9 Index-afbildningen

Vores mål er til enhver kort-eksakt følge af C^*-algebraer

$$(\star)\qquad 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

at knytte en gruppehomomorfi $\delta_1\colon K_1(B) \to K_0(I)$, kaldet *indexafbildningen*, som giver en eksakt følge

$$(\star\star)\qquad K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B).$$

Indexafbildningen defineres i nedenstående tre trin.

9.1 Lemma

Lad $(\star)$ være som ovenfor. Til hvert $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$ findes $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ og $p \in P_{2n}(\tilde{I})$, så

$$\tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.$$

Hvis p er som ovenfor, så er

$$s(p) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hvis $w \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ og $q \in P_{2n}(\tilde{I})$ er et andet par som opfylder

$$\tilde{\psi}(w) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varphi}(q) = w \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w^*,$$

så er $p \sim_u q$ i $P_{2n}(\tilde{I})$.

Bevis: Lad $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$. Ifølge Lemma 2.4 findes $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$, så $\tilde{\psi}(v) = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{smallmatrix}\right)$. Da

$$\tilde{\psi}\Big(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*\Big) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

giver Lemma 4.12 at der findes $p \in M_{2n}(\tilde{I})$, så $\tilde{\varphi}(p) = v\left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)v^*$. Lemma 4.12 siger endvidere, at $\tilde{\varphi}$ er injektiv, og p er derfor en projektion. Det ses også, at

$$s(p) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(p)) = \tilde{\psi}\Big(v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*\Big) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dette viser første del af lemmaet.

Lad $w \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ og $q \in P_{2n}(\tilde{I})$ være som i lemmaets andel del. Da er $\tilde{\psi}(wv^*) = 1_{2n}$. Lemma 4.12 (i) og (ii) viser, at der findes en unitær $z \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{I})$, så $\tilde{\varphi}(z) = wv^*$. Det ses nu, at $\tilde{\varphi}(zpz^*) = \tilde{\varphi}(q)$. Da $\tilde{\varphi}$ er injektiv, giver dette, at $q = zpz^*$, og $p \sim_u q$ i $\mathcal{U}_{2n}(\tilde{I})$ som ønsket. □

Definer $\nu \colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{B}) \to K_0(I)$ ved $\nu(u) = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$, hvor $p \in P_{2n}(\tilde{I})$ er som i Lemma 9.1. Bemærk, at anden del af Lemma 9.1 viser, at ν er veldefineret.

9.2 Lemma

Om $\nu \colon \mathcal{U}_\infty(\tilde{B}) \to K_0(I)$ gælder:

(i) $\nu(u_1 \oplus u_2) = \nu(u_1) + \nu(u_2)$,

(ii) $\nu(1) = 0$,

(iii) $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_n(\tilde{B}) : u_1 \sim_h u_2 \Rightarrow \nu(u_1) = \nu(u_2)$,

(iv) $u \in \tilde{\psi}(\mathcal{U}_\infty(\tilde{A})) : \nu(u) = 0$,

(v) $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{B}) : K_0(\varphi)(\nu(u)) = 0$.

Bevis: (i). Antag $u_j \in \mathcal{U}_{n_j}(\tilde{B})$, $v_j \in \mathcal{U}_{2n_j}(\tilde{A})$ og $p_j \in P_{2n_j}(\tilde{I})$ opfylder

$$\tilde{\psi}(v_j) = \begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & u_j^* \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varphi}(p_j) = v_j \begin{pmatrix} 1_{n_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_j^*, \quad j = 1, 2.$$

Så er $\nu(u_j) = [p_j]_{00} - [s(p_j)]_{00}$. Sæt

$$y = \begin{pmatrix} 1_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & 0 \\ 0 & 1_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{2(n_1+n_2)}(\mathbb{C}), \quad v = y \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} y^*, \quad p = y \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} y^*.$$

Da er

$$\tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u_1 & & & 0 \\ & u_2 & & \\ & & u_1^* & \\ 0 & & & u_2^* \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varphi}(p) = y\tilde{\varphi}(\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix})y^* = v \begin{pmatrix} 1_{n_1+n_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.$$

Dette giver

$$\nu(u_1 \oplus u_2) = [p]_{00} - [s(p)]_{00} = [p_1 \oplus p_2]_{00} - [s(p_1 \oplus p_2)]_{00} = \nu(u_1) + \nu(u_2).$$

