Gödels ufuldstændighedssætning

Christian Ravnshøj
Christian Ivar Westergaard

Indhold

1 Indledning

Det er målet med dette projekt at give en let indgang til Gödels ufuldstændighedssætning. Af pladshensyn kræves dog en vis forhåndsviden for at kunne læse opgaven. Vi tager det derfor for givet, at læseren har et kendskab til logik svarende til kapitel 1 og 2 i Mendelson, se litteraturlisten.

Pga nødvendigheden for uvant notation har vi valgt at benytte Mendelson i udpræget grad. Beviserne i projektet er således alle at finde i kort udgave i Mendelson, hvor de her er uddybet. Af denne grund anser vi det for unødvendigt at henvise yderligere for hvert bevis.

Vi indfører for 'Gödels ufuldsstændighedssætning' forkortelsen GUF.

Definition 1.1. *For en mere let notation indføres for n- tuppel følgende:*

$$\underline{\alpha}_n = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

Subskriptet n angiver længden af tuplen.

2 Introduktion til GUF

2.1 Definitioner

For at kunne forstå, hvad GUF udtaler sig om, er en række definitioner nødvendige at kende. Derfor:
Lad K være en given teori.

- Gödeltal: En måde at tilegne alle symboler u i K et naturligt tal $g(u)$. En mere præcis definition gives i kapitel om rekursivitet.
- Egenskaben "y er Gödeltal til et ikke- logisk aksiom i K" skrives PrAx(y).
- $\ulcorner \mathscr{C} \urcorner$: Gödeltallet til en wf $\mathscr{C}$.
- K siges at være *konsistent*, hvis der ikke gælder både $\vdash_K \neg\mathscr{B}$, og $\vdash_K \mathscr{B}$, for en vilkårlig wf $\mathscr{B}$.
- K siges at være ω- *konsistent*, hvis der for enhver wf $\mathscr{B}$ med x som eneste frie variabel gælder, at hvis $\vdash_K \neg\mathscr{B}(\bar{n})$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så gælder der ikke- $\vdash_K (\exists x)\mathscr{B}(x)$.

  ω- konsistens indebærer altså, at det er nok at vide, at $\vdash_K \neg\mathscr{B}(x)$ for efterfølgerne til a_1, for at vide, at der ikke findes nogen konstant x,
  så $\vdash_K \mathscr{B}(x)$. [1]
- Termen t siges at være *fri for x_i i en wf $\mathscr{B}$*, hvis ingen frie forekomster af x_i i $\mathscr{B}$ ligger i skopet af nogen kvantor $(\forall x_j)$, hvor x_j er en variabel i t. Specielt ses enhver variabel i $\mathscr{B}$ at være fri for sig selv heri.
- K kaldes for en teori med lighedstegn, hvis følgende er opfyldt:

$(\forall x_1)x_1 = x_1$	(Refleksiv)
$x = y \Rightarrow (\mathscr{B}(x,x) \Rightarrow \mathscr{B}(x,y))$	(Substitution)

- Afhængighed: Lad $\mathscr{B} \in \Gamma$, hvor Γ er en mængde af wf'ere. Antag, der findes en deduktion af $\mathscr{B}$ i Γ, givet ved $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_n$, samt en verificering af hvert skridt i deduktionen. $\mathscr{D}_i$ siges at afhænge af $\mathscr{B}$, hvis:
  1. $\mathscr{D}_i$ er $\mathscr{B}$, og verificeringen af $\mathscr{D}_i$ er, at $\mathscr{D}_i \in \Gamma$, eller
  2. $\mathscr{D}_i$ følger direkte ved enten MP eller GEN på nogle foregående $\mathscr{D}_j$'er, og mindst een af disse afhænger af $\mathscr{B}$.

[1] Efterfølger og a_1: se kap. 2.2.

