Optimalt Spil i Black-Jack

Anders Yeo

24. juli 1996

Indhold

1 Indledning **4**

2 Reglerne for Black-Jack **4**

3 Optimal strategi med tilbagelægning **6**
3.1 Bankens forventede resultat 6
3.2 Spillerens optimale strategi 8
3.2.1 *win(sum,es,valg)* 9
3.2.2 *double_down(sum)* 10
3.2.3 *win_blackjack* 11
3.2.4 *win1(kort)* 11
3.2.5 *win1_split(kort)* 12
3.2.6 *split(kort)* 12
3.2.7 *win_givet(bank)* 14
3.2.8 *win_total* 14
3.3 De fundne strategier 14
3.3.1 Bankørens optimale strategi 14
3.3.2 Spillerens optimale strategi 15

4 Optimal strategi uden tilbagelægning **16**
4.1 *Change_P(P,kort,kort_tilbage)* 16
4.2 Algoritmen for den optimale strategi 16
4.3 Den fundne strategi 17

5 Ændret kortfordelinger **18**
5.1 α_{kort} 18
5.2 f_{kort} 19
5.3 De fundne hældninger 20
5.3.1 α_{kort} 20
5.3.2 f_{kort} 21
5.4 Brugbarheden af hældningerne 21
5.4.1 Linearitet 22
5.4.2 Uafhængighed 22
5.4.3 Kontrol af f_{kort} 22

6 Strategier for at tælle kort **23**
6.1 Den fundne strategi 26
6.1.1 Strategi 1 27
6.1.2 Strategi 2 27
6.1.3 Strategi 3 28

7 Simulation **29**
7.1 Punkt 1 30
7.2 Punkt 2 31
7.3 Punkt 3 33
7.4 Punkt 4 33

8 Konklusion **37**
8.1 Sammenligning med andre strategier 38
8.2 Afslutende bemærkning 39

9 Bilag A **41**

10 Bilag B **44**

11 Bilag C **46**

12 Bilag D, Den optimale strategi **52**

13 Bilag E **53**

14 Bilag F **55**

1 Indledning

Jeg vil i denne rapport gennemgå følgende punkter:

1. Beskrive opbygningen af denne rapport (Det er dette afsnit du læser nu).

2. Beskrive reglerne for Casinospillet Blackjack.

3. Angive en optimal spillestrategi for ovennævnte spil, hvor kortfordelingen antages jævn og konstant (dvs at de kort man får ikke ændrer fordelingen). Herunder nævnes også den forventede tilbagebetaling, ved brug af strategien, samt hvordan man finder strategien. Denne strategi vil fremover blive kaldt den optimale strategi med tilbagelægning.

4. Angive en optimal spillestrategi, hvor kortfordelingen antages jævn fra starten, men ændres af de første 3 kort spilleren ser (dvs bankørens kort, samt de to første man selv får). Herunder nævnes ligeledes den forventede tilbagebetaling, ved brug af denne strategi, samt hvordan strategien findes. Denne strategi vil fremover blive kaldt den optimale strategi uden tilbagelægning, selv om der egentlig er tilbagelægning efter at de tre første kort er gået.

5. Finde ud af hvordan tilbagebetalingen ændrer sig, når kortfordelingen ændrer sig, ved brug af strategin fra punkt 3. Der tages dog også her højde for den ændring i kortfordeling, som de 3 første kort i et spil forudsager.

6. Finde en strategi eller flere strategier, som bruger de fundne informationer til at optimere tilbagebetalingen. Disse strategier skal hovedsagelig baseres på ændringer i den forventede tilbagebetaling, forudsaget af ændringer i kortfordelingen.

7. Undersøge, ved en simulation, hvor gode de fundne strategier er.

8. Give en konklusion, baseret på de foregående punkter.

2 Reglerne for Black-Jack

Reglerne for Blackjack er forskellige fra land til land, og endda fra casino til casino. Jeg vil derfor beskrive de reglerne, som bliver brugt i Casino Odense. Det er desuden disse regler, som jeg vil finde den optimale strategi for. Da reglerne netop er dem som bliver brugt i Casino Odense, vil en eventuel optimal strategi kunne bruges i praksis.

Der spilles med seks bunker kort, som efter at de er blandet, lægges i en kortholder. Der placeres et skillekort cirka to tredjedele nede i bunken. Kortene blandes hver gang dette skillekort kommer til syne.

Alle billedkort (konge, dame, knægt) gælder for 10. Esser for 1 eller 11 (efter spillerens valg), og alle andre kort for pålydende.

Hvis summen af de første to kort er 21 er der Blackjack. Blackjack slår alle andre kombinationer der giver 21. En spiller kan til enhver tid vælge at stå, eller få ekstra kort. Overskrides 21 er spillet tabt.

Spillets forløb består af følgende punkter:

- Før spillet starter skal alle spillere satse et beløb, som skal være mindst 50 kr, og ikke mere end et par tusind (dette loft kan dog hæves hvis casinoet er indforstået).
- Bankøren giver så alle spillere 2 kort, og sig selv 1. Dette ene kort kan alle spillerene se.
- Alle spillerne spiller herefter sine hænder færdige (dvs at de står eller har fået over 21).
- Bankøren tager nu kort indtil han har 17 eller over. Hvis bankøren har mellem 17 og 21 med et es som tæller 11, så skal han stå. Hvis han har mere end 21 med et es som tæller 11, så lader han det tælle 1, og fortsætter som før med at få kort til han har 17 eller mere.
- Man finder en vinder af spillet på følgende måde:

  - Hvis en spiller fik mere end 21, har han tabt sin indsats.
  - Hvis bankøren får over 21, så vinder alle de spillere, som stadig er med i spillet, det beløb de har indsat.
  - Hvis en spiller har en gyldig hånd, som er større end bankørens, vinder spilleren, det beløb han har indsat.
  - Hvis spiller og bankør har samme total, står de lige, dvs at spilleren hverken vinder eller taber sin indsats.
  - Hvis en spiller har Blackjack så vinder han halvanden gang det beløb han har indsat, medmindre bankøren også har Blackjack, hvorved de står lige.
- Spillet er nu færdigt, og man kan starte på et nyt.

Valgmuligheder Der er følgende valgmuligheder åbne til spilleren i løbet af spillet:

Double down En spiller, der med de første to kort opnår en total på 9, 10 eller 11, må fordoble deres oprindelige indsats, men må kun få et ekstra kort.

Split En spiller, hvis to første kort har samme værdi, kan vælge at splitte, dvs fordele de to første, og evt. efterfølgende kort (også valgfrit) med samme værdi, på op til 4 hænder. Der kan derefter trækkes flere kort, så hver hånd afsluttes for sig. Hvis det ønskes kan der derefter vælges Double down, på hvilkårlig mange af hænderne.

Esser kan kun splittes en gang (dvs op til 2 hænder), og der kan kun trækkes et ekstra kort for hvert es. En total på 21 opnået med to kort i en split, gælder ikke for Blackjack.

Forsikring Hvis bankørens første kort er et es, kan spillerne "forsikre"deres indsatser ved at placere en ekstra indsats i forsikringsfeltet. Får bankøren Blackjack, vinder spilleren det beløb han placerede i forsikringsfeltet, hvorimod alle andre indsatser er tabt.

En spiller der har blackjack og ønsker at forsikre, vil blive betalt i "lige penge"og kan ikke deltage mere i spillet.

3 Optimal strategi med tilbagelægning

Kapitel 3.1 er en beskrivelse af hvordan man beregner sandsynligheden for, hvad bankøren får, mens kapitel 3.3.1 indeholder de faktiske sandsynligheder. Kapitel 3.2, er udelukende en beskrivelse af hvordan man finder den optimale strategi for spilleren, mens kapitel 3.3.2 beskriver den fundne strategi. Før jeg vil beskrive hvordan man finder den optimale strategi, vil jeg definere nogle udtryk, som vi ofte vil støde på i dette afsnit.

P(i) er sandsynligheden for at det næste kort man får har værdien i, hvor i går fra 2 til 11. I adskillige af mine algoritmer vil jeg desuden bruge P(1), som er defineret til at have samme værdi som P(11).

Bank(kort,i) er sandsynligheden for at banken få en hånd med værdien i, givet at hans første kort var *kort*. *Kort* kan selvfølgelig antage værdierne fra 2 til 11, og i kan antage værdierne fra 17 til 21 samt Blackjack.

Forventet tilbagebetaling er det beløb man forventer at vinde, efter at man har givet bankøren et beløb på 1, for at få lov til at spille. Det vil sige at hvis den forventede tilbagebetaling er 1, så vil spillet gå lige op i det lange løb (Man vinder i snit 1 krone, for hver gang man betaler 1 krone). Man kan godt forestille sig en negative forventet tilbagebetaling, for eksempel hvis man splitter, eller laver double down. En negativ forventet tilbagebetaling vil sige at banken i snit vil opkræve et yderligere beløb end den ene krone man har betalt.

Det første skridt i at finde den optimale strategi består i at finde værdierne af bank(kort,i) givet alle P(i)'erne. Hvordan de findes vil blive beskrevet i det følgende afsnit, kaldet *Bankens forventede resultat*.

3.1 Bankens forventede resultat

Bank(kort,i) kan findes ved en rekursiv formel, som bruger en tabel, kaldet *pr(kort,antal_kort_gået,sum,es)*, som er sandsynligheden for at banken har en hånd, som er beskrevet af *sum* og *es*, når han har fået *antal_kort_gået* kort, og hans første kort var *kort*. *Sum* og *es* beskriver bankørens hånd på følgende måde:

sum det er den totale sum bankøren har, på sin hånd.

es er lig med *true*, hvis bankøren har et es, der tæller 11, ellers er den lig med *false*. Det er klart at man ikke kan have to esser, som tæller 11, da man så ville have mindst 22.

Man ser nu at alle værdierne i tabellen *pr(kort,antal_kort_gået,sum,es)* kan findes ud fra værdierne med antal_kort_gået 1 mindre, undtaget selfølgelig når antal_kort_gået er 1. Alle værdierne i tabellen, når antal_kort_gået=1, er nul, undtaget for hånden med kortet *kort*, for hvilket den er 1.

Det vil sige $pr(kort, 1, kort, false) = 1$, når $kort \neq 11$, og $pr(11, 1, 11, true) = 1$. Den rekursive formel ser nu ud som følger for $g \geq 2$.

For $12 \leq i \leq 16$:

$$\begin{aligned} pr(kort,g,i,false) &= \sum_{j=i-10}^{i-1} p(i-j) * pr(kort,g-1,j,false) \\ &\quad + \sum_{j=i}^{16} p(i-j+10) * pr(kort,g-1,j,true) \\ pr(kort,g,i,true) &= p(11) * pr(kort,g-1,i-11,false) \\ &\quad + \sum_{j=11}^{i-1} p(i-j) * pr(kort,g-1,j,true) \end{aligned}$$

For $4 \leq i \leq 11$:

$$pr(kort,g,i,false) = \sum_{j=2}^{i-2} p(i-j) * pr(kort,g-1,j,false)$$

For $2 \leq i \leq 3$:

$$pr(kort,g,i,false) = 0$$

For at denne rekursive formel virker sættes $pr(kort, g, 1, false) = 0$ for alle g, og vi husker at P(1) per definition er lig P(11). Hvis man ser hvor $pr(kort, g-1, i, es)$ bliver brugt til at udregne en ny værdi af tabellen, pr, skulle rigtigheden af den rekursive formel også være oplagt. $Bank(kort, i)$ kan nu nemt findes ud fra tabellen, pr, på følgende måde:

Når $17 \leq i \leq 20$:

$$\begin{aligned} Bank(kort,i) &= \sum_{g=1}^{16} \sum_{j=i-11}^{16} p(i-j) * \sum_{es=true,false} pr(kort,g,i,es) \\ Bank(kort,21) &= \sum_{g=2}^{16} \sum_{j=i-11}^{16} p(i-j) * \sum_{es=true,false} pr(kort,g,i,es) \\ Bank(kort,blackjack) &= \sum_{j=i-11}^{16} p(i-j) * \sum_{es=true,false} pr(kort,1,i,es) \end{aligned}$$

Vi lader g summere fra 1 til 16 fordi *pr(kort,g,i,es)* kun indeholder nuller når $g > 16$ (Bankøren kan ikke have under 16, med mere end 16 kort). I udregningen af $Bank(kort, 21)$ starter g ved 2, fordi når g er 1 får vi chancen for at få blackjack, istedet for 21 (dette ses i udregningen af $Bank(kort, blackjack)$. Hvis *Bank(kort,i)* skal regnes ud på computer, kan der bruges nogle smarte kneb, så man ikke behøver alle disse udregninger, og man kan nøjes med en mindre tabel.

Man kan for eksempel i formlen for $Bank(kort, i)$ undgå at summere g helt op til 16, såvel som j helt nede fra $i - 11$ hele tiden. Man kan desuden nøjes med en tabel som hedder $pr(kort, sum, es)$, istedet for $pr(kort, antal\_kot\_gået, sum, es)$, hvis værdierne i tabellen udregnes i den rigtige rækkefølge.

Vi har nu udregnet *Bank(kort,i)*, givet $P(j), j = 2, 3, \ldots, 11$.

3.2 Spillerens optimale strategi

For at finde spillerens optimale strategi, når banken har kortet $bank$, skal vi, givet $bank$, beregne følgende tabeller: *win(sum,es,valg)*, *double_down(sum)*, *win1(kort)*, *win1_split(kort)*, *split(kort)* og *win_total*, hvor $2 \leq kort \leq 11$, $2 \leq sum \leq 21$, $es = true, false$ og *valg=stå, gå*. Tabellerne har følgende betydning:

win(sum,es,valg) indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spilleren har en hånd, som er beskrevet af *sum*, og *es*, samt at han står hvis *valg=stå* og tager et kort mere hvis *valg=gå*. Denne tabel gælder uanset hvor mange kort spilleren har, og tager derfor ikke højde for blackjack.

double_down(sum) indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spilleren laver en double down, på summen *sum*.

win_blackjack indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spilleren har blackjack.

win1(kort) indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spillerens første kort er $kort$, og han ikke må splitte. Der tages højde for blackjack her, på trods af at dette ikke blev gjort ved udregning af *win(sum,es,valg)*.

win1_split(kort) indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spilleren har et kort $kort$, i en split, men ikke må splitte mere. I dette tilfælde tæller blackjack kun for 21, og derfor er denne tabel ikke helt den samme som *win1(kort)*.

split(kort) indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spilleren har et kort af værdi $kort$, og han må splitte.

win_givet(bank) indeholder den forventede tilbagebetaling, for hele spillet, givet banken havde kortet $bank$.

win_total indeholder den forventede tilbagebetaling, før spillet starter! Denne værdi afhænger kun af P(i)'s værdier.

Vi tager ikke højde for at man kan $forsikre$ når bankøren har et es, og vi ikke har Blackjack, da man kun laver et nyt vædemål som er uafhængigt af resten af spillet. Det er desuden klart at man bør forsikre når bankøren har et es, hvis P(10)>0.5.

De før omtalte tabeller beregnes i nævnte rækkefølge, på følgende måde

3.2.1 *win(sum,es,valg)*

win(sum,es,stå) er beskrevet ovenover, og kan beregnes på følgende måde.

$17 \leq sum \leq 21$:

$$win(sum, es, stå) = 2\left(1 - \sum_{j=i+1}^{22} Bank(bank, j)\right) + Bank(bank, i)$$

$2 \leq sum \leq 16$:

$$win(sum, es, stå) = 2\left(1 - \sum_{j=16}^{22} Bank(bank, j)\right)$$

Vi kan nu også beregne *win(sum,es,gå)* ved følgende formeler, hvor $max\_win(sum, es)$ er defineret til at være det største af tallene $win(sum, es, gå)$ og $win(sum, es, stå)$. Det vil sige at $max\_win(sum, es)$ er den forventede tilbagebetaling, hvis man spiller optimalt fra dette punkt. Formlerne herunder skal udregnes i den rækkefølge som de står skrevet her:

sum går fra 21 ned til 11:

$$win(sum, false, gå) = \sum_{j=sum+1}^{21} P(j - sum) * max\_win(j, false)$$

sum går fra 21 ned til 11:

$$\begin{aligned} win(sum, true, gå) &= \sum_{j=sum+1}^{21} P(j - sum) * max\_win(j, true) \\ &+ \sum_{j=12}^{sum} P(j - sum + 10) * max\_win(j, false) \end{aligned}$$

sum går fra 11 ned til 2:

$$\begin{aligned} win(sum, false, gå) &= P(11) * max\_win(sum + 11, true) \\ &+ \sum_{j=sum+2}^{sum+10} P(j - sum) * max\_win(j, false) \end{aligned}$$

Disse formler undersøger hvad man ville vinde ved at tage et kort til, og derefter spille optimalt. Dette gøres ved at se hvilket kort man kan få, og hvad man vil vinde hvis man får dette kort. Med andre ord kan formlerne beskrives på følgende måde:

$$Gevinst\ ved\ at\ gå = \sum_{j=Alle\ kort} P(j) * (Gevinst\ hvis\ man\ får\ kortet\ j)$$

win(sum,es,valg) er nu beregnet som vi ville.