(iii). Find først $v_1 \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ og $p_1 \in P_{2n}(\tilde{I})$, så

$$\tilde{\psi}(v_1) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varphi}(p_1) = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*,$$

hvorved $\nu(u_1) = [p_1]_{00} - [s(p_1)]_{00}$. Da $u_1 \sim_h u_2$, er $u_1^* u_2 \sim_h 1 \sim_h u_1 u_2^*$, og ifølge Lemma 2.4 kan vi derfor finde $a, b \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$, så $\tilde{\psi}(a) = u_1^* u_2$ og $\tilde{\psi}(b) = u_1 u_2^*$. Sæt

$$v_2 = v_1 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Så er

$$\tilde{\psi}(v_2) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & u_2^* \end{pmatrix}, \qquad v_2 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2^* = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^* = \tilde{\varphi}(p_1),$$

hvilket implicerer $\nu(u_2) = [p_1]_{00} - [s(p_1)]_{00} = \nu(u_1)$. Hermed er (iii) vist.

(iv). Antag $u = \tilde{\psi}(w)$, hvor $w \in \mathcal{U}_n(\tilde{A})$. Sæt

$$v = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^* \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A}), \qquad p = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{2n}(\tilde{I}).$$

Da opfylder v og p betingelserne i Lemma 9.1, og $p = s(p)$, så $\nu(u) = [p]_{00} - [s(p)]_{00} = 0$.

(ii) følger klart af (iv), og (v) følger let udfra definitionen af ν. □

9.3 Sætning (Eksistens af indexafbildningen)

Til enhver korteksakt følge

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

findes en gruppehomomorfi $\delta_1 \colon K_1(B) \to K_0(I)$ med følgende egenskab: Hvis $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$, $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ og $p \in P_{2n}(\tilde{I})$ opfylder

$$\tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*,$$

(jvf. Lemma 9.1), så er $\delta_1([u]_1) = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$.

Endvidere gælder

(vi) $\delta_1 \circ K_1(\psi) = 0$,

(vii) $K_0(\varphi) \circ \delta_1 = 0$.

Bevis: Det følger af Lemma 9.2 (i), (ii) og (iii) og af Sætning 8.8, at der findes en gruppehomomorfi $\delta_1 \colon K_1(B) \to K_0(I)$, som opfylder $\delta_1([u]_1) = \nu(u)$ for alle $u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{B})$. Det vil specielt sige, at hvis $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$, $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ og $p \in P_{2n}(\tilde{I})$ er som angivet, så er $\delta_1([u]_1) = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$. Påstandene (vi) og (vii) følger af Lemma 9.2 (iv) og (v). $\square$

9.4 Sætning

Index-afbildningen $\delta_1 \colon K_1(B) \to K_0(I)$ gør følgen $(\star\star)$ ovenfor eksakt ved $K_1(B)$ og ved $K_0(I)$, dvs. $\mathrm{Im}(K_1(\psi)) = \mathrm{Ker}(\delta_1)$ og $\mathrm{Im}(\delta_1) = \mathrm{Ker}(K_0(\varphi))$.

Sætning 9.4 følger af (vi) og (vii) i Sætning 9.3 samt af Lemma 9.5 og Lemma 9.6 nedenfor.

9.5 Lemma

Hvis $g \in K_1(B)$ og $\delta_1(g) = 0$, så findes $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$ og $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$, således at

$$g = [u]_1, \qquad \tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \qquad v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der gælder videre, at $g \in \mathrm{Im}(K_1(\psi))$.

Bevis: Find $m \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathcal{U}_m(\tilde{B})$, $v_0 \in \mathcal{U}_{2m}(\tilde{A})$ og $p_0 \in P_{2m}(\tilde{I})$, så $g = [u_0]_1$ og