2.2 Teorien S, sproget $\mathscr{L}_A$

Som bekendt har enhver teori et sprog. I teorien bruges sproget til at formulere aksiomer, wf'ere o.s.v.. GUF handler om teorier med et helt bestemt sprog, sproget $\mathscr{L}_A$. Vi introducerer senere i opgaven teorien S. Denne teori har sproget $\mathscr{L}_A$, og som standardmodel de naturlige tal $\mathbb{N}$. Sproget $\mathscr{L}_A$ er derfor stærkt tilknyttet matematikken omhandlende $\mathbb{N}$, og kaldes da også aritmetikkens sprog. Heraf fodtegnet A.

$\mathscr{L}_A$ har et enkelt prædikatbogstav A_1^2, en enkelt konstant a_1, og 3 funktionsbogstaver f_1^1, f_1^2 og f_2^2. Standardfortolkningen af A_1^2 er '=', af a_1: 0, og disse skrives da også kort som ditto. $f_1^1(t)$ fortolkes som efterfølgeren til t, og skrives kort t'. $f_1^2(s,t)$ fortolkes som $s+t$, $f_2^2(s,t)$ som $s \cdot t$, og skrives kort som hhv. $s+t$ og $s \cdot t$.

Sammensættes f_1^1 med sig selv mange gange, blive notationen hurtigt tung. Derfor bruges forkortelsen $\bar{n}$ for den n'te efterfølger til a_1:

$$\bar{n} = \overbrace{f_1^1 \circ \ldots \circ f_1^1}^{n}(a_1^1)$$

Med notationen indført i indledningen fås så følgende korte notation:

$$\overline{\underline{k}}_n = \bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$$

En dybere historisk begrundelse for at indføre teorien S vil vi ikke give. Dog: I bestræbelserne for at formalisere de naturlige tal dukker teorien S op via Peanos aksiomer. Denne teori S skal vi nu her kort introducere.

Teorien S har sproget $\mathscr{L}_A$, og de sædvanlige logiske aksiomer for en 1. ordens teori. De ikke- logiske aksiomer ('proper') for S er følgende:

(S1) $x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3)$
(S2) $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1' = x_2'$
(S3) $0 \neq x_1'$
(S4) $x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2$
(S5) $x_1 + 0 = x_1$
(S6) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$
(S7) $x_1 \cdot 0 = 0$
(S8) $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$
(S9) For enhver wf $\mathscr{B}$ i S gælder
$\mathscr{B}(0) \Rightarrow ((\forall x)(\mathscr{B}(x) \Rightarrow \mathscr{B}(x')) \Rightarrow (\forall x)\mathscr{B}(x))$

Bemærkning 2.1. *(S9) minder til forveksling om, hvad vi forstår ved induktion, og kaldes da også for* princippet om matematisk induktion.

2.3 Repræsentation

I beviset for GUF er det nødvendigt at arbejde med begrebet at kunne repræsenteres i en teori K.

En talteoretisk funktion er en funktion med naturlige taltupler som sin definitionsmængde, og med værdier i de naturlige tal. Ækvivalent defineres en talteoretisk relation som en relation med naturlige taltupler som definitionsmængde. Den er en relation mellem naturlige tal. Som konvention er funktioner og relation i denne opgave talteoretiske. Der opereres nu med 2 begreber: en relation R kan/ kan ikke udtrykkes i K, mens en funktion kan/ kan ikke repræsenteres i K.

Definition 2.2. *Lad K være en teori med sproget $\mathscr{L}_A$. En relation R defineret på n- tupler siges at kunne repræsenteres i K, hvis og kun hvis der findes en wf $\mathscr{B}$ i K, med de frie variable $\underline{x}_n$, så der for alle naturlige taltupler $\underline{k}_n$ gælder:*

1. *Hvis $R(\underline{k}_n)$ er sand, så vil $\vdash_K \mathscr{B}(\overline{\underline{k}_n})$.*
2. *Hvis $R(\underline{k}_n)$ er falsk, så vil $\vdash_K \neg\mathscr{B}(\overline{\underline{k}_n})$.*

Definition 2.3. *Lad K være en teori med sproget $\mathscr{L}_A$. En funktion f defineret på n- tupler siges at kunne repræsenteres i K, hvis og kun hvis der findes en wf $\mathscr{B}(\underline{x}_n, y)$ i K med de frie variable $\underline{x}_n, y$, så der for alle naturlige taltupler $\underline{k}_n$ gælder:*

1. *Hvis $f(\underline{k}_n) = m$, så er $\vdash_K \mathscr{B}(\overline{\underline{k}_n}, \bar{m})$.*
2. $\vdash_K (\exists_1 y)\mathscr{B}(\overline{\underline{k}_n}, y)$.