3.2.2 *double_down(sum)*

double_down(sum) indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spilleren laver en double down på summen *sum*. Denne tabel kan beregnes ved hjælp af følgende formler:

$9 \leq sum \leq 10$:

$$double\_down(sum) = \sum_{j=2}^{11} P(j) * win(j + sum, false, stå)$$

$sum = 11$

$$double\_down(sum) = \sum_{j=1}^{10} P(j) * win(j + sum, false, stå)$$

Disse formler er rigtige, fordi man kun får et kort mere, når man laver en double down. Vi bemærker at vi lige så godt kunne have brugt $win(j + sum, true, stå)$, som $win(j + sum, false, stå)$, da det er ligemeget om vi har et es der tæller 11, hvis vi skal stå.

3.2.3 *win_blackjack*

win_blackjack indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spilleren har blackjack. Denne værdi er naturligvis det maksimale af 2, som man får ved at forsikre, og den forventede tilbagebetaling, hvis man ikke forsikrer. *win_blackjack* udregnes derfor på følgende måde.

$$win\_blackjack = max\,(2,\ 2.5 - 1.5 * Bank(bank, blackjack))$$

Vi husker at $Bank(bank, blackjack)$ var sandsynligheden for at bankøren også fik blackjack. Vi skal huske, om vi forsikrede eller ej, for at kunne give den optimale strategi, når udregningerne er færdige.

3.2.4 *win1(kort)*

win1(kort) indeholder den forventede tilbagebetaling, hvis spillerens første kort er $kort$, og han ikke må splitte. For at beregne denne tabel er det nemmest først at beregne en anden tabel, kaldet *win2(sum,es)*, som giver den forventede tilbagebetaling, når man har en hånd, som er beskrevet af *sum* og es på sædvanlig måde, dog må man ikke splitte, og man har kun to kort på hånden. *win2(sum,es)* beregnes på følgende måde:

$$win2(sum, es) = max\_win(sum,\ i)$$

Undtagen i følgende tilfælde

$$\begin{aligned}
win2(21, true) &= win_blackjack \\
win2(11, false) &= max\,(max_win(11, false), double_down(11))) \\
win2(10, false) &= max\,(max_win(10, false), double_down(10))) \\
win2(9, false) &= max\,(max_win(9, false), double_down(9)))
\end{aligned}$$

Vi husker at $max\_win(sum, false)$ blev defineret i kapitel 3.2.1. Ud fra tabellen *win2(sum,es)* kan vi nu finde *win1(kort)* på følgende måde:

$2 \leq kort \leq 10$:

$$win1(kort) = P(11) * win2(kort + 11, true) + \sum_{j=2}^{10} P(j) * win2(kort + j, false)$$

$kort = 11$

$$win1(11) = \sum_{j=1}^{10} P(j) * win2(11 + j, true)$$

Vi har nu fundet alle værdierne i tabellen $win1(kort)$.

3.2.5 *win1_split(kort)*

Vi kan på en lignene måde definere en tabel $win2\_split(sum, es)$, som betyder det samme som *win2(sum,es)*, bortset fra at man har hånden i en split, og blackjack derfor kun tæller som 21. Man finder denne tabel på samme måde, som *win2(sum,es)*, bortset fra at man sætter $win2\_split(21, true) = max\_win(21, true)$ og ikke til $win\_blackjack$, som før.

$win1\_split(kort)$ findes nu på nøjagtig samme måde som *win1(kort)*, bortset fra at man bruger $win2\_split(sum, es)$ istedet for *win2(sum,es)*.

3.2.6 *split(kort)*

For at beregne denne værdi skal vi bruge en ny tabel, kaldet $sp(kort, fra, til, valg)$. Vi ved at vi må splitte på op til 4 hænder. Vi numrerer nu hænderne, så hånd nummer et har værdien 1, og så viderere. $sp(kort, fra, til, valg)$ giver os nu den forventede tilbagebetaling når vi har et kort med værdien $kort$ på hænderne fra, $fra+1$,..., til, hvor $1 \leq fra \leq til \leq 4$, og vi følger $valg$s anvisninger, som jeg nu vil forklare. Hvis $valg{=}split$, antager vi at vi splitter, men hvis $valg{=}no\_split$ antager vi at vi ikke splitter. Hænderne 1, 2,.., $fra-1$, antager vi er færdigspillet, og indgår ikke mere i vores beregninger.

f.eks. indeholder $sp(10, 2, 3, split)$ den forventede tilbagebetaling, når vi har splittet to 10'er, og kun må splitte en gang til (da vi allerede har spillet hånd 1 færdigt). $split$ fortæller os at hvis vores næste kort er en 10'er, så skal vi splitte, ellers spiller vi optimalt.

Vi definere desuden $max\_sp(kort, fra, til)$ til at være det største af de to tal $sp(kort, fra, til, split)$ og $sp(kort, fra, til, no\_split)$.

Det fremgår klart at når vi har denne tabel sætter vi bare *split(kort)* til $max\_sp(kort, 1, 1)$, da denne værdi er den maksimale forventede tilbagebetaling man kan få, hvis man kun har kortet $kort$, på hånd nummer et.

Før vi beregner tabellen $sp(kort, fra, til, valg)$, initierer vi følgende pladser i den.

$$\begin{aligned}
max_sp(kort, fra, 4) &= win1_split(kort) * (5 - fra) - (4 - fra) & 1 \leq fra \leq 4 \\
max_sp(kort, i+1, i) &= 1 & 1 \leq i \leq 3
\end{aligned}$$

Den første linie i denne initiering er korrekt, da hvis man har i hænder med et kort af værdien $kort$, og skal spille dem allesammen uafhængigt af hinanden (uden at måtte splitte yderligere), så er den forventede tilbagebetaling lig med $i * win1\_split(kort) - (i-1)$. Den anden linie i initieringen initiere tallet 1 til de *umulige* kombinationer af fra og til.

Vi skal nu beregne værdierne af $sp(kort, fra, til, valg)$, ved hjælp af følgende formel. Værdierne skal udregnes i den givne rækkefølge.

$2 \leq kort \leq 10$:

$$\begin{aligned}
sp(kort, fra, til, no_split) &= win1_split(kort) + max_sp(kort, fra+1, til) - 1 \\
sp(kort, fra, til, split) &= P(kort) * max_sp(kort, fra, til+1) \\
&\quad + \sum_{j=2, j \neq kort}^{11} P(j)\,(win2_split(kort+j, j=11) + max_sp(kort, fra+1, til) - 1) \\
&= P(kort) * max_sp(kort, fra, til+1) \\
&\quad + (1 - P(kort)) * (max_sp(kort, fra+1, til) - 1) \\
&\quad + win1_split(kort) - P(kort) * win2_split(2 * kort, false)
\end{aligned}$$

For at formlen virker skal man bruge $win1$ og $win2$, istedet for $win1\_split$ og $win2\_split$, i udregningen af $sp(kort, 1, 1, valg)$. udtrykket '$j = 11$' er lig med $true$, når j faktisk er lig eleve, og ellers er den lig med $false$. Det ses desuden at tabellen $sp(kort, fra, til, valg)$ skal udregnes i følgende rækkefølge for at $max\_sp(kort, fra, til)$ er defineret, når den skal bruges.

$$\begin{aligned}
&sp(kort, 3, 3, valg) \rightarrow \quad sp(kort, 2, 3, valg) \rightarrow \quad sp(kort, 1, 3, valg) \rightarrow \\
&sp(kort, 2, 2, valg) \rightarrow \quad sp(kort, 1, 2, valg) \rightarrow \quad sp(kort, 1, 1, valg)
\end{aligned}$$

$sp(11, 1, 1, valg)$ kan findes på følgende måde.

$$\begin{aligned}
sp(11, 1, 1, split) &= P(11) * \left(-1 + 2 * \sum_{j=1}^{10} P(j) * win(11+j, true, stå)\right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{10} P(j) * win2(j+11, true) \\
sp(11, 1, 1, no_split) &= win1(11)
\end{aligned}$$

Som vi har nævnt finder vi nu $split(kort)$ på følgende måde:

$$split(kort) = max\_sp(kort, 1, 1)$$

Det er værd at bemærke, at man kan regne alle værdierne af $sp(kort, fra, til, valg)$ ud direkte uden at bruge den her angivne rekursive formel. Dette ville dog medføre nogle **meget** komplicerede udtryk. Dette er dog gjort bilag E, og der er blevet vist at hvis man skal splitte første gang (når man kun har fået to kort), så skal man blive ved med at splitte ved enhver lejlighed i det givne spil. Bilag E indeholder kun ikke rekursive formler for $sp(kort, fra, til, valg)$ når $2 \le kort \le 10$, fordi $max\_sp(11, fra, til)$ i forvejen er ikke-rekursiv. Vi ser desuden at vi skal splitte, for $2 \le kort \le 10$, når følgende ulighed er opfyldt:

$$win2(2 * kort, false) \le 2 * win1\_split(kort) - 1$$

Når kort=11, findes der ingen nemmere metode til at bestemme om man skal splitte, eller ej, end at sammenligne $sp(11, 1, 1, split)$ og $sp(11, 1, 1, no\_split)$.

3.2.7 *win_givet(bank)*

win_givet(bank) indeholder den forventede tilbagebetaling for hele spillet, givet banken havde kortet *bank*. Disse værdier er nemme at beregne på følgende måde:

$$win\_givet(bank) = \sum_{j=2}^{11} P(j) * split(j)$$

3.2.8 *win_total*

win_total indeholder den forventede tilbagebetaling, før spillet starter. Da bankørens første kort følger sandsynlighederne $P(i)$, $i = 2, 3, \ldots, 11$, kan *win_total* findes på følgende måde:

$$win\_total = \sum_{j=2}^{11} P(j) * win\_givet(j)$$

3.3 De fundne strategier

Jeg har ved at bruge de givne formler beregnet de optimale strategier for bankøren og spilleren, når $P(i)$'erne har følgende værdier:

$$P(kort) = 1/13 \quad kort \neq 10$$
$$P(10) = 4/13$$

3.3.1 Bankørens optimale strategi

Bankørens strategi er lagt fast fra starten, så man kan ikke rigtig snakke om en optimal strategi for bankøren, men jeg vil her nævne hvad hans faste strategi medfører, når kortfordelingen er jævn.

Bankørens	Sandsynlighed for at bankøren får					
første kort	17	18	19	20	21	Blackjack
2	0.1398091	0.1349074	0.1296554	0.1240265	0.1179935	0.0000000
3	0.1350340	0.1304823	0.1255805	0.1203286	0.1146996	0.0000000
4	0.1304897	0.1259381	0.1213864	0.1164846	0.1112327	0.0000000
5	0.1222513	0.1222513	0.1176996	0.1131480	0.1082462	0.0000000
6	0.1654382	0.1062666	0.1062666	0.1017149	0.0971633	0.0000000
7	0.3685662	0.1377970	0.0786254	0.0786254	0.0740737	0.0000000
8	0.1285665	0.3593358	0.1285665	0.0693949	0.0693949	0.0000000
9	0.1199954	0.1199954	0.3507647	0.1199954	0.0608238	0.0000000
10	0.1114243	0.1114243	0.1114243	0.3421936	0.0345013	0.0769231
11	0.1307889	0.1307889	0.1307889	0.1307889	0.0538658	0.3076923

3.3.2 Spillerens optimale strategi

I den følgende tabel ser vi spillerens optimale strategi. Feltet *uden es=11* viser hvor stor en sum vi skal have, før vi skal stå, hvis vi ikke har et es, som bliver talt som 11. Ligeledes betegner feltet *med es=11*, hvad vi skal have for at stå, hvis vi har et es som bliver talt som 11. Det er klart at har vi mere end det vi skal stå på, ifølge tabellen, så skal vi også stå. Det sidste felt i tabellen, betegnet *forventet tilbagebetaling*, giver os værdien af tabellen $win\_givet(bank)$, hvor $bank$ er bankørens kort. Den lille kasse under tabellen, som er vist herunder, angiver værdien af win_total.

Bankens kort	Stå på		Split med										Double Down			Forventet tilbage-betalin
	uden es=11	med es=11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	11	10	9	
2	13	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	-	ja	ja	ja	ja	-	1.091
3	13	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	-	ja	ja	ja	ja	ja	1.123
4	12	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	-	ja	ja	ja	ja	ja	1.157
5	12	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	ja	ja	ja	ja	ja	ja	1.193
6	12	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	ja	ja	ja	ja	ja	ja	1.229
7	17	18	ja	-	-	ja	ja	-	-	-	ja	ja	ja	ja	-	1.144
8	17	18	ja	-	ja	ja	-	-	-	-	-	-	ja	ja	-	1.058
9	17	19	ja	-	ja	ja	-	-	-	-	-	-	ja	ja	-	0.9594
10	17	19	ja	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.8230
11	17	19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.6611

Total gevinst = 0.99286

Jeg har på nuværende tidspunkt lavet en simulation, som bekræftede, de fundne værdier indtil nu. Denne simulation gav en total tilbagebetaling på 0.99279, efter 20 000 000 spil, som er rimlig tæt på det forventede (ligger indenfor et 95% konfidensinterval).

For en uddybning af spillerens strategi se bilag F.

4 Optimal strategi uden tilbagelægning

For at finde den optimale strategi, når vi tager højde for, at de 3 første kort ændrer på kortfordelingen, skal vi bruge algoritmen fra kapitel 3.2. Foruden den algoritme, skal vi også bruge en funktion, som ændrer $P(i)$'erne, når et kort bliver taget ud af bunken. Denne sidste funktion vil jeg betegne $Change\_P(P, kort, kort\_tilbage)$, hvor P er sandsynlighederne $P(i)$ $i = 2, 3, \ldots, 11$, $kort$ er det kort som tages ud, og $kort\_tilbage$ er det antal kort der er tilbage i bunken, **før** vi fjener kortet. Jeg vil føst give algoritmen for $Change\_P(P, kort, kort\_tilbage)$, og derefter algoritmen for at finde den optimal strategi uden tilbagelægning.

4.1 *Change_P(P,kort,kort_tilbage)*

Algoritmen for denne funktion ser ud som følger:

$$P(kort) = \frac{P(kort) * kort\_tilbage - 1}{kort\_tilbage - 1}$$

$i \neq kort$

$$P(i) = \frac{P(i) * kort\_tilbage}{kort\_tilbage - 1}$$

Denne algoritme er rigtig, da $P(i) * kort\_tilbage$ er det antal kort der er tilbage i bunken med værdi i. Det vil sige at $P(i)$ er det antal kort der er tilbage i bunken, med værdi i, divideret med det totale antal kort der er tilbage i bunken.

4.2 Algoritmen for den optimale strategi

Algoritmen for den optimale strategi med tilbagelægning, vil nu se ud som følger, hvor *sum* er den forventede tilbagebetaling ved brug af denne nye strategi, og *sand* er en temporær variabel.

```
Procedure strategi_med_tilb.
   sum = 0
   bank = 2 -> 11
    k1, k2 = 2 -> 11
     << P(10)=4/13, P(i)=1/13 i=2,3,..,9,11 >>
     sand = P(bank)
     Cange_P(P,bank,312)
     sand = sand*P(k1)
     Cange_P(P,k1,311)
     sand = sand*P(k2)
     Cange_P(P,k2,310)
     << Find optimal strategi fra kapitel 3, med de nye P(i)'er >>
     sum = sum + sand* <<forvented gevinst ved brug af denne strategi>>
```

Selve strategien findes ved at se på hvad man skal gøre når man har de to kort $k1$ og $k2$, og bankøren har *bank*. Denne strategi ville være meget omfattende, hvis den skulle huskes på denne måde. Jeg nævner derfor kun, i kapitel 4.3, ændringerne i denne strategi i forhold til den fra kapitel 3.

