) \to K_1(A)$ er generelt hverken injektiv eller surjektiv, men er faktisk begge dele i mange interessante tilfælde.

8.18 Determinanter

Antag A er en abelsk C^*-algebra med enhed. Vi kan hertil for alle $n \in \mathbb{N}$ definere en afbildning $D\colon M_n(A) \to A$, som generaliserer den klassiske determinant $\mathrm{Det}\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, ved

$$D\Big(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\Big) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}.$$

hvor S_n er den n'te symmetriske gruppe, dvs. mængden af permutationer af tallene $1, 2, \ldots, n$.

Som i tilfældet $A = \mathbb{C}$ har vi

$$\begin{aligned} D(ab) &= D(a)D(b)\ , && a, b \in M_n(A) \\ D\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\Big) &= D(a)D(b)\ , && a \in M_n(A),\ b \in M_m(A), \\ D(a^*) &= D(a)^*\ , && a \in M_n(A), \\ D(a) &= a\ , && a \in A, \end{aligned}$$

og afbildningen $a \mapsto D(a)$ er kontinuert. Det følger heraf, at D afbilder $\mathcal{U}_\infty(A)$ ind i $\mathcal{U}(A)$ og

$$\begin{aligned} D\Big(\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\Big) &= D(u) \cdot D(v), && u \in \mathcal{U}_n(A),\ v \in \mathcal{U}_m(A), \\ u \sim_h v &\Rightarrow D(u) \sim_h D(v), && u, v \in \mathcal{U}_n(A). \end{aligned}$$

Det følger derfor af Sætning 8.8, at der findes en gruppehomomorfi Δ :

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A) \\ {\scriptstyle [\,\cdot\,]_1}\uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{U}_\infty(A) & \xrightarrow[D]{} & \mathcal{U}(A) \end{array}$$

Sammenholdt med 8.17 viser dette følgende sætning.

8.19 Sætning

Lad A være en abelsk C^*-algebra med enhed. Så er sammensætningen af afbildningerne

$$\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A) \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A)$$

lig med identiteten på $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A)$. Specielt er afbildningen $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A) \to K_1(A)$ injektiv, $\Delta\colon K_1(A) \to \mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A)$ er surjektiv, følgen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\Delta) \xrightarrow{\iota} K_1(A) \overset{\Delta}{\rightleftarrows} \mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A) \longrightarrow 0$$

er split-eksakt, og $K_1(A)$ er isomorf med $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}_0(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Delta)$.

8.20 Eksempel

$\mathcal{U}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{U}_0(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$ og dermed $K_1(C(\mathbb{T})) \neq 0$.

Vi viser senere, at $\Delta\colon K_1(C(\mathbb{T})) \to \mathcal{U}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{U}_0(C(\mathbb{T}))$ er en isomorfi, og $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$.

Bevis: Vindingstallet inducerer en afbildning $w\colon \mathcal{U}(C(\mathbb{T})) \to \mathbb{Z}$ på følgende måde. Til ethvert $u \in \mathcal{U}(C(\mathbb{T}))$ findes en kontinuert funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, som opfylder

$$(\star) \qquad u\left(e^{2\pi i t}\right) = e^{2\pi i\, f(t)}\ , \quad t \in [0,1].$$

Hvis $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ begge opfylder $(\star)$, så er $f - g$ konstant (og denne konstant er et helt tal). Sæt

$$w(u) = f(1) - f(0) \in \mathbb{Z}.$$

Vindingstallet $w(\cdot)$ opfylder

$$\begin{aligned} &u \sim_h v \iff w(u) = w(v), \\ &w(uv) = w(u) + w(v), \end{aligned}$$

og $w\colon \mathcal{U}(C(\mathbb{T})) \to \mathbb{Z}$ er surjektiv. Der induceres derfor en isomorfi:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(C(\mathbb{T})) \arrow[rr, "w"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z} \\ & \mathcal{U}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{U}_0(C(\mathbb{T})) \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

□

8.21 Opgave

Vis, at $K_1(A) = 0$ for enhver AF-algebra A. [Det kan være en hjælp først at vise, at hvis A er en AF-algebra, så er $M_n(\tilde{A})$ også en AF-algebra.]

8.22 Opgave

Vis, at $K_1(\mathcal{M}) = 0$ for enhver von Neumann-algebra $\mathcal{M}$.

8.23 Opgave

Lad X være et kompakt kontraktibelt Hausdorffrum. Vis at $K_1(C(X)) = 0$.

8.24 Opgave

Vis at $K_1(CA) = 0$, hvor CA er keglen af A.

8.25 Opgave

Det må i denne opgave benyttes, at $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$. Bestem $K_1(C_0(\mathbb{R}))$. Bestem $K_1(C_0(U))$, hvor $U = [-3, 0] \cup (1, 3) \cup (5, 6) \cup (8, 11] \cup \{15\}$.

8.26 Opgave

Vis, at $K_1(A)$ er en tællelig abelsk gruppe, hvis A er en separabel C^*-algebra.

8.27 Opgave

Lad A og B være unitale C^*-algebraer, og lad $\varphi\colon A \to B$ være en surjektion $*$-homomorfi. Lad $u \in \mathcal{U}_n(B)$. Vis at $[u]_1 \in \mathrm{Im}(K_1(\varphi))$ hvis og kun hvis der findes $m \geqslant n$ og $v \in \mathcal{U}_m(A)$ således at $\varphi(v) = u \oplus 1_{m-n}$.

8.28 Opgave

Opfind et vindingstal $w\colon C(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{Z}^n$ som giver en isomorfi:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}(C(\mathbb{T}^n)) \arrow[rr, "w"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}^n \\
& \mathcal{U}(C(\mathbb{T}^n))/\mathcal{U}_0(C(\mathbb{T}^n)) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

8.29 Opgave

Giv et bevis for Sætning 8.13 analogt til beviset for Sætning 4.14.