Bemærk, at pkt. 2 er et meget naturligt krav at stille, idet en funktion jo kun antager een værdi for hvert punkt i definitionsmængden.

Definition 2.4. *I def. 2.3 kan pkt. 2 udskiftes med*
2'. $\vdash_K (\exists_1 y)\mathscr{B}(\underline{x}_n, y))$.
Da siges f at kunne repræsenteres stærkt i K.

Ved Gen og regel A4 [2] ses 2' at implicere 2. Den anden vej kan også vises, se Mendelson, s171.

[2] Defineres senere

3 Rekursive funktioner og relationer

De følgende, specielt simple, funktioner kaldes *initialfunktioner*:

1. $Z(x) = 0$ for $x \in \mathbb{N}$.
2. $N(x) = x + 1$ for $x \in \mathbb{N}$.
3. $U_i^n(\underline{x}_n) = x_i$ for $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^n$.

Ud fra initialfunktionerne og et endeligt antal anvendelser af følgende tre regler, for at danne nye funktioner ud fra andre, konstrueres de *rekursive funktioner*: Antag at $g, h, h_1, \ldots, h_m$ er rekursive.
Substitution:

$$f(\underline{x}_n) = g(h_1(\underline{x}_n), \ldots, h_m(\underline{x}_n))$$

Den nye funktion f siges at være fremkommet ved *substitution* af funtionerne $g, h_1, \ldots, h_m$. Denne regel er naturligvis den velkendte sammensætning af afbildninger.
Rekursion:

$$f(\underline{x}_n, 0) = g(\underline{x}_n)$$
$$f(\underline{x}_n, y + 1) = h(\underline{x}_n, y, f(\underline{x}_n, y))$$

f siges at være fremkommet ved *rekursion* af g og h. Her er det tilladt at $n = 0$ og f defineres så ved

$$f(0) = k$$
$$f(y + 1) = h(y, f(y))$$

Denne konstruktion bruger man for eksempel når fakutetsfunktionen defineres.
μ-operatoren: Antag at $g(\underline{x}_n, y)$ er en funtion sådan at for ethvert sæt $x_1, \ldots, x_n$ findes der mindst et y så $g(\underline{x}_n, y) = 0$. $\mu y(g(\underline{x}_n, y) = 0)$ betegner det mindste y så $g(\underline{x}_n, y) = 0$. Funktionen

$$f(\underline{x}_n) = \mu y(g(\underline{x}_n, y) = 0)$$

siges så at være fremkommet af g ved brug af μ-opratoren. Denne konstruktion kan man tænke på som en måde at definere en funktions værdier på ud fra løsninger til ligninger.

Eksempel 3.1. *Additions-,multiplikations- og potensfunkionen er rekursive:*

1. $$\begin{array}{lcl} x + 0 = x & \textit{eller} & f(x, 0) = U_1^1(x) \\ x + (y + 1) = N(x + y) & & f(x, y + 1) = N(f(x, y)). \end{array}$$

2. $x \cdot 0 = 0$ *eller* $g(x, 0) = Z(x)$
$x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$ $\quad g(x, y + 1) = f(g(x, y), x)$,

hvor f er additionsfunktionen.