Den algoritme som jeg har angivet her kan gøres noget hurtigere, ved at man kun skal beregne strategien fra kapitel 2, $\binom{10}{3}$=120 gange, istedet for de 1000 gange som det er nu. Dette er tilfældet fordi at man kan bruge den samme strategi, når *bank*, $k1$ og $k2$ permuteres.

f.eks. følgende kombinationer af *bank*, $k1$ og $k2$, kan bruge samme strategi.

bank	*k1*	*k2*
2	3	4
2	4	3
3	2	4
3	4	2
4	2	3
4	3	2

4.3 Den fundne strategi

Der er følgende ændringer i den fundne strategi, sammenlignet med den første strategi, som vi fandt i kapitel 3:

ens egne kort nr.1	ens egne kort nr.2	Bankens kort	Ændring
2	4	10	stå på 16 uden es=11
2	5	10	stå på 16 uden es=11
3	3	10	stå på 16 uden es=11
3	4	10	stå på 16 uden es=11
3	5	10	stå på 16 uden es=11
3	7	10	stå på 16 uden es=11
4	4	10	stå på 16 uden es=11
4	5	10	stå på 16 uden es=11
4	7	10	stå på 16 uden es=11
4	8	10	stå på 16 uden es=11
4	11	10	stå på 16 uden es=11
5	5	10	stå på 16 uden es=11
5	7	10	stå på 16 uden es=11
3	3	4	stå på 18 med es=11

$\boxed{\text{Forventet tilbagebetaling} = 0.99388}$

Vi bemærker at alle disse ændringer, undtaget den sidste, kun påvirker strategien om man skal stå på 16, uden et es der tæller 11, når bankøren har en tier. Disse ændringer medførte, at vores forventede tilbagebetaling steg til 0.99388. Denne ændring i forhold til vores første strategi, er dog meget mindre end hidtil antydet. Hvis man bruger den første strategi, og tager højde for ændringen i kortfordelingen, som de tre første kort i et spil forudsager, får man at den forventede tilbagebetaling bliver **0.99387**, som kun er 0.00001 mindre end hvis vi bruger den nye strategi.

5 Ændret kortfordelinger

Vi bruger her strategien fra kapitel 3.3.2, men tager højde for den ændring i kortfordeling, som de tre første kort i et spil forudsager. $win\_total(P)$ returnerer den forventede tilbagebetaling, givet at kortfordelingen er P. Vi vil nu beregne hældningen af $win\_total(P)$, med hensyn til alle $P(i)$'erne. Denne hældning bliver i første omgang udregnet på enhedssfæren, det vil sige, at når vi ændrer $P(kort)$ en lille smule, skal alle andre $P(i)$'er ændres tilsvarende, så $\sum_{j=2}^{11} P(j) = 1$. Hældningen, som findes på denne måde, vil jeg betegne α_{kort}.

Efter at disse α_{kort}'er er fundet vil jeg finde de tilsvarende hældninger:

$$f_{kort} = \frac{d(win\_total(P, tilb))}{d(P(kort))}$$

Disse hældninger er ikke udregnet på enhedssfæren, men er de virkelige hældning, som vi normalt kender dem.

5.1 α_{kort}

Før vi kan udregne denne hældning, må vi vide hvordan vi skal ændre alle de andre $P(i)$'er, når vi lægger et lille tal, ε, til $P(kort)$. Det gør funktionen $Little\_change(P, kort, \varepsilon)$ for os.

$Little\_change(P, kort, \varepsilon)$. Denne funktion skal lægge ε til $P(kort)$, og samtidig ændre alle andre $P(i)$'er, så at deres indbyrdes forhold er uændret, og $\sum_{j=2}^{11} P(j) = 1$. Dette gøres på følgende måde.

$$P^*(kort) = P(kort) + \varepsilon$$

For $2 \leq i \leq 11$, $i \neq kort$

$$P^*(i) = P(i)\frac{1 - P^*(kort)}{1 - P(kort)}$$

Vi har nu de nye sandsynligheder i P^*. Det er nemt at kontrollere at forholdet mellem alle $P^*(i)$'erne ($i \neq kort$) er den samme som for alle $P(i)$'erne. Det er ligeledes nemt at kontrollere at $\sum_{j=2}^{11} P^*(j) = 1$.

Vi kan nu approximere hældningen α_{kort} med funktionen $\mathrm{A}(P, kort, \varepsilon)$, som udregnes på følgende måde, hvor P er den jævne kortfordeling, og $2 \leq kort \leq 11$:

$$\begin{aligned} P^+ &= Little\_change(P, kort, \varepsilon) \\ P^- &= Little\_change(P, kort, -\varepsilon) \\ \mathrm{A}(P, kort, \varepsilon) &= \frac{win\_total(P^+) - win\_total(P^-)}{2 * \varepsilon} \end{aligned}$$

Ved at udregne $\mathrm{A}(P, kort, \varepsilon)$ for mange ε og ekstrapolere med 'Richardson ekstrapolation', får man en meget god approximation for α_{kort}. Denne approximation er så god, at vi, når vi kun regner med ca. 5 betydende cifre, uden problemer kan antage, at α_{kort} er lig med denne approksimation. 'Richardson ektrapolation' er ikke strengt nødvændig, men giver et lidt bedre resultat. Vi har nu fundet α_{kort} for alle $2 \leq kort \leq 11$.

5.2 f_{kort}

Vi kan ikke finde f_{kort} direkte, da $win\_total(P)$, forlanger at $\sum_{j=2}^{11} P(j) = 1$. I stedet kan vi opstille nogle ligninger, som f_{kort} skal opfylde.

Lad $\Delta P(kort)$ være stigningen af sandsynligheden, for at få et kort med værdien j, når vi bruger $Little\_change(P, kort, \varepsilon)$. Givet ε og $kort$, gælder nu følgende:

$$\varepsilon * \alpha_{kort} = \sum_{j=2}^{11} f_j * \Delta P(j)$$

Vi mangler nu at finde $\Delta P(j)$. Dette kan dog nemt gøres ved hjælp af følgende formel (se eventuelt definitionen på $Little\_change(P, kort, \varepsilon)$):

$$\begin{aligned}\Delta P(kort) &= (P(kort) + \varepsilon) - P(kort) \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Når $i \neq kort$

$$\begin{aligned}\Delta P(i) &= \left(P(i)\frac{1 - P(kort) - \varepsilon}{1 - P(kort)}\right) - P(i) \\ &= P(i)\frac{-\varepsilon}{1 - P(kort)} \\ &= -\varepsilon\frac{P(i)}{1 - P(kort)}\end{aligned}$$

Ved at indsætte disse værdier i den oprindelige formel får vi følgende 10 ligninger med 10 ubekendte (de 10 f_i'er):

For $2 \leq kort \leq 11$

$$\begin{aligned}\varepsilon * \alpha_{kort} &= \sum_{j=2}^{11} f_j * \Delta P(j) \\ &= f_{kort} * \varepsilon - \varepsilon * \sum_{j=2, j\neq kort}^{11} f_j * \frac{P(j)}{1 - P(kort)}\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\alpha_{kort} = f_{kort} - \sum_{j=2, j\neq kort}^{11} f_j \frac{P(j)}{1 - P(kort)}$$

Ved brug af en passende metode til løsning af disse linære ligningssystemer, kan vi nu finde f_{kort}, for alle $2 \leq kort \leq 11$. Jeg har brugt Gauss-Seidel, da den er hurtig at programmere. Den er specielt nem i vores tilfælde, da vi direkte får følgende formel, som er lig med Gauss-Seidel:

$$f_{kort} = \alpha_{kort} + \sum_{j=2, j\neq kort}^{11} f_j * \frac{P(j)}{1 - P(kort)}$$

Vi bruger bare denne formel cyklisk for $kort$, dvs $kort$ antager værdierne $2, 3, \ldots, 11, 2, 3 \ldots$, indtil vi er tæt nok på vores løsning.

Det eneste problem ved denne løsningsmetode er at f_i'erne ikke er entydig bestemt ved de 10 ligninger. Vi ser at hvis vi har en løsning, kan vi finde uendelig mange andre løsninger ved at lægge en fast konstant til alle f_i'erne. Dette er sandt da $\sum_{j=2, j\neq kort}^{11} P(j)/(1 - (P(kort)) = 1$.

Dette betyder at vi også kunne løse ligningssystemmet ved at give f_{11} en fast værdi og lade $kort$ antage værdierne $2, 3, \ldots, 10, 2, 3 \ldots$ i vores ovennævnte løsningsmetode. For at få en løsning som passer os lægger vi så bare et fast tal til alle f_i'erne.

5.3 De fundne hældninger

Ved brug af de før omtalte algoritmer, har jeg fået følgende hældninger.

5.3.1 α_{kort}

α_{kort} er blevet fundet når der er forskellige antal kort tilbage i bunken.

Antal kort tilbage	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}
312	-0.2001	-0.2318	-0.2959	-0.3732	-0.2446	-0.1336	0.0240	0.1055	0.3401	0.3296
286	-0.1999	-0.2316	-0.2956	-0.3728	-0.2443	-0.1336	0.0237	0.1052	0.3397	0.3296
260	-0.1997	-0.2313	-0.2951	-0.3724	-0.2440	-0.1336	0.0234	0.1049	0.3393	0.3297
234	-0.1994	-0.2309	-0.2945	-0.3718	-0.2436	-0.1337	0.0231	0.1045	0.3389	0.3298
208	-0.1991	-0.2305	-0.2939	-0.3712	-0.2430	-0.1337	0.0226	0.1040	0.3383	0.3299
182	-0.1986	-0.2299	-0.2930	-0.3703	-0.2423	-0.1338	0.0220	0.1034	0.3375	0.3300
156	-0.1980	-0.2291	-0.2918	-0.3691	-0.2414	-0.1338	0.0212	0.1026	0.3365	0.3302
130	-0.1972	-0.2281	-0.2901	-0.3675	-0.2401	-0.1340	0.0201	0.1014	0.3350	0.3304
104	-0.1960	-0.2264	-0.2875	-0.3651	-0.2382	-0.1342	0.0184	0.0996	0.3329	0.3308

Som det ses, er der en forholdsvis lille ændring i hældningerne, når vi ændrer det antal kort der er tilbage i bunken. Vi ser også, at det er godt for spilleren at der er mange 9'er, 10'er og esser i bunken, mens der helst skal være få af de små kort mellem 2 og 7 i bunken.

5.3.2 f_{kort}

Som nævnt før er der uendelig mange løsninger for vores ligningssystem. Jeg vil her nævne den løsning, som har følgende egenskab: $\sum_{j=2}^{11} P(j) * f_j = 0$.

Antal kort tilbage	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
312	-0.1847	-0.2140	-0.2732	-0.3445	-0.2258	-0.1233	0.0221	0.0974	0.2354	0.3042
286	-0.1845	-0.2138	-0.2728	-0.3442	-0.2255	-0.1233	0.0219	0.0971	0.2352	0.3043
260	-0.1843	-0.2135	-0.2724	-0.3437	-0.2252	-0.1233	0.0216	0.0969	0.2349	0.3043
234	-0.1841	-0.2132	-0.2719	-0.3432	-0.2248	-0.1234	0.0213	0.0965	0.2346	0.3044
208	-0.1837	-0.2128	-0.2712	-0.3426	-0.2243	-0.1234	0.0209	0.0960	0.2342	0.3045
182	-0.1833	-0.2122	-0.2704	-0.3418	-0.2237	-0.1235	0.0203	0.0955	0.2336	0.3046
156	-0.1828	-0.2115	-0.2693	-0.3407	-0.2228	-0.1235	0.0196	0.0947	0.2329	0.3048
130	-0.1820	-0.2105	-0.2678	-0.3392	-0.2217	-0.1237	0.0185	0.0936	0.2319	0.3050
104	-0.1809	-0.2090	-0.2654	-0.3370	-0.2199	-0.1239	0.0170	0.0919	0.2305	0.3053

Vi ser igen at hældningerne ændrer sig meget lidt når der kommer færre kort i bunken. Vi kan, hvis vi kun regner med 2-3 betydende cifre, igen antage at disse hældninger er uafhængige af det antal kort der er tilbage i bunken.

5.4 Brugbarheden af hældningerne

For at kontrollere om hældningerne kan bruges til at beregne den forventede tilbagebetaling, når kortfordelingen ikke er jævn vil jeg checke følgende tre punkter:

Linearitet. Jeg vil her undersøge om den forventede tilbagebetaling ændrer sig linært når vi ændrer sandsynligheden for at få et bestemt kort, og selvfølgelig justerer de andrer sandsynligheder, så summen er en.

Uafhængighed. Jeg vil her undersøge hvad der sker, når vi ændrer sandsynligheden for to kort med ε, og samtidig ændrer alle de andre sandsynligheder, så summen af dem stadig er en. For at kunne bruge f_i'erne, skal tilbagebetalingen helst ændrer sig linært med hensyn til ε.

Kontrol af f_{kort} Ved de samme betingelser, som under punktet 'Uafhængighed', skal f_i'erne kunne forudse de hældninger vi får ved at ændre på to af sandsynlighederne.

5.4.1 Linearitet

For at undersøge om den forventede tilbagebetaling er linær, kigger jeg på grafen med den forventede tilbagebetaling ud af en akse, og sandsynligheden for at få kortet $kort$ ud af den anden. På grund af lidt problemmer med min PC derhjemme, har jeg desvære ikke kunnet vise disse grafer her. Jeg kan dog fortælle at de, uanset hvor mange kort der var tilbage i bunken, var næsten linære, for alle værdier af $kort$. Man kunne se en svag krumning i nogle af graferne, hvis man lader sandsynlighederne komme ud i ekstremerne, dvs afvigelser på ca 20 kort. Jeg vil dog fremover antage at de er helt linære, som også er en realistisk antagelse, da krumningen var meget svag.

5.4.2 Uafhængighed

Den forventede tilbagebetaling, skal desuden ændre sig linært, når vi forøger to $P(i)$'er med ε. Jeg har igen tegnet en graf over hvordan den forventede tilbagebetaling ændrer sig i forhold til ε. Disse grafer viste sig heldigvis også at være næsten helt linære, og i hvert fald linære nok til at hældningen giver et realistisk billede af hvordan den forventede tilbagebetaling ændrer sig.

5.4.3 Kontrol af f_{kort}

f_i'erne skal som nævnt kunne forudse hældningerne, som fremkommer ved at lade to P(i)'er ændre sig med ε, og lade de andre P(i)'er ændre sig tilpas meget så summen af alle P(i)'erne forbliver en. P(i)'erne ændrer sig på følgende måde:

$$\begin{aligned} P^*(kort1) &= P(kort1) + \varepsilon \\ P^*(kort2) &= P(kort2) + \varepsilon \end{aligned}$$

For $i \neq kort1$ og $i \neq kort2$

$$P^*(i) = P(i)\frac{1 - P^*(kort1) - P^*(kort2)}{1 - P(kort1) - P(kort2)}$$

Vi kan nu ligesom før beregne $\Delta P(i)$'erne, som får følgende værdier:

$$\begin{aligned} \Delta P(kort1) &= \varepsilon \\ \Delta P(kort2) &= \varepsilon \end{aligned}$$

For $i \neq kort1$ og $i \neq kort2$

$$\begin{aligned} \Delta P(i) &= P(i)\left(\frac{1 - P(kort1) - P(kort2) - 2\varepsilon}{1 - P(kort1) - P(kort2)} - 1\right) \\ &= -\varepsilon\frac{2P(i)}{1 - P(kort1) - P(kort2)} \end{aligned}$$

Hvis vi nu kalder den beregnede hældning på enhedssfæren for $\mathrm{A}^2(kort1, kort2)$, får vi følgende ligning:

$$\mathrm{A}^2(kort1, kort2) = f_{kort1} + f_{kort2} - \sum_{j=2, j\neq kort1, j\neq kort2}^{11} f_j \frac{2P(j)}{1 - P(kort1) - P(kort2)}$$

Ved at kigge på bilag A, ser vi at denne beregnede formel passer helt præcist med de eksperimentalt fundne værdier. Kontrollen af f_i'erne er derfor gået godt.

6 Strategier for at tælle kort

Jeg vil nu finde nogle tællestrategier, som er baseret på spillestrategien fra kapitel 3.3.2, og de hældninger vi fandt i det forrige kapitel. Disse strategier skal hovedsagelig baseres på at finde ud af hvornår man har en forventet tilbagebetaling på over 1. Når den forventet tilbagebetaling bliver over en skal man selvfølgelig sætte sin indsats kraftigt op.