$$\tilde{\psi}(v_0) = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_0^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(p_0) = v_0 \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_0^*, \quad s(p_0) = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da er $0 = \delta_1(g) = [p_0]_{00} - [s(p_0)]_{00}$. Vi kan finde $k \in \mathbb{N}$, så $p_0 \oplus 1_k \sim s(p_0) \oplus 1_k$ i $M_{2m+k}(\tilde{I})$ (jvf. 4.11). Sætning 2.14 (ii) giver herefter, at projektionerne $p_0 \oplus 1_k \oplus 0_{2m+k}$ og $s(p_0) \oplus 1_k \oplus 0_{2m+k}$ er unitært ækvivalente i $M_{4m+2k}(\tilde{I})$. Sæt $r = 2m+k$, og sæt $n = m+r$. Da er $p_0 \oplus 1_r \oplus 0_r$ og $s(p_0) \oplus 1_r \oplus 0_r$ unitært ækvivalente i $M_{2n}(\tilde{I})$ (fordi $r \geqslant k$), så der findes $z_0 \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{I})$, som opfylder $z_0 p z_0^* = s(p)$, hvor

$$p = \left(\begin{array}{c|c} p_0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1_r & 0_r \\ 0_r & 0_r \end{smallmatrix} \end{array}\right), \quad s(p) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1_m & 0_m \\ 0_m & 0_m \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1_r & 0_r \\ 0_r & 0_r \end{smallmatrix} \end{array}\right) \in P_{2n}(\tilde{I}).$$

Sæt $z = s(z_0)^* z_0 \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{I})$. Bemærk, at $1 = s(z) = (\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})(z)$. Endvidere, da $s(z_0)s(p)s(z_0)^* = s(z_0 p z_0^*) = s(p)$, har vi $zpz^* = s(p)$.

Vi er nu klar til at konstruere u og v. Matricerne drejes på plads ved hjælp af nedenstående permutationsmatrix:

$$y = \begin{pmatrix} 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & 1_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_r \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{2n}(\mathbb{C}),$$

$$u = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & 1_r \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_n(\tilde{B}), \qquad v = y\,\tilde{\varphi}(z) \begin{pmatrix} v_0 & 0 \\ 0 & 1_{2r} \end{pmatrix} y^* \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A}).$$

Bemærk at $[u]_1 = [u_0]_1 = g$. At resten af kabalen går op ses af nedenstående udregninger:

$$\begin{aligned}
ys(p)y^* &= \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\psi}(v) &= \tilde{\psi}\left(y \begin{pmatrix} v_0 & 0 \\ 0 & 1_{2r} \end{pmatrix} y^*\right) = y \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_0^* \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 1_{2r} \end{array}\right) y^* = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \\
v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* &= y\tilde{\varphi}(z) \begin{pmatrix} v_0 & 0 \\ 0 & 1_{2r} \end{pmatrix} s(p) \begin{pmatrix} v_0^* & 0 \\ 0 & 1_{2r} \end{pmatrix} \tilde{\varphi}(z^*)y^* \\
&= y\tilde{\varphi}(z)\ \tilde{\varphi}(p)\ \tilde{\varphi}(z^*)y^* = \tilde{\varphi}(ys(p)y^*) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Relationen $v\left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)v^* = \left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ medfører, at $v = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ for passende $a, b \in M_n(A)$ (overvej dette!!). Da v er unitær, må a og b også være unitære. Men så er $u = \tilde{\psi}(a)$. Dette viser, at $g = [u]_1 = [\tilde{\psi}(a)]_1 = K_1(\tilde{\psi})([a]_1)$. □

9.6 Lemma

Hvis $g \in K_0(I)$ og $K_0(\varphi)(g) = 0$, så findes $n \in \mathbb{N}$, $p \in P_{2n}(\tilde{I})$, $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A})$ og $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{B})$, sådan at

$$g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}, \quad \tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.$$

Det følger specielt, at $g = \delta_1([u]_1)$.

Bevis: Ifølge Sætning 4.11 (iv) findes $m \in \mathbb{N}$, $p_1 \in P_m(\tilde{I})$ og $v_1 \in \mathcal{U}_m(\tilde{A})$, så $g = [p_1]_{00} - [s(p_1)]_{00}$ og $v_1\tilde{\varphi}(s(p_1))v_1^* = \tilde{\varphi}(p_1)$. Vi skal i tre trin (to små og et større) pynte på denne fremstilling af g.