3. $x^0 = 1$
$x^{y+1} = (x^y) \cdot x.$

Definition 3.2. *En teori K siges at have et rekursivt vokabolarium hvis de følgende relationer er rekursive:*

a) *$IC(x)$, som er sand netop når x er Gödeltallet for en individuel konstant i K.*

b) *$FL(x)$, som er sand netop når x er Gödeltallet for et funktionsbogstav i K.*

c) *$PL(x)$, som er sand netop når x er Gödeltallet for et prædikatbogstav i K.*

En teori K siges at have et rekursivt aksiomsystem hvis relationen

d) *$PrAx(x)$, som er sand netop når x er Gödeltallet for et egentligt aksion af K.*

Proposition 3.3. *Relationer opnået fra rekursive relationer ved brug af 'propositional' konnektiver og begrænsede kvantorer[3] er igen rekursive. Ved anvendelse af de begrænsede μ- operatorer $\mu y_{y \leq z}$ og $\mu y_{y < z}$ [4]fås også rekursive relationer.*

Bevis. Lad $R_1(\bar{x})$ og $R_2(\bar{x})$ være to rekursive relationer. Per definition er deres karakteristiske funktioner C_{R_1} og C_{R_2} rekursive. Af sammenhængen

$$C_{\neg R}(\bar{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \neg R(\bar{x})\, sand \\ 1 & \neg R(\bar{x})\, falsk \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & R(\bar{x})\, falsk \\ 1 & R(\bar{x})\, sand \end{array} \right\} = 1 - C_R(\bar{x})$$

ses, at $C_{\neg R_i}$, og dermed $\neg R_i(\bar{x})$, er rekursiv. Af sandhedstavlen for $R_1 \vee R_2$ fås, at

$$C_{R_1 \vee R_2} = C_{R_1} \cdot C_{R_2}$$

($C_{R_1 \vee R_2}$ er sand, hvis bare een af R'erne er sande. Nulreglen giver derfor ovenstående). Derfor er $R_1 \vee R_2$ rekursiv. Siden alle 'propositional' konnektiver kan defineres vha. $'\neg'$ og $'\vee'$, er den første type relationer i propositionen med dette vist at være rekursive.

[3]Se Mendelson s179.
[4]Se do.

Vælg nu en rekursiv relation $R(\bar{x}, y)$. Sættes $Q(\bar{x}, z)$ til at være relationen $(\exists y)_{y<z} R(\bar{x}, y)$, er

$$C_Q(\bar{x}, z) = \prod_{y<z} C_R(\bar{x}, y) \tag{1}$$

Der gælder jo

$$C_Q(\bar{x}, z) = \begin{cases} 0 & Q(\bar{x}, z)\, sand \\ 1 & Q(\bar{x}, z)\, falsk \end{cases}$$

Er Q sand, findes et $y < z$, så R er sand. Men så er C$_R$ værdien 0, og C$_Q$ er dermed 0. Omvendt, hvis Q er falsk, findes intet sådant y, og alle funktionsværdierne i produktet (1) er lig 1. Ved Proposition 3.17 i Mendelson er C$_Q$ derfor rekursiv. Når nye relationer opnås fra R ved brug af begrænsede eksistenskvantorer, fås altså igen rekursive relationer. Den begrænsede kvantor $(\exists y)_{y \leq z}$ er ækvivalent med $(\exists y)_{y<z+1}$, $(\forall y)_{y<z}$ er ækvivalent med $\neg(\exists y)_{y<z}\neg$. Ved passende substitutioner ses nye relationer opnået fra R ved brug af begrænsede kvantorer altså at være rekursive.

For alle y i mængden $\{y|(\forall u)_{u \leq y} C_R(\bar{x}, u) = 1\}$ er produktet $\prod_{u \leq y} C_R(\bar{x}, u) = 1$. For et y i mængden $\{y|(\exists u)_{u \leq y} C_R(\bar{x}, u) = 0\}$ er $\prod_{u \leq y} C_R(\bar{x}, u) = 0$. Derfor kan $\mu y_{y<z} R(\bar{x}, y)$ findes ved summen