Det første skridt i udregningen af tællestrategien går ud på, at finde væksten af alle $P(i)$'erne (som kan være negativ), når man er nået et stykke ned i bunken. Denne vækst vil jeg betegne $\Delta P(i)$ for $i = 2, 3, \ldots, 11$. Vi skal også bruge adskillige andre udtryk, som jeg nu vil definere.

g**å** er det antal kort som er gået siden bunken sidst blev blandet.

N_i er det antal kort, der er gået med værdien i. Det er klart at følgende ligning gælder $\sum_{i=2}^{11} \mathrm{N}_i = g\text{å}$.

$P(i)$ betegner den sædvanlige jævne kortfordeling, dvs $P(10) = 4/13$ mens $P(i) = 1/13$ for alle $i \neq 10$.

$P_{ny}(i)$ betegner kortfordelingen efter at de føromtalte gå kort er gået.

Vi er nu klar til at beregne $P_{ny}(i)$'erne. Dette gøres på følgende måde:

$$P_{ny}(i) = \frac{P(i) * 312 - \mathrm{N}_i}{312 - g\text{å}}$$

Dette er kun en simpel udvidelse af formlen fra kapitel 4.1, hvor gå var antaget til 1.

Vi kan nu også nemt finde alle $\Delta P(i)$'erne, på følgende måde.

$$\begin{aligned}
\Delta P(i) &= P_{ny}(i) - P(i) \\
&= \frac{P(i) * 312 - \mathrm{N}_i}{312 - g\text{å}} - \frac{P(i) * 312 - P(i) * g\text{å}}{312 - g\text{å}} \\
&= \frac{P(i) * g\text{å} - \mathrm{N}_i}{312 - g\text{å}}
\end{aligned}$$

Hvis vi bruger de fundne hældninger, f_{kort}, kan vi nu opstille en ligning, som skal være opfyldt, for at den forventede tilbagebetaling er over 1. Jeg har valgt at bruge hældningerne, som er beregnet, når der var 312 kort tilbage i bunken, da disse hældninger alligevel næsten ikke ændrer sig, når der er færre kort i bunken. Det havde måske været en anelse bedre at bruge hældningerne, som var beregnet, når der var for eksempel 156 kort tilbage i bunken, men forskellen er minimal. Disse hældninger, når der er 312 kort i bunken, betegner jeg, som før, med f_{kort}.

Vi ved at den forventede tilbagebetaling ved jævn kortfordeling og med 312 kort tilbage i bunken er 0.99387 (se kapitel 4.3). Vi skal derfor have en forøgelse af denne forventede tilbagebetaling med 0.00613 for at komme over 1. Jeg vil fremover betegne denne forøgelse med δwin. Den ønskede ligning ser ud som følger, da forøgelsen i den forventede tilbagebetaling kan skrives som $\sum_{i=2}^{11} f_i \Delta P(i)$.

Den forventede tilbagebetaling er over 1 når:

$$\begin{aligned}
\delta win &< \sum_{i=2}^{11} f_i \Delta P(i) \\
&= \sum_{i=2}^{11} f_i \frac{P(i) * g\text{å} - \mathrm{N}_i}{312 - g\text{å}}
\end{aligned}$$

Hvis vi antager, at det første kort som blev givet, efter at bunken blev blandet var k_1, det andet var k_2 etc, så kan man udlede følgende formel, ved brug af den ovenstående ligning.

$$\delta win < \frac{1}{312 - g\text{å}} \sum_{i=2}^{11} (f_i P(i) g\text{å} - f_i \mathrm{N}_i)$$

$\Downarrow$

$$\delta win * 312 - \delta win * gå \quad < \quad \sum_{i=2}^{11} f_i P(i) gå - \sum_{i=2}^{11} f_i \mathrm{N}_i$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \delta win * 312 \quad &< \quad gå * \delta win - \sum_{i=2}^{11} f_i \mathrm{N}_i + gå * \sum_{i=2}^{11} f_i P(i) \\ &= \sum_{i=1}^{gå} \left(\delta win - f_{k_i} + \sum_{j=2}^{11} f_j P(j) \right) \end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn gælder fordi $\sum_{i=2}^{11} f_i \mathrm{N}_i = \sum_{i=1}^{gå} f_{k_i}$. Jeg vil nu definerer tabellen $Num(i)$, og tallet *grænse*, på følgende måde.

$$\begin{aligned} Num(i) &= \delta win - f_{k_i} + \sum_{j=2}^{11} f_j P(j) \\ grænse &= \delta win * 312 \end{aligned}$$

Man ser at $Num(i)$ er et fast tal, som kun afhænger af i, når man antager at δwin, f_j'erne og $P(j)$'erne er faste. Vi ser ligeledes, at vi har en forventet tilbagebetaling på over 1, når summen af $Num(k_i)$'erne, hvor k_i betegner det i'te kort som er gået, er større end tallet *grænse*. Vi har nu en effektiv måde at tælle de kort, som er gået. Den ser ud som følger:

1. Husk et tal i hovedet, og lad dette tal være nul, før der er givet nogen kort fra en ny bunke.
2. Hvis der går et kort med værdi *kort*, så læg $Num(kort)$ til tallet.
3. Hvis tallet bliver større end *grænse*, så sæt en stor indsats på spil, og ellers en lille indsats.

Denne strategi er **den** optimale strategi når vi skal bruge spillestrategien fra kapitel 3.3.2, og vores antagelser er korrekte om linearitet og uafhængighed. Disse antagelse var så tæt på at være korrekte, så jeg vil påstå at dette er den bedste strategi der findes, under de givne forudsætninger.

Det eneste problem ved denne strategi er at $Num(i)$'erne ikke er heltal, så de er meget svære at lægge sammen i hovedet. Vi bliver selvfølgelig nødt til at gange $Num(i)$'erne og tallet *grænse* med en fast konstant, og derefter afrunde dem til heltal.

Man skal dog her bare være opmærksom på følgende ting.

- Tallet, som man husker, vil i gennemsnit vokse for hvert kort man tager (med δwin). Dette gennemsnit skal bevares efter afrundingen. En anden måde at formulere dette på, er at man skal runde lige meget op som ned.

  Grunden til dette kan ses ved følgende lille eksempel:

  – Hvis man kun spiller med 5 bunker istedet for 6, så skulle man gerne få samme tællestrategi som hvis man spillede med 6 bunker og der var gået seksten tier, samt fire toer, treer, firer, femer, sekser, syver, ottere, nierer og esser. Dette får man kun hvis man bevarer den gennemsnitlige vækst af tallet, som man skulle huske, for hvert kort der går.

  En af konsekvenserne af dette er, at det faste tal som man skal gange på $Num(i)$'erne og tallet *grænse*, skal få tallet *grænse* til at blive et heltal gange 24. Dette er tilfældet fordi, at når der er gået fire tier og et kort med hver af de andre værdier, så kan tallet man huskede i hovedet, kun stige med et heltal i gennemsnit. Vi fik tallet 24 fra ligningen 24=312/13.

6.1 Den fundne strategi

Ved at bruge f_i'erne, som blev fundet når der var 312 kort tilbage i bunken, får man følgende tre strategier.

Strategi 1 er den strategi, hvor man ikke afrunder Num'erne eller tallet $grænse$. Den er meget svær at huske, men er medtaget her fordi det er den absolut optimale strategi, med de givne forudsætninger.

Strategi 2 er den strategi, som er nemmest at huske, og alligevel utrolig god. Det er nok denne strategi man ville bruge i praksis. Den har ganget $Num(i)$'erne og tallet $grænse$ med det mindst mulige tal, så forudsætningen om at den gennemsnitlige vækst, i det tal man skulle huske, var bevaret.

Strategi 3 er en mellemting mellem de to første strategier. Vi har her ganget $Num(i)$'erne og tallet $grænse$ med et lidt større tal, så vi kommer nærmere det optimale tilfælde, men skal huske, og regne med, nogle større tal.

6.1.1 Strategi 1

Denne strategi er den absolut optimale strategi, når vi skal bruge spillestrategien fra kapitel 3.3.2, og vores antagelser er korrekte.

$kort$	$Num(kort)$
2	0.1908270
3	0.2201245
4	0.2793020
5	0.3506288
6	0.2319333
7	0.1294269
8	-0.0160078
9	-0.0912657
10	-0.2292960
11	-0.2980952

$$\boxed{grænse = 1.912560}$$

Som sagt er denne strategi meget svær at huske på grund af alle decimalerne. Ved en simpel udregning ser vi, at den forventede stigning af tallet man skulle huske, er 0.00613 per kort som går. Dette var også det tal, som vi havde regnet os frem til.

6.1.2 Strategi 2

Ved udregnelsen af denne strategi ganger jeg både $Num(i)$'erne og tallet $grænse$ med 12.548626. Dette tal kan udregnes på forskelige måder. Enten som 24 divideret med tallet $grænse$ fra strategi 1, eller på følgende måde.

$$\frac{1}{13\,\delta win} = \frac{1}{13 * 0.00613} = 12.548626$$

Vi lader nu $Num^1(i)$'erne betegne de nye $Num(i)$'er og $grænse^1$ betegne den nye $grænse$. Vi skal nu afrunde tallene på bedste måde, så den forventede stigning af tallet man skulle huske, forbliver uændret. Disse nye afrundede værdier vil jeg betegne henholdsvis $Num^1_H(i)$ og $grænse^1_H$. Vi får nu følgende strategi.

$kort$	$Num_H^1(kort)$	$Num^1(kort)$
2	2	2.3946164
3	3	2.7622596
4	4	3.5048566
5	4	4.3999092
6	3	2.9104438
7	2	1.6241301
8	0	-0.2008753
9	-1	-1.1452588
10	-3	-2.8773491
11	-4	-3.7406849

$grænse_H^1 = 24$
$grænse^1 = 24$

Vi kontrollerer også lige, om den forventede stigning af tallet man skulle huske, forbliver uændret.

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{11} P(j)Num^1(j) &= 0.0769231 \\ \sum_{j=2}^{11} P(j)Num_H^1(j) &= 0.0769231 \end{aligned}$$

Denne strategi er forholdsvis nem at huske, og stort set lige så effektiv som strategi 1 (se kapitel 7, for en nærmere sammenligning af de to strategier). Jeg ville derfor foreslå, at det er denne strategi man skal bruge i praksis.

6.1.3 Strategi 3

Denne gang ganger jeg både $Num(i)$'erne og tallet $grænse$ med 125.48626. Dette tal er 10 gange så stort, som det tal vi brugte ved strategi 2. Vi lader nu $Num^{10}(i)$'erne, $Num_H^{10}(i)$'erne, $grænse^{10}$ og $grænse_H^{10}$ have samme betydning som $Num^1(i)$'erne, Num_H^1'erne, $grænse^1$ og $grænse_H^1$ havde i strategi 2. Vi får nu følgende strategi:

$kort$	$Num_H^{10}(kort)$	$Num^{10}(kort)$
2	24	23.9461637
3	28	27.6225962
4	35	35.0485657
5	44	43.9990923
6	29	29.1044375
7	16	16.2413005
8	-2	-2.0087532
9	-11	-11.4525879
10	-29	-28.7734914
11	-37	-37.4068493

$grænse_H^{10} = 240$
$grænse^{10} = 240$

Vi kontrollerer lige, som vi gjorde det ved strategi 2, om den forventede stigning af tallet man skulle huske, forbliver uændret.

$$\sum_{j=2}^{11} P(j)Num^{10}(j) = 0.7692308$$
$$\sum_{j=2}^{11} P(j)Num_H^{10}(j) = 0.7692308$$

Denne strategi er en mellemting mellem de to forrige strategier. Den er kun medtaget her, for at illustrere hvordan man selv kan bestemme, hvor svær strategien skal være at huske, og derved også hvor god den bliver. Min opfattelse er at denne strategi er for svær at bruge i et casino, da det er nogle forholdsvis store tal, man skal lægge sammen. Den er sandsynligvis heller ikke specielt meget bedre end strategi 2, som var nem at huske.

7 Simulation

Jeg vil i dette afsnit undersøge ved en simulation, hvor gode strategi 1 og 2 er. Da strategi 3 er en mellemting mellem strategi 1 og 2, må man formode at den derfor også vil opføre sig som en mellemting mellem strategi 1 og 2.

For at gøre sammenligningen mellem strategi 1 og 2 nemmere, har jeg i strategi 1 brugt $Num^1(i)$'erne istedet for $Num(i)$'erne, og $grænse^1$ istedet for $grænse$. Dette ændrer intet på strategi 1, da man bare har ganget alle faktorerne op med en konstant.

Der er uendelig mange ting man kunne teste strategierne for, og jeg har udvalgt følgende punkter.

1. Hvor stor gevinst man i gennemsnit får per spil, og hvor stor indsats man i gennemsnit spiller for per spil. Ud fra disse to tal vil jeg så regne den totale tilbagebetaling per spil ud. Dette tal vil jeg forvente at ligge tæt på de 0.99387, som vi har regnet os frem til.

2. For begge strategier, vil jeg undersøge hvad den gennemsnitlige indsats, gevinst og tilbagebetaling er, når man har et gunstig tilfælde (tallet man husker er større end eller lig med 24), og når man har et ugunstigt tilfælde. Jeg vil samtidig her undersøge hvor mange procent af spillene man vil betragte som gunstige, inden man starter på dem (det vil igen sige at tallet er større end eller lig med 24, før spillet starter).

   Under dette punkt vil jeg desuden beregne, hvor meget man skal vædde i de gunstige og ugunstige tilfælde, for at spillet vil gå lige op i det lange løb.

3. For begge strategier vil jeg undersøge hvad den gennemsnitlige indsats, gevinst og forventede tilbagebetaling er, når det tal man husker ligger i bestemte intervaller. Jeg vil desuden beregne hvor stor en procentdel af spillene havnede i hvert interval.

4. For begge strategier vil jeg vædde konkrete beløb i gunstige og ugunstige tilfælde. Jeg vil så undersøge hvor meget jeg vil vinde i gennemsnit per spil. Jeg vil derefter undersøge hvor meget jeg vil forvente at have tabt på noget tidspunkt, hvis jeg blev ved med at spille indtil jeg havde vundet et bestemt beløb. Til sidst vil jeg beregne hvad chancen er, for at min gevinst ligger i nogle bestemte intervaller efter 500 spil.

Alle mine data er baseret på en lang simulation, hvor der er blevet spillet 30 000 000 spil.

7.1 Punkt 1

Den forventede tilbagebetaling per spil, vil jeg beregne på følgende måde.

$$\text{Forventet tilbagebetaling} = (\text{Vundet per spil}) - (\text{Vædet per spil}) + 1$$

Simulationen gav følgende resultat.

Man har i gennemsnit, per spil		
vundet	væddet	en forventet tilbagebetaling på
1.09152	1.09804	0.99348

Vi ser at den forventede tilbagebetalig ligger rimlig tæt på de 0.99387, som vi forventede. Grunden til at den ikke ligger tættere, kan være at vi i beregningen af 0.99387 ikke tog højde for mere end de 3 første kort, og at spil fra den samme bunke ikke er helt uafhængige. Den naturlige usikkerhed ved en simulation kan også være en af hovedårsagerne.

Man vædder selvfølgelig lidt over 1, per spil, da man vædder langt over 1, hver gang man splitter eller laver double down. I det store hele ligger disse tal rimelig tæt på det som vi kunne forvente.

7.2 Punkt 2

Man beregner den forventede tilbagebetaling på samme måde, som man gjorde det i punkt 1. Gunstige og ugunstige tilfælde defineres som før. Det vil sige at man er i et gunstigt tilfælde hvis det tal man skal huske er større end eller lig med 24 (tallet *grænse*), ellers er man i et ugunstigt tilfælde.

Strategi 1 har givet følgende resultat.

Man har	Man har i gennemsnit, per spil		
tilfældet	vundet	væddet	en forventet tilbagebetaling på
ugunstig	1.091442	1.101240	0.9902021
gunstig	1.091804	1.086392	1.0054122

Man er i det gunstig tilfælde 21.55% af tiden

Strategi 2 har givet følgende resultat.

