Supplerende opgaver til Kapitel 1

Opgave 1 Vis at den kort-eksakte følge

$$0 \longrightarrow C_0((0,1)) \xrightarrow{\iota} C([0,1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

hvor $\psi(f) = (f(0), f(1))$, *ikke* er split-eksakt.

Opgave 2 Denne opgave går ud på at tjekke (nogle af) detaljerne i Afsnit 1.5. Lad A være en C^*-algebra (med eller uden 1-element). Sæt

$$\tilde{A} = \{(a, \lambda) \mid a \in A, \quad \lambda \in \mathbb{C}\},$$

definer addition, skalar-multiplikation og *-operationen punktvis, og sæt

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu).$$

Definer $\iota \colon A \to \tilde{A}$ og $s \colon \tilde{A} \to \mathbb{C}$ ved $\iota(a) = (a, 0)$ og $s(a, \lambda) = \lambda$.

(i) Gør kort rede for, at $\tilde{A}$ er en *-algebra, at $(0, 1)$ (herefter kaldet $1_{\tilde{A}}$ eller blot 1) er et 1-element for $\tilde{A}$, at ι er en injektiv $*$-homomorfi, at s er en surjektiv $*$-homomorfi, og at billedet af ι er et 2-sidet ideal i $\tilde{A}$.

Vi undertrykker herefter ι, og opnår således

$$\tilde{A} = \{a + \lambda \cdot 1 \mid a \in A, \quad \lambda \in \mathbb{C}\},$$

og at A er et 2-sidet ideal i $\tilde{A}$. For hvert $x \in \tilde{A}$, sæt

$$|||x|||_{\tilde{A}} = \sup\{\|ax\|_A \mid a \in A, \quad \|a\|_A \leq 1\}, \qquad \|x\|_{\tilde{A}} = \max\{|||x|||_{\tilde{A}}, |s(x)|\}.$$

(ii) Vis at $\|a\|_{\tilde{A}} = \|a\|_A$ for alle $a \in A$.

(iii) Vis at $\|x\|_{\tilde{A}} = 0 \Rightarrow x = 0$ for alle $x \in \tilde{A}$.

(iv) Vis at $\tilde{A}$ er en unital C^*-algebra. (Tjek blot, at $\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ opfylder trekantsuligheden, og at identiteterne $\|xy\|_{\tilde{A}} \leq \|x\|_{\tilde{A}}\|y\|_{\tilde{A}}$, og $\|x^*x\|_{\tilde{A}} = \|x\|_{\tilde{A}}^2$ gælder.)

(v) Vis at ι er isometrisk, at A er et *lukket* 2-sidet ideal i $\tilde{A}$, og at vi har en split-eksakt følge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow{s} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

(vi) Vis at $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ (som C^*-algebraer) hvis og kun hvis A er unital.

Opgave 3 Et element p i en C^*-algebra kaldes en *projektion* hvis $p = p^* = p^2$, og et element u i en unital C^*-algebra kaldes *unitær* hvis $uu^* = u^*u = 1$.

(i) Lad p være en projektion. Vis at $\mathrm{sp}(p) \subseteq \{0, 1\}$.

(ii) Antag, at p er normal og at $\mathrm{sp}(p) \subseteq \{0, 1\}$. Vis at p er en projektion.

(iii) Lad u være unitær. Vis at $\mathrm{sp}(u) \subseteq \mathbb{T}$, hvor $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(iv) Antag, at u er normal og at $\mathrm{sp}(u) \subseteq \mathbb{T}$. Vis at u unitær.

Opgave 4 Lad X være et kompakt Hausdorffrum, og lad μ være et Borelmål på X. Lad H være Hilbertrummet $L^2(X, \mu)$. For hvert $f \in C(X)$ og for hvert $\xi \in H$ definer $M_f\xi\colon X \to \mathbb{C}$ ved $(M_f\xi)(x) = f(x)\xi(x)$.

(i) Vis at $\|M_f\xi\|_2 \leq \|f\|_\infty \|\xi\|_2$, og (dermed), at $M_f\xi \in H$, at $M_f \in B(H)$, og at $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$.

Definer $\pi\colon C(X) \to B(H)$ ved $\pi(f) = M_f$.

(ii) Vis at π er en *-homomorfi.

(iii) Vis at π er injektiv hvis målet μ har følgende egenskab: for enhver ikke-tom åben delmængde U af X er $0 < \mu(U) < \infty$.

(iv) Vis eksplicit at π er isometrisk hvis μ opfylder betingelsen i (iii).

(v) Antag X er separabel. Konstruer et Borelmål μ på X, som opfylder betingelsen i (iii).