Lad d være dimensionen af projektionen $s(p_1) \in M_m(\mathbb{C})$, og sæt

$$p_2 = \left(\begin{array}{c|c} p_1 & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1_{m-d} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) \in P_{2m}(\tilde{I}), \qquad v_2 = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{2m}(\tilde{A}).$$

Så er

$$g = [p_2]_{00} - [s(p_2)]_{00}, \qquad \dim(s(p_2)) = m, \qquad v_2\tilde{\varphi}(s(p_2))v_2^* = \tilde{\varphi}(p_2).$$

Find $z \in \mathcal{U}_{2m}(\mathbb{C})$, så $zs(p_2)z^* = \left(\begin{smallmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Sæt $p_3 = zp_2z^*$ og $v_3 = zv_2z^*$. Da har vi

$$g = [p_3]_{00} - [s(p_3)]_{00}, \qquad s(p_3) = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_3^* = \tilde{\varphi}(p_3).$$

Bemærk, at

$$\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = s(p_3) = (\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})(p_3) = \tilde{\psi}(v_3) \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\psi}(v_3^*).$$

Ligesom i beviset for Lemma 9.5 betyder dette, at $\tilde{\psi}(v_3) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ for passende $a, b \in \mathcal{U}_m(\tilde{B})$. Da

$$\tilde{\psi}(v_3^*) = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & b^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} b^*a^* & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix},$$

findes $w \in \mathcal{U}_{2m}(\tilde{A})$, så $\tilde{\psi}(w) = \left(\begin{smallmatrix} b^*a^* & 0 \\ 0 & 1_m \end{smallmatrix}\right)$, jvf. Lemma 2.4 (ii).

Vi kan nu fortælle hvad p, v og u skal være. Sæt $n = 2m$. Som i beviset for Lemma 9.5 skal matricerne drejes på plads med en permutationsmatrix:

$$y = \begin{pmatrix} 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_m & 0 \\ 0 & 1_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_m \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{2n}(\mathbb{C}),$$

$$p = y \left(\begin{array}{c|c} p_3 & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) y^*, \quad v = y \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} y^* \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}.$$

Da er $g = [p]_{00} - [s(p)]_{00}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(v) &= y \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 1_n \end{array}\right) y^* \left(\begin{array}{c|c} 1_n & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} b^*a^* & 0 \\ 0 & 1_m \end{smallmatrix} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_m \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & 1_m \end{smallmatrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1_n & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} b^*a^* & 0 \\ 0 & 1_m \end{smallmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \\
\tilde{\varphi}(p) &= y \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\varphi}(p_3) & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) y^* = y \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) \begin{pmatrix} v_3^* & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} y^* \\
&= vy \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) y^*v^* = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*.
\end{aligned}$$

□

9.7 Sætning

Lad

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

være en kort-eksakt følge af C^*-algebraer, og antag, at A (og dermed B og ψ) er unitale. Lad $\bar{\varphi}\colon \tilde{I} \to A$ være homomorfien givet ved $\bar{\varphi}(x + \alpha 1) = \varphi(x) + \alpha 1_A$, $x \in I$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) Hvis $u \in \mathcal{U}_n(B)$, $v \in \mathcal{U}_{2n}(A)$ og $p \in P_{2n}(\tilde{I})$ opfylder

$$\psi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_{M_n(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*,$$

så er $\delta_1([u]_1) = [p]_{00} - [\left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)]_{00}$.

(ii) Lad $u \in \mathcal{U}_n(B)$ og antag, at der findes en partiel isometri $s \in M_n(A)$, så $\psi(s) = u$. Da findes projektioner $e, f \in M_n(I)$, så $\varphi(e) = 1_{M_n(A)} - s^*s$, $\varphi(f) = 1_{M_n(A)} - ss^*$, og

$$\delta_1([u]_1) = [e]_0 - [f]_0.$$

Bevis: (i). Lad 1_n betegne enheden i de tre C^*-algebraer $M_n(\tilde{I})$, $M_n(\tilde{A})$ og $M_n(\tilde{B})$, og bemærk at $\psi(1_{M_n(A)}) = 1_{M_n(B)}$. Sæt

$$u_1 = u + \big(1_n - \psi(1_{M_n(A)})\big) \in \mathcal{U}_n(\tilde{B}), \quad v_1 = v + \begin{pmatrix} 1_n - 1_{M_n(A)} & 0 \\ 0 & 1_n - 1_{M_n(A)} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{A}).$$

Da har vi $[u_1]_1 = [u]_1$ i $K_1(B)$, $\tilde{\psi}(v_1) = \left(\begin{smallmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^* \end{smallmatrix}\right)$ og

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(p) &= \varphi\big(p - \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\big) + \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \bar{\varphi}(p) + \begin{pmatrix} 1_n - 1_{M_n(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1^*.\end{aligned}$$

Dette viser, at $\delta_1([u]_1) = \delta_1([u_1]_1) = [p]_{00} - [\left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)]_{00}$.