Man har	Man har i gennemsnit, per spil		
tilfældet	vundet	væddet	en forventet tilbagebetaling på
ugunstig	1.091468	1.101417	0.9900512
gunstig	1.091696	1.086523	1.0051728

Man er i det gunstig tilfælde 22.67% af tiden

Vi ser at disse resultater også stemmer godt overens med det vi forventede. Vi ser at den forventede tilbagebetaling er noget over 1, i de gunstige tilfælde, og noget under 1 i de ugunstige, som forventet.

Vi er nu klar til at regne ud hvad vi skal vædde i de gunstige og ugunstige tilfælde, for at spillet går lige op, det vil sige hverken banken eller spilleren vil vinde på spillet i det lange løb. For at beregne disse værdier, skal vi definere følgende variable.

$FT(gunstig)$ er den forventede tilbagebetaling, hvis man er i det gunstige tilfælde.

$FT(ugunstig)$ er den forventede tilbagebetaling, hvis man er i det ugunstige tilfælde.

$Takst(gunstig)$ er det beløb man vil vædde, når man er i det gunstige tilfælde.

$Takst(ugunstig)$ er det beløb man vil vædde, når man er i det ugunstige tilfælde. Dette beløb vil selvfølgelig være 50 kroner i vores tilfælde, da dette er det mindste tilladte beløb.

$Sand(gunstig)$ **og** $Sand(ugunstig)$ er henholdsvis sandsynligheden for at vi, i et tilfældigt spil, befinder os i det gunstige tilfælde, og det ugunstige.

I vores tilfælde får disse variabler følgende værdier.

variabel navnet	Strategi 1	Strategi 2
$FT(gunstig)$	1.0054122	1.0051728
$FT(ugunstig)$	0.9902021	0.9900512
$Takst(ugunstig)$	50	50
$Sand(gunstig)$	0.2155	0.2267
$Sand(ugunstig)$	0.7845	0.7733

Vi ved at den forventede tilbagebetaling minus 1 er lig med det forventede overskud. For at spillet skal være et lige spil skal følgende ligning være opfyldt.

$$\begin{aligned} 0 &= (FG(gunstig) - 1)\, takst(gunstig)\, Sand(gunstig) \\ &\quad + (FG(ugunstig) - 1)\, takst(ugunstig)\, Sand(ugunstig) \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$takst(gunstig) = \frac{(1 - FG(ugunstig))\, takst(ugunstig)\, Sand(ugunstig)}{(FG(gunstig) - 1)\, Sand(gunstig)}$$

Vi kan nu ud fra vores simulation finde denne $takst(gunstig)$, så spillet er et lige spil. Det er klart at vælger vi et beløb der er større end denne takst, så vil vi få overskud i længden. De fundne $takst(gunstig)$'er har følgende værdier.

strategi	$takst(gunstig)$
strategi 1	329.5
strategi 2	328.0

Vi ser at disse tal er næsten ens, så de to strategier er stort set lige gode. Det er overraskende at den dårligere strategi (strategi 2), faktisk klarer sig bedre end den gode i denne simulation. Dette kan skyldes at den bedste strategi ikke er helt optimal (p.gr.a. at nogle af antagelserne ikke er helt 100% korrekte), og at afrundingen har gjort strategien bedre! En anden grund kan være at vi ikke har kørt simulationen længe nok, og at forskellen bare er en naturlig usikkerhed.

7.3 Punkt 3

Jeg har nu fundet den gennemsnitlige indsats, gevinst og forventet tilbagebetaling, når det tal man husker ligger i forskellige intervaller. Først har jeg ladet intervallerne have længden 6, og derefter kigger jeg på nogle mindre intervaller, med længde 1, omkring 24. De fundne værdier ses i bilag B.

Man ser ud fra dette bilag, at grænsen på 24 passer rimelig godt for begge strategier. Der er en vis usikkerhed, når vi kun bruger intervalstørrelser på 1, men jeg mener at man alligevel kan se at grænsen skal være 24, for begge strategier. Vi havde beregnet os frem til, at dette skulle være tilfældet i strategi 1, mens vi i strategi 2 ville, forvente at tilbagebetalingen skulle være præcis 1, når tallet var 24. Dette passer meget godt overens med vores eksperimentalt fundne data.

Tabellerne giver også et godt indtryk af, hvor meget man vil forvente at vinde, hvis tallet man husker er over, eller under, bestemte tal. Dette kan man bruge hvis man vil lave en strategi, for hvad man skal vædde, der er anderledes end den jeg har fremsat. En sådan strategi vil muligvis kunne være bedre end min, ved at man kan gøre det sværere for casinoet at se at man tæller kort.

7.4 Punkt 4

Under dette punkt har jeg antaget at jeg vædder 50 kroner i det ugunstige tilfælde, og følgende beløb i det gunstige.

Strategiens navn	Vædder i gunstige tilfælde	Bruger følgende strategi til at tælle kort med
$Strat1_{200}$	200 kroner	Strategi 1
$Strat1_{300}$	300 kroner	Strategi 1
$Strat1_{500}$	500 kroner	Strategi 1
$Strat2_{200}$	200 kroner	Strategi 2
$Strat2_{300}$	300 kroner	Strategi 2
$Strat2_{500}$	500 kroner	Strategi 2

Ved de næste informationer, som simulationen har givet mig, vil jeg antage at jeg blev ved med at spille, indtil jeg havde vudet et bestemt beløb. Jeg vil så undersøge hvor stort et underskud jeg havde været nede på, før jeg havde vundet det beløb jeg satte ud for at vinde. Jeg vil undersøge dette ved at se hvor mange procent af gangene mit underskud lå i forskellige intervaller. Jeg vil naturligvis også undersøge hvor mange gange jeg faktisk nåede mit mål. Til sidst vil jeg beregne gennemsnittet, på det underskud jeg har haft, før jeg nåede mit mål. Simulationen har nu givet følgende resultater.

$Strat1_{200}$									
Mit mål er	Mit maksimale underskud lå i intervallerne							Jeg nåede mit mål følgende antal gange	Mit gennemsnitlige underskud
	0 - 500	500 - 1000	1000 - 2000	2000 - 5000	5000 - 10000	10000 - 20000	større end 20000		
500	46.7%	17.2%	13.6%	14.2%	4.1%	2.4%	1.8%	169	2358.1361
1000	31.2%	12.9%	21.5%	20.4%	6.5%	4.3%	3.2%	93	3726.6129
2000	16.7%	16.7%	18.8%	18.8%	18.8%	4.2%	6.2%	48	6114.0625
5000	10.0%	0.0%	15.0%	25.0%	30.0%	5.0%	15.0%	20	11097.5000

$Strat1_{300}$									
Mit mål er	Mit maksimale underskud lå i intervallerne							Jeg nåede mit mål følgende antal gange	Mit gennemsnitlige underskud
	0 - 500	500 - 1000	1000 - 2000	2000 - 5000	5000 - 10000	10000 - 20000	større end 20000		
500	50.4%	15.8%	12.9%	11.2%	4.9%	2.8%	2.0%	836	2908.4928
1000	35.5%	14.5%	15.6%	17.3%	8.5%	5.1%	3.4%	468	4770.1389
2000	25.9%	12.0%	13.5%	21.9%	11.2%	10.4%	5.2%	251	7684.2629
5000	10.5%	10.5%	7.6%	25.7%	14.3%	19.0%	12.4%	105	14930.2381

$Strat1_{500}$									
Mit mål er	Mit maksimale underskud lå i intervallerne							Jeg nåede mit mål følgende antal gange	Mit gennemsnitlige underskud
	0 - 500	500 - 1000	1000 - 2000	2000 - 5000	5000 - 10000	10000 - 20000	større end 20000		
500	50.5%	11.0%	12.5%	12.9%	6.0%	3.6%	3.6%	7596	3949.3780
1000	39.6%	10.8%	13.8%	16.6%	8.3%	5.2%	5.6%	4818	5751.9925
2000	28.2%	8.7%	14.2%	19.7%	11.5%	8.3%	9.3%	2762	8947.9182
5000	14.8%	6.6%	9.9%	20.5%	16.3%	13.2%	18.7%	1201	16637.0316

$Strat2_{200}$									
Mit mål er	Mit maksimale underskud lå i intervallerne							Jeg nåede mit mål følgende antal gange	Mit gennemsnitlige underskud
	0 - 500	500 - 1000	1000 - 2000	2000 - 5000	5000 - 10000	10000 - 20000	større end 20000		
500	51.0%	11.6%	16.8%	11.6%	3.9%	3.2%	1.9%	155	2386.7742
1000	37.2%	8.1%	24.4%	15.1%	7.0%	4.7%	3.5%	86	3725.0000
2000	24.4%	15.6%	13.3%	20.0%	13.3%	6.7%	6.7%	45	5926.1111
5000	11.1%	0.0%	11.1%	22.2%	27.8%	11.1%	16.7%	18	11794.4444

$Strat2_{300}$									
Mit mål er	Mit maksimale underskud lå i intervallerne							Jeg nåede mit mål følgende antal gange	Mit gennemsnitlige underskud
	0 - 500	500 - 1000	1000 - 2000	2000 - 5000	5000 - 10000	10000 - 20000	større end 20000		
500	48.3%	15.8%	12.3%	13.1%	5.6%	3.0%	1.9%	903	3080.7863
1000	35.2%	13.4%	17.3%	16.7%	9.0%	5.1%	3.3%	509	4895.4813
2000	20.8%	15.0%	15.0%	24.1%	10.6%	8.8%	5.8%	274	7940.4197
5000	9.7%	6.2%	14.2%	24.8%	14.2%	16.8%	14.2%	113	15558.6283

$Strat2_{500}$									
Mit mål er	Mit maksimale underskud lå i intervallerne							Jeg nåede mit mål følgende antal gange	Mit gennemsnitlige underskud
	0 - 500	500 - 1000	1000 - 2000	2000 - 5000	5000 - 10000	10000 - 20000	større end 20000		
500	50.4%	11.0%	12.6%	12.6%	6.1%	3.7%	3.6%	7563	4020.5937
1000	38.4%	11.6%	13.8%	16.7%	8.4%	5.4%	5.7%	4790	5882.0511
2000	26.8%	9.9%	13.8%	19.9%	11.7%	8.4%	9.5%	2749	9137.3409
5000	14.0%	6.0%	10.1%	20.8%	16.9%	13.0%	19.1%	1193	17209.8491

Som vi ser kan vi ikke bruge det gennemsnitlige underskud til særlig meget, da det er nogle få dårlige perioder der får gennemsnittet til at blive meget højt, selv om man taber forholdsvis lidt, de fleste gange. En anden grund til at dette gennemsnit ikke er særlig brugbart, er at man stopper simulationen efter et bestemt antal spil, og de spil, som kom efter den sidste gang man havde nået sit mål tæller ikke med.

For eksempel: Hvis man vandt 10000 kroner meget hurtigt, og derefter tabte 100000 kroner , så ville ens gennemsnitlige underskud være lav, da alle de sidste dårlige spil ikke ville nå at tælle med, fordi simulationen stoppede før man nåede at få et overskud igen.

Vi kan ellers se ud fra tabellen, hvor mange penge vi skal tage med på casino, hvis vi går når vi har vundet et bestemt beløb.

For eksempel: Hvis man går når man har vundet 1000 kroner, og bruger strategi $Strat2_{300}$, skal man tage 5000 kroner med, for at have 82.6% chance for at det skal lykkes. (Vi ser bort fra at det kan tage lang tid, og casinoet lukker etc). Vi tager ikke højde for, at når vi har tabt 5000 kroner, må vi ikke spille mere, selv om man ville vinde fra det tidspunkt af.

Tilsidst vil jeg nævne, at man skal tage disse tal lidt løst, da det er et forholdsvis lille antal gange man har nået sit mål, og derfor kan man forvent en vis usikkerhed på tallene. Hvis man var meget interesseret i disse tal, ville det nok være end bedre ide at estimere udfaldet af hvert enkelt spil, og så ud fra det regne sig frem til de ønskede tal. På grund af manglende tid, og projektets nuværende omfang, vil jeg ikke komme nærmere ind på dette, i denne raport.

Den sidste del af simulationen, går ud på at beregne ens forventede gevinst, hvis man spiller 500 spil. Jeg vil forvente at man vil spille ca 500 spil i løbet af et par aftener, så de tal jeg får frem vil være meget relevante, hvis man planlægger at tage på casino et par gange. Jeg vil igen teste de 6 før omtalte strategier.

Jeg vil regne ud, på to forskellige måder, hvad sandsynligheden er for at min gevinst efter 500 spil ligger i et givet interval.

Måde 1 Dette er den mest logiske og nemmeste metode. Den går ud på, at man efter der er gået 500 spil, ser i hvilket interval man er landet, og på den måde ser hvor mange gange man lander i hvert interval.

Måde 2 Dette er den mest fleksible, metode. Den går ud på, at man igennem alle 30 000 000 spil finder middelværdien og spredningen for hvert enkelt spil. Den centrale grænseværdisætning giver os, at gevinsten efter 500 spil er næsten normalfordelt, med en middelværdi og varians, som er 500 gange større end for et enkelt spil. Man kan nu ved hjælp af tabeller over normalfordelingen beregne hvor stor chancen er, for at gevinsten efter 500 spil ligger i et bestemt interval.

Man bemærker at denne metode kan benyttes på vilkårlige intervaller, efter at simulationen er færdig. Ved den første metode måtte man køre simulationen igen, hvis man var interesseret i andre intervaller.

Vi lader μ være middelværdien, og s være spredningen, af et enkelt spil. Disse værdier findes nu eksperimentalt på følgende måde.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{30000000}\sum_{i=1}^{30000000} X_i \\ s^2 &= \frac{1}{29999999}\sum_{i=1}^{30000000} (X_i-\mu)^2 \\ &= \frac{1}{29999999}\left(\left(\sum_{i=1}^{30000000} X_i^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{30000000} X_i\right)^2}{30000000}\right)\end{aligned}$$

Vi ved nu at gevinsten efter 500 spil, minus $500 * \mu$, det hele divideret med $500 * s$, er næsten normalfordelt med middelværdi 0, og spredning 1. Ved at indtaste en tabel over normalfordelingen, i en computer, kan vi nu få de ønskede sandsynligheder. Værdierne for både måde 1 og måde 2 er vist i bilag C.

Grunden til at de to metoder ikke giver helt det samme resultat kan naturligvis skyldes den naturlige usikkerhed ved simulationen. Dette er dog usandsynligt, både på grund af afvigelsens størrelse, og fordi måde 1 konstant giver højere værdier en måde 2, på de intervaller der ligger tæt på nul. Det er meget mere sandsynlig, at fordelingen af gevinsten efter 500 spil ikke er helt normalfordelt. Dette er også sandsynligt da spillene ikke er helt uafhængige (men næsten), og fordelingen for et enkelt spil er meget forskellig fra normalfordelingen.

Vi ser at Blackjack er meget tæt på at være et lige spil, med de strategier jeg har givet her. Man kunne forøge sin egen fordel ved at hæve taksten, når man er i en gunstig position. Dette vil dog højst sandsynligvis få casinoet til at opdage at du tæller kort, hvorved man vil blive bortvist.

8 Konklusion

Jeg har gennem de foregående afsnit fundet frem til en optimal strategi, som er nem at huske, og som gør det muligt at slå casinoet i det lange løb. Denne strategi, som er beskrevet igennem hele denne rapport, er opsummeret i bilag D. Jeg har (desværre!!) også fundet ud af at det at spille Blackjack, ikke er vejen frem, hvis man kun er interesseret i at tjene nogle sikre penge. Det forventede overskud er alt for lille, og der er alt for meget held involveret, hvis man kun spiller et begrænset antal spil, så som et par tusind!! Jeg vil derfor på nuværende tidspunkt komme med følgende parole.

Man skal ikke spille Blackjack, udelukkende for pengenes skyld

Når dette er sagt, skal det dog også nævnes at Blackjack er en af de bedste spil, at spille på casino, hvis ens eneste formål er at tjene penge. Ved Blackjack kan man trods alt komme op på at spillet er helt lige. Dette kan normalt ikke lade sig gøre i casinospil, da casinoerne normalt altid vinder i det lange løb, i alle deres spil. Grunden til at Casinoerne også vinder mange penge på Blackjack, er at der er næsten ingen spillere, som spiller optimalt, både med hensyn til spillestrategi og tællestrategi.

8.1 Sammenligning med andre strategier

Dette afsnit vil blive forholdsvis kort, da jeg ikke har den store baggrund for at sammenligne min strategi med andre eksisterende strategier. Det begrænsede kendskab jeg har til andre strategier, kommer udelukkende fra nyhedssystemet på vores computernetværk på Odense Universitet. Dette er et forum, hvor alle kan skrive om diverse ting, blandt andet Blackjack. Jeg har gennem dette system hovedsagelig stiftet bekendtskab med amerikanske Blackjack strategier. Disse strategier minder noget om min strategi, undtaget på nogle få punkter, som jeg nu vil beskrive.

- Selve spillestrategien vil jeg ikke komme ind på, da det kun er tællestrategier, som står nævnt på vores nyhedssystem.

- De bedste tællesystemer tildeler nogle værdier til hvert kort, ligesom jeg gør det, og de tæller derfor også på samme måde. Alle disse systemer giver dog ikke nogen værdi til esserne!! Nogle af strategierne, opfordrer til at man skal huske hvor mange esser der er over eller under middel (dvs man skal huske både antal esser, og antal kort, på en smart måde). De kombinerer så dette tal med vores sædvanlige tal, for at give strategien.

  Jeg vil mene at dette gør deres strategier enten dårligere end min, eller sværere at huske (hvis man skal huske esser separat). Jeg kender ikke grunden til at de ikke tildeler esserne nogen værdi, men jeg vil gætte på at det har noget med følgende egenskab.

  $$\sum_{i=2}^{10} P(i)\,\alpha_i \approx 0$$

  Det er klart, at dette ikke er sandt, hvis man lader i summere helt op til 11. Grunden til at dette er mit umiddelbare gæt er, at jeg selv havde problemmer i starten med at summen fra 2 til 11 var forskellig fra 0. Det er klart at hvis dette er grunden, så er jeg kommet længere end dem der lavede de amerikanske systemer!?!

  Selv om dette ikke er grunden, vil jeg alligevel mene at mit tællesystem absolut må være bedre, da det tager højde for alle kort, som er gået, mens de amerikanske ikke tager højde for esserne. Da der er nogle af de amerikanske systemer, som opfordrer en til at tælle esser ved siden af, må vi konkludere at reglerne i Amerika, ikke er så forskellige fra vores, så essernes hyppighed er irrelevant. Tabet af kendskab til det antal esser, som er gået, må helt klart forringe deres systemmer!!

  Den eneste (usandsynlige) grund til at de ikke tæller esser, kunne være at de foruden at ændre indsatsen, alt efter hvad der er gået, også ændrer spillestrategien. Ændringen i spillestrategi kunne så blive bedre, hvis man ikke tillægger esserne nogen værdi, selv om jeg ikke tror det. For det første kunne jeg ikke tro at ændringen i spillestrategi ville blive bedre ved ikke at tillægge esserne nogen værdi, for det andet vil jeg mene at forringelsen i indsatsstrategien, ville mere end opveje nogen fordel på dette punkt.

- De bedste tællesystemer ændrer også spillestrategi alt efter hvad der er gået. Disse systemer skulle være forholdsvis svære at huske, og er kun beregnet til de virkelige hajer, eller folk med stor tålmogighed, og hukommelse!!! Det skal dog siges at disse strategier nok vil være noget bedre end de strategier, som kører med en fast spillestrategi.

- Reglerne i Amerika er anderledes end dem i Odense, så man kan ikke foretage en direkte sammenligning mellem mine strategier, og de velkendte strategier fra Amerika. Så vidt jeg ved er der ikke blevet lavet nogen optimal strategi for Blackjack i Casino Odense, selv om det er muligt at der er blevet lavet optimale strategier for casinoer med tilsvarende regler.

Denne sammenligning med andre strategier, er lidt løs, da jeg ikke har undersøgt precis hvordan de andre strategier virker (Det var heller ikke meningen med denne rapport). Ved første øjekast vil jeg mene at min strategi er bedre end alle dem, som jeg har set på vores nyhedssystem. Men, som sagt, kender jeg ikke alle detaljerne af deres systemer, så det er muligt at de har nogle gode punkter, som jeg har overset.

8.2 Afslutende bemærkning

Jeg synes at projektet er forløbet godt, og jeg mener at jeg har fundet en optimale strategi, som er nem at huske. Hvis projektet havde været mere end 0.3 semester, kunne jeg have undersøgt hvordan man skulle ændre sin spillestrategi, alt efter hvilke kort er gået. En sådan strategi ville dog være noget sværere at huske.

Jeg var rimelig overrasket over, at se at de amerikanske strategier ikke tildelte nogen værdi til esser, i deres tællesystemer. Jeg vil derfor mene at jeg har fundet en bedre strategi til Blackjacket i Casino Odense, end amerikanerne har til deres Casinoer!?!!

Jeg har i dette projekt udelukkende lagt vægt på at finde den optimale strategi, ved en fast spille strategi. Jeg har overhovedet ikke lagt nogen vægt på at læse bøger om emnet, og i det hele taget at sammenligne mine strategier med andres. En sådan undersøgelse og sammenligning var ikke meningen med projektet.

Til sidst vil jeg sige at projektet har været sjovt, og interessant at lave. Jeg kan kun opfordre alle til at prøve Blackjack, da det er et yderst underholende spil.

Anders Yeo

9 Bilag A

Se kapitel 5.4.3 for en nærmere beskrivelse af værdierne i tabellen.

$kort1$	$kort2$	$A^2(kort1, kort2)$	Eksperimentalt fundne værdier
2	3	-0.4711808	-0.4711808
2	4	-0.5411179	-0.5411179
2	5	-0.6254132	-0.6254132
2	6	-0.4851366	-0.4851367
2	7	-0.3639928	-0.3639928
2	8	-0.1921154	-0.1921154
2	9	-0.1031743	-0.1031743
2	10	0.2399807	0.2399807
2	11	0.1412606	0.1412606
3	4	-0.5757422	-0.5757422
3	5	-0.6600375	-0.6600375
3	6	-0.5197610	-0.5197609
3	7	-0.3986171	-0.3986171
3	8	-0.2267398	-0.2267397
3	9	-0.1377986	-0.1377985
3	10	0.2033588	0.2033588
3	11	0.1066363	0.1066363
4	5	-0.7299746	-0.7299746
4	6	-0.5896981	-0.5896980
4	7	-0.4685542	-0.4685542
4	8	-0.2966769	-0.2966768
4	9	-0.2077357	-0.2077357
4	10	0.1293869	0.1293869
4	11	0.0366992	0.0366992
5	6	-0.6739933	-0.6739933
5	7	-0.5528495	-0.5528495
5	8	-0.3809721	-0.3809722
5	9	-0.2920309	-0.2920310
5	10	0.0402284	0.0402284
5	11	-0.0475961	-0.0475961
6	7	-0.4125729	-0.4125729
6	8	-0.2406956	-0.2406956
6	9	-0.1517544	-0.1517544
6	10	0.1885978	0.1885978
6	11	0.0926805	0.0926804
7	8	-0.1195517	-0.1195517
7	9	-0.0306106	-0.0306106
7	10	0.3167308	0.3167308
7	11	0.2138243	0.2138243
8	9	0.1412668	0.1412668
8	10	0.4985241	0.4985241
8	11	0.3857017	0.3857016
9	10	0.5925965	0.5925965
9	11	0.4746428	0.4746428
10	11	0.8511334	0.8511334

Det at vi skal helt ud på det syvende betydende cifer, for at se en afvigelse mellem den beregnede hældning og den fundne hældning er et udtryk for hvor godt vi kan finde disse beregnede hældninger. Det viser også hvor godt vi har kunnet finde f_i'erne.

10 Bilag B

Strategi 1				
	Man har i gennemsnit per spil			Procent
intervallet	vundet	væddet	en forventet tilbagebetaling på	af gangene
$tallet \leq -54$	1.091659	1.132020	0.959639	0.2824
$-54 < tallet \leq -48$	1.083601	1.123822	0.959778	0.3078
$-48 < tallet \leq -42$	1.092754	1.122836	0.969919	0.5804
$-42 < tallet \leq -36$	1.088909	1.117410	0.971499	1.0380
$-36 < tallet \leq -30$	1.090072	1.115074	0.974998	1.7640
$-30 < tallet \leq -24$	1.090386	1.111557	0.978829	2.8468
$-24 < tallet \leq -18$	1.090262	1.108886	0.981375	4.3644
$-18 < tallet \leq -12$	1.090571	1.106537	0.984034	6.3707
$-12 < tallet \leq -6$	1.090596	1.103776	0.986820	8.8590
$-6 < tallet \leq 1$	1.091769	1.100965	0.990805	13.6256
$1 < tallet \leq 7$	1.092357	1.099142	0.993215	11.9867
$7 < tallet \leq 13$	1.091588	1.096732	0.994855	10.7187
$13 < tallet \leq 19$	1.092247	1.095062	0.997185	9.2285
$19 < tallet \leq 25$	1.091665	1.092682	0.998984	7.6458
$25 < tallet \leq 31$	1.091060	1.090474	1.000585	6.0983
$31 < tallet \leq 37$	1.091442	1.088036	1.003407	4.6644
$37 < tallet \leq 43$	1.092783	1.085734	1.007049	3.4058
$43 < tallet \leq 49$	1.093081	1.083996	1.009085	2.3708
$49 < tallet \leq 55$	1.091451	1.081749	1.009703	1.5711
$55 < tallet \leq 61$	1.092048	1.078891	1.013157	0.9962
$61 < tallet \leq 67$	1.093913	1.075814	1.018098	0.5925
$67 < tallet$	1.093356	1.072371	1.020985	0.6820

$tallet \leq 22$	1.091428	1.101524	0.989904	75.9921
$22 < tallet \leq 23$	1.093624	1.092762	1.000862	1.2528
$23 < tallet \leq 24$	1.090068	1.092179	0.997889	1.2095
$24 < tallet \leq 25$	1.089973	1.091502	0.998472	1.1646
$25 < tallet \leq 26$	1.090874	1.091281	0.999593	1.1234
$26 < tallet \leq 27$	1.092705	1.092270	1.000434	1.0818
$27 < tallet \leq 28$	1.092311	1.090562	1.001749	1.0377
$28 < tallet$	1.091902	1.085101	1.006801	17.1381

Der var desværre en fejl i mit program, så alle de positive intervaller blev forskubet med 1. Det var meningen at have et interval lige under 24, og et lige over 24. Vi ser også at intervallet fra -6 til 1, blev 1 for stor. Tabellen giver, på trods af denne lille fejl, et godt billede af ens forventede tilbagebetaling, nå tallet man skulle huske ligger i bestemte intervaller.

Strategi 2				
	Man har i gennemsnit per spil			Procent
intervallet	vundet	væddet	en forventet tilbagebetaling på	af gangene
$tallet \leq -54$	1.092472	1.130897	0.961575	0.3807
$-53 \leq tallet \leq -48$	1.086085	1.124438	0.961647	0.3817
$-47 \leq tallet \leq -42$	1.092171	1.120386	0.971785	0.6902
$-41 \leq tallet \leq -36$	1.088351	1.117876	0.970474	1.1960
$-35 \leq tallet \leq -30$	1.090972	1.114062	0.976910	1.9677
$-29 \leq tallet \leq -24$	1.090075	1.110924	0.979151	3.0815
$-23 \leq tallet \leq -18$	1.090864	1.108616	0.982248	4.6041
$-17 \leq tallet \leq -12$	1.090500	1.106092	0.984409	6.5734
$-11 \leq tallet \leq -6$	1.091007	1.103368	0.987639	9.0084
$-5 \leq tallet \leq 0$	1.091777	1.101077	0.990700	11.4366
$1 \leq tallet \leq 6$	1.092576	1.099147	0.993429	11.7259
$7 \leq tallet \leq 12$	1.091743	1.097176	0.994567	10.5944
$13 \leq tallet \leq 18$	1.092109	1.095000	0.997110	9.1814
$19 \leq tallet \leq 24$	1.091183	1.092976	0.998207	7.6848
$25 \leq tallet \leq 30$	1.091155	1.090767	1.000388	6.1918
$31 \leq tallet \leq 36$	1.091156	1.088295	1.002861	4.8023
$37 \leq tallet \leq 42$	1.091712	1.086174	1.005538	3.5739
$43 \leq tallet \leq 48$	1.094017	1.084197	1.009820	2.5369
$49 \leq tallet \leq 54$	1.089951	1.081724	1.008227	1.7236
$55 \leq tallet \leq 60$	1.093121	1.080235	1.012886	1.1202
$61 \leq tallet \leq 66$	1.094069	1.076280	1.017789	0.6907
$67 \leq tallet$	1.092198	1.072567	1.019630	0.8539

$tallet \leq 21$	1.091446	1.101692	0.989754	74.8528
$tallet = 22$	1.091514	1.093609	0.997905	1.2591
$tallet = 23$	1.092822	1.092616	1.000207	1.2187
$tallet = 24$	1.091140	1.092200	0.998940	1.1760
$tallet = 25$	1.093485	1.092249	1.001236	1.1339
$tallet = 26$	1.094501	1.092035	1.002465	1.0958
$tallet = 27$	1.089961	1.089922	1.000040	1.0507
$28 \leq tallet$	1.091552	1.085273	1.006279	18.2130

Der er også krøbet en lille fejl ind her, da det var meningen at man skulle have et interval fra 18 til 23, og et interval fra 24 til 29. Denne opdeling havde været bedre, da vi betragter 24, som et gunstigt tilfælde.

Bortset fra de allerede nævnte fejl, ser vi at intervallerne ikke er helt ens for strategi 1, og strategi 2. Dette skyldes at det tal man husker i strategi 1 er reelt, mens tallet i strategi 2 er et heltal.

11 Bilag C

$Strat1_{200}$					
Gevinsten Ligger i intervallet	Med følgende sandsynlighed Ved Måde 1	Ved Måde 2		Man har følgende chance	for at vinde over følgende beløb
mindre end -50000	0.000000%	0.000%		99%	-5971.21 kr
-50000 til -25000	0.000000%	0.000%		95%	-4245.09 kr
-25000 til -20000	0.000000%	0.000%		90%	-3325.01 kr
-20000 til -15000	0.000000%	0.000%		75%	-1783.93 kr
-15000 til -10000	0.008333%	0.005%		50%	-75.56 kr
-10000 til -5000	2.581667%	2.600%		25%	1632.80 kr
-5000 til -4000	3.423333%	3.477%		10%	3173.88 kr
-4000 til -3000	6.230000%	6.353%		5%	4093.97 kr
-3000 til -2000	9.838333%	9.954%		1%	5820.08 kr
-2000 til -1000	13.541667%	13.382%			
-1000 til 0	15.893333%	15.419%		↑	
0 til 1000	15.521667%	15.240%		Denne tabel	
1000 til 2000	12.895000%	12.917%		bruger	
2000 til 3000	9.201667%	9.399%		Måde 2	
3000 til 4000	5.521667%	5.859%			
4000 til 5000	2.975000%	3.129%			
5000 til 10000	2.358333%	2.264%			
10000 til 15000	0.010000%	0.004%			
15000 til 20000	0.000000%	0.000%			
20000 til 25000	0.000000%	0.000%			
25000 til 50000	0.000000%	0.000%			
større end 50000	0.000000%	0.000%			

$Strat1_{300}$					
Gevinsten Ligger i intervallet	Med følgende sandsynlighed Ved Måde 1	Ved Måde 2		Man har følgende chance	for at vinde over følgende beløb
mindre end -50000	0.000000%	0.000%		99%	-8381.08 kr
-50000 til -25000	0.000000%	0.000%		95%	-5932.34 kr
-25000 til -20000	0.000000%	0.000%		90%	-4627.07 kr
-20000 til -15000	0.005000%	0.002%		75%	-2440.82 kr
-15000 til -10000	0.336667%	0.274%		50%	-17.26 kr
-10000 til -5000	7.818333%	8.024%		25%	2406.31 kr
-5000 til -4000	4.816667%	5.109%		10%	4592.55 kr
-4000 til -3000	6.880000%	6.943%		5%	5897.83 kr
-3000 til -2000	8.800000%	8.720%		1%	8346.56 kr
-2000 til -1000	10.335000%	10.162%			
-1000 til 0	11.493333%	10.957%			
0 til 1000	11.220000%	10.943%			
1000 til 2000	10.343333%	10.120%			
2000 til 3000	8.558333%	8.666%			
3000 til 4000	6.691667%	6.874%			
4000 til 5000	4.916667%	5.053%			
5000 til 10000	7.420000%	7.884%			
10000 til 15000	0.358333%	0.266%			
15000 til 20000	0.006667%	0.002%			
20000 til 25000	0.000000%	0.000%			
25000 til 50000	0.000000%	0.000%			
større end 50000	0.000000%	0.000%			