(ii). Sæt

$$v = \begin{pmatrix} s & 1_{M_n(A)} - ss^* \\ 1_{M_n(A)} - s^*s & s^* \end{pmatrix},$$

og check, at v er unitær i $\mathcal{U}_{2n}(A)$ og at $\psi(v) = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{smallmatrix}\right)$. Antagelsen, at s er en partiel isometri, betyder, at $1_{M_n(A)} - s^*s$ og $1_{M_n(A)} - ss^*$ er projektioner. Endvidere, da $\psi(1_{M_n(A)} - s^*s) = \psi(1_{M_n(A)} - ss^*) = 0$, findes projektioner $e, f \in P_n(I)$, så $\varphi(e) = 1_{M_n(A)} - s^*s$ og $\varphi(f) = 1_{M_n(A)} - ss^*$. Sæt

$$p = \begin{pmatrix} 1_n - f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \in P_{2n}(\tilde{I}).$$

Da er

$$\bar{\varphi}(p) = \begin{pmatrix} ss^* & 0 \\ 0 & 1_{M_n(A)} - s^*s \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1_{M_n(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*,$$

hvilket ifølge (i) medfører, at $\delta_1([u]_1) = [p]_{00} - [\left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)]_{00} = [e]_0 - [f]_0$. $\square$

Fredholmoperatorer og Fredholmindex

Lad H være et uendelig-dimensionalt separabelt Hilbertrum, lad $\mathcal{K}$ være de kompakte operatorer på H, lad $Q(H) = B(H)/\mathcal{K}$ være Calkin-algebraen, og lad $\pi\colon B(H) \to Q(H)$ være kvotient-afbildningen. Vi har så den kort-eksakte følge

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} Q(H) \longrightarrow 0.$$

Vi viser først, at

9.8 Sætning

$K_0(\mathcal{K})$ er isomorf med $\mathbb{Z}$. Mere konkret, hvis Tr er det ubegrænsede spor på $B(H)$, normaliseret ved Tr(E)=1, hvis E er en én-dimensional projektion på H, så defineres der ved

$$K_0(\mathrm{Tr})([E]_0 - [F]_0) = \mathrm{Tr}(E) - \mathrm{Tr}(F) \quad (= \dim(E(H)) - \dim(F(H)))$$

en isomorfi $K_0(\mathrm{Tr})\colon K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$.

Bevis: Betragt den induktive følge

$$(\star) \qquad \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_1} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots ,$$

hvor $\varphi_n(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ for $a \in M_n(\mathbb{C})$. Vælg en voksende følge af projektioner $\{E_n\}_1^\infty$ i $B(H)$, så $E_n \to 1$ i den stærke topologi, og så $\dim(E_n(H)) = n$. (E_n kan f.eks. vælges til at være projektionen på underrummet udspændt af de n første basisvektorer i en ortonormalbasis for H indiceret ved $\mathbb{N}$.) Find isomorfier $\mu_n\colon M_n(\mathbb{C}) \to E_n B(H) E_n$, sådan at $\mu_{n+1} \circ \varphi_n = \mu_n$. Da

$$\mathcal{K} = \overline{\bigcup_1^\infty E_n \, B(H) E_n},$$

ses det, at $\mathcal{K}$ er isomorf med den induktive grænse af følgen $(\star)$.

Lad Tr_n betegne det sædvanlige spor på $M_n(\mathbb{C})$ og lad som ovenfor Tr være sporet på $B(H)$. Bemærk at $\mathrm{Tr}_{n+1} \circ \varphi_n = \mathrm{Tr}_n$ og $\mathrm{Tr} \circ \mu_n = \mathrm{Tr}_n$. Det er vist i Eksempel 3.10, at $K_0(\mathrm{Tr}_n)\colon K_0(M_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z}$ er en isomorfi for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $K_0(\mathrm{Tr}_{n+1}) \circ K_0(\varphi_n) = K_0(\mathrm{Tr}_n)$, findes ifølge den universelle egenskab for induktive grænser en isomorfi $\alpha\colon K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$, som opfylder $\alpha \circ K_0(\mu_n) = K_0(\mathrm{Tr}_n)$.