$Strat1_{500}$				
Gevinsten Ligger i intervallet	Med følgende sandsynlighed Ved Måde 1	Ved Måde 2	Man har følgende chance	for at vinde over følgende beløb
mindre end -50000	0.000000%	0.000%	99%	-13412.75 kr
-50000 til -25000	0.005000%	0.001%	95%	-9456.71 kr
-25000 til -20000	0.066667%	0.028%	90%	-7347.99 kr
-20000 til -15000	0.493333%	0.438%	75%	-3816.02 kr
-15000 til -10000	3.501667%	3.646%	50%	99.35 kr
-10000 til -5000	14.318333%	14.900%	25%	4014.72 kr
-5000 til -4000	4.943333%	5.012%	10%	7546.69 kr
-4000 til -3000	5.741667%	5.665%	5%	9655.42 kr
-3000 til -2000	6.463333%	6.204%	1%	13611.45 kr
-2000 til -1000	6.836667%	6.603%		
-1000 til 0	7.263333%	6.821%		
0 til 1000	6.996667%	6.842%		
1000 til 2000	6.878333%	6.660%		
2000 til 3000	6.536667%	6.306%		
3000 til 4000	5.616667%	5.772%		
4000 til 5000	5.190000%	5.150%		
5000 til 10000	14.733333%	15.530%		
10000 til 15000	3.765000%	3.904%		
15000 til 20000	0.591667%	0.484%		
20000 til 25000	0.051667%	0.032%		
25000 til 50000	0.006667%	0.001%		
større end 50000	0.000000%	0.000%		

$Strat2_{200}$				
Gevinsten Ligger i intervallet	Med følgende sandsynlighed Ved Måde 1	Ved Måde 2	Man har følgende chance	for at vinde over følgende beløb
mindre end -50000	0.000000%	0.000%	99%	-6087.47 kr
-50000 til -25000	0.000000%	0.000%	95%	-4327.18 kr
-25000 til -20000	0.000000%	0.000%	90%	-3388.87 kr
-20000 til -15000	0.000000%	0.000%	75%	-1817.27 kr
-15000 til -10000	0.010000%	0.007%	50%	-75.07 kr
-10000 til -5000	2.905000%	2.831%	25%	1667.13 kr
-5000 til -4000	3.415000%	3.614%	10%	3238.73 kr
-4000 til -3000	6.333333%	6.449%	5%	4177.03 kr
-3000 til -2000	9.891667%	9.923%	1%	5937.33 kr
-2000 til -1000	13.370000%	13.203%		
-1000 til 0	15.508333%	15.132%		
0 til 1000	15.293333%	14.964%		
1000 til 2000	12.821667%	12.767%		
2000 til 3000	9.185000%	9.394%		
3000 til 4000	5.495000%	5.965%		
4000 til 5000	3.176667%	3.267%		
5000 til 10000	2.586667%	2.480%		
10000 til 15000	0.008333%	0.005%		
15000 til 20000	0.000000%	0.000%		
20000 til 25000	0.000000%	0.000%		
25000 til 50000	0.000000%	0.000%		
større end 50000	0.000000%	0.000%		

$Strat2_{300}$		
Gevinsten Ligger i intervallet	Med følgende sandsynlighed Ved Måde 1	Ved Måde 2
mindre end -50000	0.000000%	0.000%
-50000 til -25000	0.000000%	0.000%
-25000 til -20000	0.000000%	0.000%
-20000 til -15000	0.006667%	0.002%
-15000 til -10000	0.413333%	0.331%
-10000 til -5000	8.040000%	8.442%
-5000 til -4000	5.148333%	5.176%
-4000 til -3000	6.835000%	6.923%
-3000 til -2000	8.575000%	8.618%
-2000 til -1000	10.290000%	9.970%
-1000 til 0	11.096667%	10.717%
0 til 1000	11.120000%	10.704%
1000 til 2000	10.130000%	9.936%
2000 til 3000	8.555000%	8.562%
3000 til 4000	6.646667%	6.869%
4000 til 5000	4.706667%	5.113%
5000 til 10000	8.006667%	8.313%
10000 til 15000	0.421667%	0.322%
15000 til 20000	0.008333%	0.002%
20000 til 25000	0.000000%	0.000%
25000 til 50000	0.000000%	0.000%
større end 50000	0.000000%	0.000%

Man har følgende chance	for at vinde over følgende beløb
99%	-8572.00 kr
95%	-6067.13 kr
90%	-4731.93 kr
75%	-2495.57 kr
50%	-16.44 kr
25%	2462.69 kr
10%	4699.05 kr
5%	6034.25 kr
1%	8539.12 kr

$Strat2_{500}$		
Gevinsten Ligger i intervallet	Med følgende sandsynlighed Ved Måde 1	Ved Måde 2
mindre end -50000	0.000000%	0.000%
-50000 til -25000	0.006667%	0.001%
-25000 til -20000	0.063333%	0.038%
-20000 til -15000	0.606667%	0.522%
-15000 til -10000	3.738333%	3.932%
-10000 til -5000	14.686667%	15.092%
-5000 til -4000	4.803333%	4.968%
-4000 til -3000	5.500000%	5.575%
-3000 til -2000	6.410000%	6.081%
-2000 til -1000	6.665000%	6.457%
-1000 til 0	7.031667%	6.658%
0 til 1000	7.056667%	6.678%
1000 til 2000	6.640000%	6.508%
2000 til 3000	6.255000%	6.175%
3000 til 4000	5.858333%	5.692%
4000 til 5000	5.086667%	5.085%
5000 til 10000	14.796667%	15.714%
10000 til 15000	3.995000%	4.208%
15000 til 20000	0.725000%	0.572%
20000 til 25000	0.066667%	0.043%
25000 til 50000	0.008333%	0.002%
større end 50000	0.000000%	0.000%

Man har følgende chance	for at vinde over følgende beløb
99%	-13746.68 kr
95%	-9692.44 kr
90%	-7531.38 kr
75%	-3911.74 kr
50%	100.82 kr
25%	4113.38 kr
10%	7733.02 kr
5%	9894.09 kr
1%	13948.32

12 Bilag D, Den optimale strategi

I den følgende tabel ser vi den optimale spillestrategi. Feltet *uden es=11* siger hvor meget vi skal have før vi skal stå, hvis vi ikke har et es som bliver talt som 11. Ligeledes betegner feltet *med es=11* hvad vi skal have for at stå, hvis vi har et es som bliver talt som 11. Det er klart at har vi mere end det vi skal stå på ifølge tabellen, så skal vi også stå.

Bankens	Stå på		Split med										Double		
kort	uden	med											Down		
	es=11	es=11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	11	10	9
2	13	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	-	ja	ja	ja	ja	-
3	13	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	-	ja	ja	ja	ja	ja
4	12	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	-	ja	ja	ja	ja	ja
5	12	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	ja	ja	ja	ja	ja	ja
6	12	18	ja	-	ja	ja	ja	ja	-	ja	ja	ja	ja	ja	ja
7	17	18	ja	-	-	ja	ja	-	-	-	ja	ja	ja	ja	-
8	17	18	ja	-	ja	ja	-	-	-	-	-	-	ja	ja	-
9	17	19	ja	-	ja	ja	-	-	-	-	-	-	ja	ja	-
10	17	19	ja	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	17	19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Jeg vil nu beskrive den optimale indsatsstrategi. Vi tildeler en værdi, kaldet $Num(kort)$, til hvert kort med værdien $kort$. Disse værdier er vist herunder.

$kort$	$Num(kort)$
2	2
3	3
4	4
5	4
6	3
7	2
8	0
9	-1
10	-3
11	-4

For hvert kort der går, med værdien $kort$, lægger vi $Num(kort)$ til en sum, som vi initierer til nul, hver gang bunken blandes. Hvis denne sum er større end eller lig med 24, skal man sætte en stor indsats, hvis den er mindre end 24, skal man sætte en lille.

Hvis denne lille indsats er 50 kroner, og den store indsats er større end eller lig med 330 kroner, så skulle man få overskud i længden.

13 Bilag E

Før vi beregner $sp(kort, fra, til, valg)$ (se kapitel 3.3.6), definerer vi følgende tabel.

$\varepsilon(kort)$ defineres på følgende måde.

$$\varepsilon(kort) = 2win1\_split(kort) - win2\_split(2kort, false) - 1$$

Hvor både $win1\_split(kort)$ og $win2\_split(2kort, false)$ blev defineret i kapitel 3.2.5.

Vi kan nu opstille følgende tabel, hvor vi antager at vi splitter ved enhver lejlighed, og at $kort$ er mindre end 11. Når $kort = 11$, har vi et specielt tilfælde, som jeg ikke vil komme nærmere ind på her.

$$\begin{aligned}
sp(kort,3,3,split) &= win1_split(kort) + P(kort)\varepsilon(kort) \\
sp(kort,2,3,split) &= 2 * win1_split(kort) - 1 + P(kort)\varepsilon(kort)(2 - P(kort)) \\
sp(kort,1,3,split) &= 3 * win1_split(kort) - 2 + P(kort)\varepsilon(kort)(P(kort)^2 - 3P(kort) + 3) \\
sp(kort,2,2,split) &= win1_split(kort) + P(kort)\varepsilon(kort)(-P(kort)^2 + 2P(kort) + 1) \\
sp(kort,1,2,split) &= 2 * win1_split(kort) - 1 \\
&\quad +P(kort)\varepsilon(kort)(2P(kort)^3 - 6P(kort)^2 + 4P(kort) + 2) \\
sp(kort,1,1,split) &= win1(kort) \\
&\quad +P(kort)\varepsilon(kort)(2P(kort)^4 - 6P(kort)^3 + 4P(kort)^2 + 2P(kort) + 1)
\end{aligned}$$

Udregningen af $sp(kort, 1, 1, split)$ passer kun fordi $win2(2*kort, false) = win2\_split(2*kort, false)$ når $kort$ er mindre end 11. Vi kan ligeledes opstille en tabel, hvor vi antager at vi ikke splitter på noget tidspunkt fremover. Denne tabel ser ud som følger.

$$\begin{aligned}
sp(kort,3,3,no_split) &= win1_split(kort) \\
sp(kort,2,3,no_split) &= 2 * win1_split(kort) - 1 \\
sp(kort,1,3,no_split) &= 3 * win1_split(kort) - 2 \\
sp(kort,2,2,no_split) &= win1_split(kort) \\
sp(kort,1,2,no_split) &= 2 * win1_split(kort) - 1 \\
sp(kort,1,1,no_split) &= win1(kort)
\end{aligned}$$

Vi ser nu at man skal splitte ved enhver lejlighed, hvis $\varepsilon(kort)$ er større end nul. Dette er sandt, da nedenstående ligninger er opfyldt, og disse ligninger viser at uanset hvad fra og til er, kan det bedre betale sig at splitte hele tiden, end aldrig at splitte mere.

$$\begin{aligned}
1 &\geq 0 && \text{når } 0 \leq P(kort) \leq 1 \\
2 - P(kort) &\geq 0 && \text{når } 0 \leq P(kort) \leq 1 \\
P(kort)^2 - 3P(kort) + 3 &\geq 0 && \text{når } 0 \leq P(kort) \leq 1 \\
-P(kort)^2 + 2P(kort) + 1 &\geq 0 && \text{når } 0 \leq P(kort) \leq 1 \\
2P(kort)^3 - 6P(kort)^2 + 4P(kort) + 2 &\geq 0 && \text{når } 0 \leq P(kort) \leq 1 \\
2P(kort)^4 - 6P(kort)^3 + 4P(kort)^2 + 2P(kort) + 1 &\geq 0 && \text{når } 0 \leq P(kort) \leq 1
\end{aligned}$$

Man kan se at man ikke skal splitte på noget tidspunkt, hvis $\varepsilon(kort) < 0$, ud fra følgende betragtning.

- Hvis man, for et givet fra og til, antager at følgende to ligninger er opfyldt.

$$\begin{aligned}
max_sp(kort, fra, til + 1) &= sp(kort, fra, til + 1, no_split) \\
max_sp(kort, fra + 1, til) &= sp(kort, fra + 1, til, no_split)
\end{aligned}$$

Så får vi følgende formel.

Hvis $(fra, til) = (1, 1)$:

$$sp(kort, 1, 1, split) = win1(kort) + p(kort)\varepsilon(kort)$$

Hvis $(fra, til) \neq (1, 1)$:

$$sp(kort, fra, til, split) = (til - fra + 1)win1\_split(kort) - (til - fra) + p(kort)\varepsilon(kort)$$

Vi kan nu se at vi ikke skal splitte hvis $\varepsilon(kort) < 0$, da vi ikke skal gøre det når $(fra, til) = (3, 3)$, som medføre at vi ikke skal gøre det når $(fra, til) = (2, 3)$, etc. Vi kan blive ved på denne måde indtil vi har, at vi ikke skal splitte når $(fra, til) = (1, 1)$.

Vi har nu fundet en ikke-rekursiv formel til at beregne $split(kort)$ med. Den bruger $\varepsilon(kort)$, til at bestemme om $split(kort)$ er lig $sp(kort, 1, 1, split)$ eller $sp(kort, 1, 1, no\_split)$. Man kan også bare bruge følgende formel, som er nemmere at huske.

$$split(kort) = max\,(sp(kort, 1, 1, split), sp(kort, 1, 1, no\_split))$$

14 Bilag F

Bankørens første kort er 2

	Med et es som tæller 11		Skal	Uden et es som tæller 11		Skal
sum	Stå	gå	man	Stå	gå	man
B_jack				2.50000	1.23835	stå
21	1.88201	0.00000	stå	1.88201	1.23835	stå
20	1.63999	0.14477	stå	1.63999	1.18250	stå
19	1.38630	0.27092	stå	1.38630	1.12396	stå
18	1.12174	0.37756	stå	1.12174	1.06291	stå
17	0.84703	0.46385	stå	0.84703	0.99951	gå
16	0.70722	0.52901	stå	0.70722	0.97897	gå
15	0.70722	0.58341	stå	0.70722	0.99988	gå
14	0.70722	0.63781	stå	0.70722	1.02239	gå
13	0.70722	0.69221	stå	0.70722	1.04664	gå
12	0.70722	0.74661	gå	0.70722	1.08184	gå
11	0.70722	1.23835	gå	0.70722	1.36964	gå
10	0.70722	1.18250	gå			
9	0.70722	1.07445	gå			
8	0.70722	0.97820	gå			
7	0.70722	0.89082	gå			
6	0.70722	0.85924	gå			
5	0.70722	0.87178	gå			
4	0.70722	0.88509	gå			
3	0.70722	0.89948	gå			
2	0.70722	0.92412	gå			

kort	Hvis man splitter	Hvis man ikke splitter	skal man splitte
11	1.58970	1.55979	ja
10	1.14543	1.23004	nej
9	1.09800	1.09231	ja
8	1.03785	1.00964	ja
7	0.93467	0.92226	ja
6	0.89382	0.89068	ja
5	0.86073	0.90323	nej
4	0.90536	0.91653	nej
3	0.93115	0.93092	ja
2	0.95791	0.95556	ja

kort	Hvis man double down	Hvis man ikke double down	skal man double down
11	1.47064	1.23835	ja
10	1.35894	1.18250	ja
9	1.06112	1.07445	nej

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 3

	Med et es som tæller 11		Skal	Uden et es som tæller 11		Skal
sum	Stå	gå	man	Stå	gå	man
B_jack				2.50000	1.26033	stå
21	1.88530	0.00000	stå	1.88530	1.26033	stå
20	1.65027	0.14502	stå	1.65027	1.20609	stå
19	1.40436	0.27197	stå	1.40436	1.14934	stå
18	1.14830	0.38000	stå	1.14830	1.09025	stå
17	0.88278	0.46833	stå	0.88278	1.02898	gå
16	0.74775	0.53623	stå	0.74775	1.00906	gå
15	0.74775	0.59375	stå	0.74775	1.02916	gå
14	0.74775	0.65127	stå	0.74775	1.05081	gå
13	0.74775	0.70879	stå	0.74775	1.07412	gå
12	0.74775	0.76631	gå	0.74775	1.10351	gå
11	0.74775	1.26033	gå	0.74775	1.38767	gå
10	0.74775	1.20609	gå			
9	0.74775	1.10126	gå			
8	0.74775	1.00801	gå			
7	0.74775	0.92342	gå			
6	0.74775	0.89271	gå			
5	0.74775	0.90469	gå			
4	0.74775	0.91739	gå			
3	0.74775	0.93112	gå			
2	0.74775	0.95025	gå			

kort	Hvis man splitter	Hvis man ikke splitter	skal man splitte
11	1.60868	1.57681	ja
10	1.18011	1.25337	nej
9	1.12955	1.12107	ja
8	1.07409	1.04344	ja
7	0.97599	0.96036	ja
6	0.93806	0.92965	ja
5	0.90117	0.94163	nej
4	0.94669	0.95433	nej
3	0.97199	0.96807	ja
2	0.99234	0.98719	ja

kort	Hvis man double down	Hvis man ikke double down	skal man double down
11	1.51780	1.26033	ja
10	1.40932	1.20609	ja
9	1.12082	1.10126	ja

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 4

sum	Med et es som tæller 11 Stå	gå	Skal man	Uden et es som tæller 11 Stå	gå	Skal man
B_jack				2.50000	1.28302	stå
21	1.88877	0.00000	stå	1.88877	1.28302	stå
20	1.66105	0.14529	stå	1.66105	1.23047	stå
19	1.42318	0.27306	stå	1.42318	1.17558	stå
18	1.17585	0.38254	stå	1.17585	1.11850	stå
17	0.91943	0.47299	stå	0.91943	1.05933	gå
16	0.78894	0.54371	stå	0.78894	1.03997	gå
15	0.78894	0.60440	stå	0.78894	1.05929	gå
14	0.78894	0.66509	stå	0.78894	1.08008	gå
13	0.78894	0.72578	stå	0.78894	1.10248	gå
12	0.78894	0.78646	stå	0.78894	1.12660	gå
11	0.78894	1.28302	gå	0.78894	1.40638	gå
10	0.78894	1.23047	gå			
9	0.78894	1.12898	gå			
8	0.78894	1.03878	gå			
7	0.78894	0.95698	gå			
6	0.78894	0.92708	gå			
5	0.78894	0.93852	gå			
4	0.78894	0.95063	gå			
3	0.78894	0.96374	gå			
2	0.78894	0.97790	gå			

kort	Hvis man splitter	ikke splitter	skal man splitte
11	1.62825	1.59445	ja
10	1.21592	1.27749	nej
9	1.16211	1.15075	ja
8	1.11151	1.07828	ja
7	1.01973	1.00055	ja
6	0.98443	0.97066	ja
5	0.94388	0.98209	nej
4	0.99033	0.99421	nej
3	1.01522	1.00731	ja
2	1.02982	1.02147	ja

kort	Hvis man double down	ikke double down	skal man double down
11	1.56604	1.28302	ja
10	1.46094	1.23047	ja
9	1.18195	1.12898	ja

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 5

sum	Med et es som tæller 11 Stå	gå	Skal man	Uden et es som tæller 11 Stå	gå	Skal man
B_jack				2.50000	1.30735	stå
21	1.89175	0.00000	stå	1.89175	1.30735	stå
20	1.67036	0.14552	stå	1.67036	1.25626	stå
19	1.43951	0.27401	stå	1.43951	1.20299	stå
18	1.19956	0.38474	stå	1.19956	1.14761	stå
17	0.95506	0.47701	stå	0.95506	1.09119	gå
16	0.83281	0.55048	stå	0.83281	1.07345	gå
15	0.83281	0.61454	stå	0.83281	1.09196	gå
14	0.83281	0.67860	stå	0.83281	1.11189	gå
13	0.83281	0.74267	stå	0.83281	1.13336	gå
12	0.83281	0.80673	stå	0.83281	1.15648	gå
11	0.83281	1.30735	gå	0.83281	1.42575	gå
10	0.83281	1.25626	gå			
9	0.83281	1.15803	gå			
8	0.83281	1.07080	gå			
7	0.83281	0.99273	gå			
6	0.83281	0.96508	gå			
5	0.83281	0.97602	gå			
4	0.83281	0.98762	gå			
3	0.83281	1.00017	gå			
2	0.83281	1.01373	gå			

kort	Hvis man splitter	ikke splitter	skal man splitte
11	1.64815	1.61291	ja
10	1.25448	1.30305	nej
9	1.19648	1.18167	ja
8	1.14990	1.11416	ja
7	1.06544	1.04262	ja
6	1.03280	1.01498	ja
5	0.99048	1.02592	nej
4	1.03790	1.03751	ja
3	1.06227	1.05006	ja
2	1.07624	1.06362	ja

kort	Hvis man double down	ikke double down	skal man double down
11	1.61470	1.30735	ja
10	1.51252	1.25626	ja
9	1.24306	1.15803	ja

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 6

	Med et es som tæller 11			Uden et es som tæller 11		
sum	Stå	gå	Skal man	Stå	gå	Skal man
B_jack				2.50000	1.33369	stå
21	1.90284	0.00000	stå	1.90284	1.33369	stå
20	1.70396	0.14637	stå	1.70396	1.28780	stå
19	1.49598	0.27745	stå	1.49598	1.23980	stå
18	1.28344	0.39252	stå	1.28344	1.19075	stå
17	1.01174	0.49125	stå	1.01174	1.12805	gå
16	0.84630	0.56907	stå	0.84630	1.09882	gå
15	0.84630	0.63417	stå	0.84630	1.11825	gå
14	0.84630	0.69927	stå	0.84630	1.13916	gå
13	0.84630	0.76437	stå	0.84630	1.16169	gå
12	0.84630	0.82947	stå	0.84630	1.18595	gå
11	0.84630	1.33369	gå	0.84630	1.45590	gå
10	0.84630	1.28780	gå			
9	0.84630	1.19602	gå			
8	0.84630	1.11496	gå			
7	0.84630	1.02919	gå			
6	0.84630	0.98699	gå			
5	0.84630	0.99881	gå			
4	0.84630	1.01113	gå			
3	0.84630	1.02447	gå			
2	0.84630	1.03888	gå			

kort	Hvis man splitter	Hvis man ikke splitter	skal man splitte
11	1.67667	1.63964	ja
10	1.29423	1.33373	nej
9	1.23614	1.22169	ja
8	1.20608	1.16277	ja
7	1.11579	1.08630	ja
6	1.06597	1.04411	ja
5	1.02026	1.05593	nej
4	1.07019	1.06825	ja
3	1.09751	1.08159	ja
2	1.11235	1.09600	ja

kort	Hvis man double down	Hvis man ikke double down	skal man double down
11	1.66738	1.33369	ja
10	1.57559	1.28780	ja
9	1.31705	1.19602	ja

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 7

	Med et es som tæller 11			Uden et es som tæller 11		
sum	Stå	gå	Skal man	Stå	gå	Skal man
B_jack				2.50000	1.29215	stå
21	1.92593	0.00000	stå	1.92593	1.29215	stå
20	1.77323	0.14815	stå	1.77323	1.25691	stå
19	1.61598	0.28455	stå	1.61598	1.22062	stå
18	1.39955	0.40886	stå	1.39955	1.17068	stå
17	0.89319	0.51651	stå	0.89319	1.05382	gå
16	0.52462	0.58522	gå	0.52462	0.99511	gå
15	0.52462	0.63024	gå	0.52462	1.03703	gå
14	0.52462	0.67872	gå	0.52462	1.07951	gå
13	0.52462	0.73093	gå	0.52462	1.12239	gå
12	0.52462	0.78715	gå	0.52462	1.16547	gå
11	0.52462	1.29215	gå	0.52462	1.45737	gå
10	0.52462	1.25691	gå			
9	0.52462	1.17187	gå			
8	0.52462	1.08221	gå			
7	0.52462	0.93119	gå			
6	0.52462	0.84807	gå			
5	0.52462	0.88055	gå			
4	0.52462	0.91172	gå			
3	0.52462	0.94256	gå			
2	0.52462	0.97274	gå			

kort	Hvis man splitter	Hvis man ikke splitter	skal man splitte
11	1.65688	1.63401	ja
10	1.22125	1.30107	nej
9	1.18273	1.18500	nej
8	1.16237	1.10576	ja
7	0.97561	0.95475	ja
6	0.86825	0.87162	nej
5	0.85917	0.90411	nej
4	0.91900	0.93528	nej
3	0.97373	0.96612	ja
2	1.00361	0.99630	ja

kort	Hvis man double down	Hvis man ikke double down	skal man double down
11	1.46289	1.29215	ja
10	1.39241	1.25691	ja
9	1.10425	1.17187	nej

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 8

	Med et es som tæller 11		Skal	Uden et es som tæller 11		Skal
sum	Stå	gå	man	Stå	gå	man
B_jack				2.50000	1.22998	stå
21	1.93061	0.00000	stå	1.93061	1.22998	stå
20	1.79182	0.14851	stå	1.79182	1.19795	stå
19	1.59385	0.28634	stå	1.59385	1.15227	stå
18	1.10595	0.40894	stå	1.10595	1.03968	stå
17	0.61805	0.49402	stå	0.61805	0.92708	gå
16	0.48948	0.54156	gå	0.48948	0.93321	gå
15	0.48948	0.58322	gå	0.48948	0.97295	gå
14	0.48948	0.62808	gå	0.48948	1.01328	gå
13	0.48948	0.67639	gå	0.48948	1.05406	gå
12	0.48948	0.72843	gå	0.48948	1.09512	gå
11	0.48948	1.22998	gå	0.48948	1.40075	gå
10	0.48948	1.19795	gå			
9	0.48948	1.09838	gå			
8	0.48948	0.94010	gå			
7	0.48948	0.78940	gå			
6	0.48948	0.78276	gå			
5	0.48948	0.81191	gå			
4	0.48948	0.84067	gå			
3	0.48948	0.86906	gå			
2	0.48948	0.89684	gå			

	Hvis man		skal
		ikke	man
kort	splitter	splitter	splitte
11	1.59561	1.57595	ja
10	1.11994	1.24175	nej
9	1.11755	1.10766	ja
8	0.98972	0.95621	ja
7	0.80419	0.80550	nej
6	0.78881	0.79887	nej
5	0.77951	0.82801	nej
4	0.83935	0.85677	nej
3	0.88421	0.88517	nej
2	0.91181	0.91295	nej

	Hvis man		skal
		ikke	man
	double	double	double
kort	down	down	down
11	1.35069	1.22998	ja
10	1.28664	1.19795	ja
9	0.97356	1.09838	nej

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 9

	Med et es som tæller 11		Skal	Uden et es som tæller 11		Skal
sum	Stå	gå	man	Stå	gå	man
B_jack				2.50000	1.15826	stå
21	1.93918	0.00000	stå	1.93918	1.15826	stå
20	1.75836	0.14917	stå	1.75836	1.11653	stå
19	1.28760	0.28443	stå	1.28760	1.00789	stå
18	0.81684	0.38347	stå	0.81684	0.89926	gå
17	0.57685	0.44631	stå	0.57685	0.85021	gå
16	0.45685	0.49068	gå	0.45685	0.85136	gå
15	0.45685	0.52842	gå	0.45685	0.88781	gå
14	0.45685	0.56907	gå	0.45685	0.92484	gå
13	0.45685	0.61284	gå	0.45685	0.96231	gå
12	0.45685	0.65999	gå	0.45685	1.00007	gå
11	0.45685	1.15826	gå	0.45685	1.32142	gå
10	0.45685	1.11653	gå			
9	0.45685	0.94782	gå			
8	0.45685	0.78981	gå			
7	0.45685	0.71463	gå			
6	0.45685	0.70736	gå			
5	0.45685	0.73338	gå			
4	0.45685	0.75933	gå			
3	0.45685	0.78492	gå			
2	0.45685	0.80995	gå			

	Hvis man		skal
		ikke	man
kort	splitter	splitter	splitte
11	1.51150	1.49398	ja
10	0.99804	1.15967	nej
9	0.96126	0.95317	ja
8	0.80669	0.79730	ja
7	0.71252	0.72212	nej
6	0.69713	0.71485	nej
5	0.68990	0.74087	nej
4	0.74711	0.76682	nej
3	0.78298	0.79241	nej
2	0.80787	0.81744	nej

	Hvis man		skal
		ikke	man
	double	double	double
kort	down	down	down
11	1.22778	1.15826	ja
10	1.14433	1.11653	ja
9	0.69900	0.94782	nej

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.500

Bankørens første kort er 10

sum	Med et es som tæller 11 Stå	Med et es som tæller 11 gå	Skal man	Uden et es som tæller 11 Stå	Uden et es som tæller 11 gå	Skal man
B_jack				2.38462	1.03337	stå
21	1.81165	0.00000	stå	1.81165	1.03337	stå
20	1.43496	0.13936	stå	1.43496	0.94644	stå
19	0.98134	0.24974	stå	0.98134	0.84176	stå
18	0.75849	0.32523	stå	0.75849	0.79033	gå
17	0.53564	0.38357	stå	0.53564	0.74135	gå
16	0.42422	0.42478	gå	0.42422	0.73159	gå
15	0.42422	0.45745	gå	0.42422	0.76273	gå
14	0.42422	0.49264	gå	0.42422	0.79434	gå
13	0.42422	0.53053	gå	0.42422	0.82629	gå
12	0.42422	0.57134	gå	0.42422	0.85846	gå
11	0.42422	1.03337	gå	0.42422	1.16677	gå
10	0.42422	0.94644	gå			
9	0.42422	0.78189	gå			
8	0.42422	0.69288	gå			
7	0.42422	0.62856	gå			
6	0.42422	0.61131	gå			
5	0.42422	0.63377	gå			
4	0.42422	0.65613	gå			
3	0.42422	0.67816	gå			
2	0.42422	0.69969	gå			

kort	Hvis man splitter	Hvis man ikke splitter	skal man splitte
11	1.35488	1.34307	ja
10	0.82372	0.99051	nej
9	0.76691	0.78189	nej
8	0.68988	0.69288	nej
7	0.61045	0.62856	nej
6	0.58448	0.61131	nej
5	0.58155	0.63377	nej
4	0.62685	0.65613	nej
3	0.65854	0.67816	nej
2	0.67995	0.69969	nej

kort	Hvis man double down	Hvis man ikke double down	skal man double down
11	1.01202	1.03337	nej
10	0.83816	0.94644	nej
9	0.41535	0.78189	nej

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.385

Bankørens første kort er 11

sum	Med et es som tæller 11 Stå	Med et es som tæller 11 gå	Skal man	Uden et es som tæller 11 Stå	Uden et es som tæller 11 gå	Skal man
B_jack				2.03846	0.79131	stå
21	1.33075	0.00000	stå	1.33075	0.79131	stå
20	1.14609	0.10237	stå	1.14609	0.74870	stå
19	0.88452	0.19053	stå	0.88452	0.68833	stå
18	0.62294	0.25857	stå	0.62294	0.62797	gå
17	0.36136	0.30648	stå	0.36136	0.56799	gå
16	0.23057	0.33428	gå	0.23057	0.57764	gå
15	0.23057	0.36000	gå	0.23057	0.60229	gå
14	0.23057	0.38769	gå	0.23057	0.62732	gå
13	0.23057	0.41751	gå	0.23057	0.65263	gå
12	0.23057	0.44963	gå	0.23057	0.67813	gå
11	0.23057	0.79131	gå	0.23057	0.89904	gå
10	0.23057	0.74870	gå			
9	0.23057	0.64684	gå			
8	0.23057	0.55590	gå			
7	0.23057	0.47764	gå			
6	0.23057	0.48174	gå			
5	0.23057	0.49945	gå			
4	0.23057	0.51710	gå			
3	0.23057	0.53450	gå			
2	0.23057	0.55152	gå			

kort	Hvis man splitter	Hvis man ikke splitter	skal man splitte
11	1.10003	1.11680	nej
10	0.60353	0.80314	nej
9	0.62151	0.64684	nej
8	0.53879	0.55590	nej
7	0.44438	0.47764	nej
6	0.44435	0.48174	nej
5	0.44177	0.49945	nej
4	0.47697	0.51710	nej
3	0.50276	0.53450	nej
2	0.51967	0.55152	nej

kort	Hvis man double down	Hvis man ikke double down	skal man double down
11	0.46012	0.79131	nej
10	0.37489	0.74870	nej
9	0.08491	0.64684	nej

Man skal ikke forsikre med Blackjack, da man så vil have en forventet tilbagebetaling på 2.000 istedet for 2.038