Lad $E \in \mathcal{K}$ være en projektion. Ifølge Sætning 2.18 (i) findes en projektion $E_0 \in \bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(M_n(\mathbb{C}))$, således at $E \sim E_0$, dvs. $E \sim \mu_n(p)$ for et passende $n \in \mathbb{N}$ og en passende projektion $p \in M_n(\mathbb{C})$. Heraf følger, at

$$\alpha([E]_0) = \alpha([\mu_n(p)]_0) = K_0(\mathrm{Tr}_n)([p]_0) = \mathrm{Tr}_n(p) = \mathrm{Tr}(\mu_n(p)) = \mathrm{Tr}(E) = \dim(E(H)).$$

Vi har derfor $\alpha = K_0(\mathrm{Tr})$.

□

9.9 Sætning (Atkinson)

Følgende tre betingelser for en operator $T \in B(H)$ er ækvivalente.

(i) $T(H)$ er afsluttet, $\dim(\mathrm{Ker}(T)) < \infty$ og $\dim(\mathrm{Ker}(T^*)) < \infty$,

(ii) der findes $S \in B(H)$, så $1 - ST \in \mathcal{K}$ og $1 - TS \in \mathcal{K}$, og

(iii) $\pi(T)$ er invertibel i $Q(H)$.

Bevis: Se [G. K. Pedersen, 3.3.11]. $\square$

En operator T, som opfylder disse ækvivalente betingelser, kaldes en *Fredholm-operator*. Mængden af Fredholm-operatorer på H betegnes $F(H)$, og til ethvert $T \in F(H)$ defineres *Fredholm-indexet* ved

$$\operatorname{index}(T) = \dim(\operatorname{Ker}(T)) - \dim(\operatorname{Ker}(T^*)) \in \mathbb{Z}.$$

Vi vil nu vise, at index-afbildningen i K-teori generaliserer Fredholm-indexet i følgende forstand.

9.10 Sætning

For alle $T \in F(H)$ gælder

$$\operatorname{index}(T) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1)([\pi(T)]_1)\,.$$

Bevis: T har polar-dekompositionen $T = S|T|$, hvor $S \in B(H)$ er en partiel isometri og hvor $|T| = (T^*T)^{1/2}$. Sæt $A = \pi(T)$ og $U = \pi(S)$. Ifølge Sætning 9.9 (iii) er A invertibel i $Q(H)$. Idet $A = U|A|$, ser vi, at U er unitær i $Q(H)$. Dette betyder, at $\pi(1 - S^*S) = \pi(1 - SS^*) = 0$, så $E = 1 - S^*S$ og $F = 1 - SS^*$ er projektioner i $\mathcal{K}$.

Betragt den kontinuerte sti $R_t = S(t|T| + (1-t)1)$, $t \in [0,1]$, som forbinder $R_0 = S$ til $R_1 = T$. Da $\pi(R_t) = U(t|A| + (1-t)1) \in \mathrm{GL}(Q(H))$, ser vi, at $R_t \in F(H)$ for alle $t \in [0,1]$, og dermed at T og S er homotope i $F(H)$, og $A \sim_h U$ i $\mathrm{GL}(Q(H))$.

Bemærk endelig, at $E(H) = \operatorname{Ker}(S)$ og $F(H) = \operatorname{Ker}(S^*)$. Sætning 9.7 (ii) giver nu

$$\begin{aligned}(K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1)\,([\pi(T)]_1) &= (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1)\,([A]_1) = (K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1)\,([U]_1)\\ &= K_0(\mathrm{Tr})\,([E]_0 - [F]_0) = \mathrm{Tr}(E) - \mathrm{Tr}(F)\\ &= \dim(E(H)) - \dim(F(H)) = \operatorname{index}(S) = \operatorname{index}(T)\end{aligned}$$

$\square$

Bemærk, at Sætning 9.4 giver, at nedenstående følge er eksakt.

$$K_1(\mathcal{K}) \longrightarrow K_1(B(H)) \longrightarrow K_1(Q(H)) \xrightarrow{\delta_1} K_0(\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(B(H)) \longrightarrow K_0(Q(H)).$$

Vi har set, at $K_1(B(H)) = 0$ og $K_0(B(H)) = 0$, hvilket medfører, at δ_1 er en isomorfi. Dette giver $K_1(Q(H)) \cong \mathbb{Z}$, og isomorfien er givet ved Fredholm-indexet. Idet $\mathcal{K}$ er en AF-algebra, er $K_1(\mathcal{K}) = 0$ (jvf. Opgave 8.21).

9.11 Opgave

Lad A være en unital C^*-algebra, og lad a være et element i A med $\|a\| \leqslant 1$. Gør rede for, at $1 - a^*a$ og $1 - aa^*$ er positive elementer, og gør rede for, at $af(a^*a) = f(aa^*)a$ for alle kontinuerte funktioner $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$. Vis herefter, at

$$v = \begin{pmatrix} a & (1 - aa^*)^{1/2} \\ -(1 - a^*a)^{1/2} & a^* \end{pmatrix}$$

er et unitært element i $M_2(A)$.

Lad

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

være en kort-eksakt følge, hvor A og B er unitale C^*-algebraer. Lad u være et unitært element i B. Gør rede for, at der findes $a \in A$ så $\|a\| = 1$ og $\psi(a) = u$. Vis herefter, at hvis $v \in \mathcal{U}_2(A)$ er defineret som ovenfor, så er $\psi(v) = u \oplus u^*$.

9.12 Opgave

Betragt den kort-eksakte følge

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\varphi} C(\mathbb{D}) \xrightarrow{\psi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

hvor $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, hvor ψ er restriktionsafbildningen til $\mathbb{T}$, og hvor $\mathbb{D} \setminus \mathbb{T}$ identificeres med $\mathbb{R}^2$.

(i) Vis, at $K_1(C(\mathbb{D})) = 0$, at $K_0(C(\mathbb{D})) \cong \mathbb{Z}$, og at $K_0(\psi)$ er injektiv. Konkluder, at $\delta_1\colon K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ er en isomorfi, og at $K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) \neq 0$.

(ii) Fra Eksempel 3.13 har vi en surjektion $\dim\colon K_0(C(S^2)) \to \mathbb{Z}$ givet ved

$$\dim([p]_0 - [q]_0) = \mathrm{Tr}(p(x_0)) - \mathrm{Tr}(q(x_0)),$$

hvor $x_0 \in S^2$ er et vilkårligt valgt punkt. Benyt den kort-eksakte følge

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\iota} C(S^2) \xrightarrow{\pi} C(\{x_0\}) \longrightarrow 0,$$

til at vise, at $\dim\colon K_0(C(S^2)) \to \mathbb{Z}$ ikke er injektiv. Vis at

$$K_{00}(C_0(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{K_{00}(\iota)} K_{00}(C(S^2)) \xrightarrow{K_{00}(\pi)} K_{00}(C(\{x_0\})),$$

ikke er eksakt (ved $K_{00}(C(S^2))$), og konkluder, at funktoren K_{00} ikke er halv-eksakt.

(iii) Definer $u \in \mathcal{U}(C(\mathbb{T}))$ ved $u(z) = z$. Lad $\delta_1\colon K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ være index-afbildningen hørende til den kort-eksakte følge $(\star)$. Udtryk elementet $\delta_1([u]_1)$ så konkret som muligt (gerne som element i $K_0(C_0(\mathbb{D} \setminus \mathbb{T}))$).

9.13 Opgave

Benyt Sætning 9.4 og halv-eksakthed af K_0 (Sætning 4.13) til at give et alternativt bevis for, at K_0 er split-eksakt (jvf. Sætning 4.14).

9.14 Opgave

Lad

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0,$$

være en kort-eksakt følge, hvor A og B er unitale C^*-algebraer. Lad $\delta_1\colon K_1(B) \to K_0(I)$ være den tilhørende indexafbildning. Lad $u \in \mathcal{U}_n(B)$. Vis at $\delta_1([u]_1) = 0$ hvis og kun hvis der findes $m \geqslant n$ og $v \in \mathcal{U}_m(A)$ således at $\psi(v) = u \oplus 1_{m-n}$. (Se Opgave 8.27.)

9.15 Opgave

Lad H være et Hilbertrum, lad $\pi\colon B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ være kvotientafbildningen, og lad $\delta_1\colon K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K})$ være indexafbildningen.

(i) Lad e, f være projektioner i $B(H)$, og antag at $\dim(e(H)) \leqslant \dim(f(H))$. Vis at der findes en partiel isometri $v \in B(H)$ som opfylder $v^*v = e$ og $vv^* \leqslant f$.

(ii) Lad u være et unitært element i $\mathcal{Q}(H)$. Vis at der findes $s \in B(H)$, så $\pi(s) = u$, og således, at s enten er en isometri (dvs. $s^*s = 1$) eller s er en co-isometri (dvs. $ss^* = 1$).

(iii) Lad igen u være et unitært element i $\mathcal{Q}(H)$. Vis at der findes et unitært element $v \in B(H)$ med $\pi(v) = u$ hvis og kun hvis $\delta_1([u]_1) = 0$.

9.16 Opgave

Lad H være et uendelig-dimensionalt separabelt Hilbertrum, og lad E være en del-C^*-algebra af $B(H)$ således at $\mathcal{K} \subseteq E$ og $1 \in E$ (hvor $\mathcal{K}$ er de kompakte operatorer på H og 1 er 1-elementet i $B(H)$). Lad $\mathcal{Q}(H)$ være Calkin algebraen $B(H)/\mathcal{K}$, og lad $\pi\colon B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ være kvotientafbildningen.

(i) Gør rede for, at $\mathcal{K}$ er et ideal i E, og at vi har en kort-eksakt følge

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0\,,$$

hvor A er den unitale C^*-algebra $E/\mathcal{K}$. Gør også rede for, at hvis $x \in B(H)$, så vil $x \in E$ hvis og kun hvis $\pi(x) \in A$.

(ii) Lad u være et unitært element i A. Benyt Opgave 9.15 til at vise, at der findes $s \in E$, som enten er en isometri eller en co-isometri, således at $\pi(s) = u$.

(iii) Antag A er endelig. Lad $s \in E$, og antag at s er en isometri eller en co-isometri. Vis at $\pi(s)$ er unitær.

(iv) Lad $\delta_1\colon K_1(A) \to K_0(\mathcal{K})$ være index-afbildningen hørende til den kort-eksakte følge $(\star)$. Betragt også afbildningen $\alpha\colon K_1(A) \to \mathbb{Z}$ givet ved $\alpha = K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1$. Gør rede for, at hvis $x \in E \cap F(H)$, så er $\mathrm{index}(x) = \alpha([\pi(x)]_1)$. Antag A er endelig, og lad $s \in E$ være en isometri eller en co-isometri. Vis at s er unitær hvis og kun hvis $\alpha([\pi(s)]_1) = 0$.

(v) Gør rede for, at $M_n(E) \subseteq B(H^n)$, og at vi har en kort-eksakt følge

$$(M_n(\star)) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^n) \xrightarrow{\iota} M_n(E) \xrightarrow{\pi} M_n(A) \longrightarrow 0\,,$$

for hvert $n \in \mathbb{N}$.

(vi) Benyt de foranstående resultater til at vise følgende:

Lad $n \in \mathbb{N}$. Lad C^*-algebraerne E og A, og homomorfien $\alpha\colon K_1(A) \to \mathbb{Z}$ være som ovenfor, og antag, at A er stabilt endelig. Da er $M_n(E)$ endelig hvis og kun hvis $\alpha([u]_1) = 0$ for alle $u \in \mathcal{U}_n(A)$.

(vii) Det kan vises, at hvis f.eks. A er en unital abelsk C^*-algebra, så findes til ethvert $\alpha\colon K_1(A) \to \mathbb{Z}$ en del-C^*-algebra E af $B(H)$, som indeholder $\mathcal{K}$ og 1, og en kort-eksakt følge

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0\,,$$

således, at $\alpha = K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1$ (hvor $\delta_1 \colon K_1(A) \to K_0(\mathcal{K})$, og hvor α er den på forhånd givne afbildning $K_1(A) \to \mathbb{Z}$).

Benyt dette (og spørgsmål (vi)) til at konstuere en unital C^*-algebra E, så E er endelig, og $M_2(E)$ er uendelig. [Vink: Prøv med $A = C(\mathbb{T}^3)$ idet du må benytte resultatet fra Eksempel 11.14, som siger, at $K_1(C(\mathbb{T}^3)) \cong \mathbb{Z}^4$.]