$$\sum_{y<z} \left(\prod_{u \leq y} C_R(\bar{x}, u) \right)$$

Det mindste y mindre end z skal findes, så $C_R(\bar{x}, y) = 0$. Antag først, intet sådant y findes. Da er per definition $\mu y_{y<z} R(\bar{x}, y) = z$. For alle $y < z$ føjer produktet et 1-tal til summen. Ialt fås z 1-tal, altså giver summen det ønskede, z. Antag tilsidst, der findes et sådant y, y$_0$: $\mu y_{y<z} R(\bar{x}, y) = y_0$. For $y = 0, 1, \ldots, y_0 - 1$ bidrager produktet med et 1-tal til summen, mens for de resterende produkter som en af faktorerne har $u = y_0$, og altså forsvinder. Ialt fås y$_0$ 1-tal, dvs summen giver y$_0$. Altså er $\mu y_{y<z} R(\bar{x}, y)$ givet ved den anførte sum. Ved Proposition 3.17 i Mendelson er derfor nye relationer opnået fra R ved brug af $\mu y_{y<z}$ og, ved substitution, $\mu y_{y \leq z}$ at være rekursiv. □

Til en relation R knyttes den *karakteristiske funktion* C_R, givet ved

$$C_R(\underline{x}_n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } R(\underline{x}_n) \text{ er sand} \\ 1 & \text{hvis } R(\underline{x}_n) \text{ er falsk.} \end{cases}$$

Definition 3.4. *En relation R siges at være rekursiv hvis den karakteristiske funktion C_R er det.*

Til ethvert symbol u i en teori K tilordnes et ulige positivt tal $g(u)$, som kaldes *Gödeltallet* af u, på følgende måde:

$$g(() = 3, g()) = 5, g(,) = 7, g(\neg) = 9, g(\Rightarrow) = 11, g(\forall) = 13,$$
$$g(x_k) = 13 + 8k \text{ for } k \geq 1$$
$$g(a_k) = 7 + 8k \text{ for } k \geq 1$$
$$g(f_k^n) = 1 + 8(2^n 3^k) \text{ for } k, n \geq 1$$
$$g(A_k^n) = 3 + 8(2^n 3^k) \text{ for } k, n \geq 1.$$

Hvis $u_0 u_1 \ldots u_r$ er et udtryk, hvor hvert u_j er et symbol K, defineres Gödeltallet af udtrykket ved

$$g(u_0 u_1 \ldots u_r) = 2^{g(u_0)} 3^{g(u_1)} \ldots p_r^{g(u_r)},$$

hvor p_r er det r^{te} primtal med $p_0 = 2$.
Dette skrives også

$$g(u_0) * g(u_1) * \ldots * g(u_r)$$

Proposition 3.5. *Antag at u er Gödeltallet for en wf'er $\mathscr{B}(x_1)$.* Diagonalfunktionen *D defineres så ved at $D(u)$ er Gödeltallet for $\mathscr{B}(\bar{u})$. D er rekursiv.*

Bevis. Ideen i beviset er at udnytte følgende påstand:
Lad K være en teori med et rekursivt vokabularium. Da er følgende relationer og funktioner (1-16) rekursive:

(1a) EVbl(x): x er Gödeltal til et udtryk bestående af en variabel.

(1b) EIC(x): x er Gödeltal til udtryk bestående af en individuel konstant.

(1c) EFL(x): x er Gödeltal til et udtryk bestående af et funktionsbogstav.

(1d) EPL(x): x er Gödeltal til et udtryk bestående af et prædikatbogstav.

(2) $Arg_T(x)$: $(qt(8, x \dot{-} 1))_0$, den 0'te eksponent i primfaktoropløsningen af kvotienten.

(3) Gd(x): x er Gödeltal til et udtryk i K.

(4) Trm(x): x er Gödeltal til en term i K.

(5) Atfml(x): x er Gödeltal til en atomisk wf i K.

(6) Fml(y): y er Gödeltal til en formel i K.

(7) Subst(x,y,u,v): Lad T være en term med Gödeltal u, V en variabel med Gödeltal v, og U et udtryk med Gödeltal y. x er da Gödeltallet til resultatet af at erstatte alle frie forekomster af V i U med T.

Beviset for påstanden forløber alle på samme måde: der opskrives en formel, som er ækvivalent med relationen/ funktionen, som med propositionale konnektiver er sammensat af rekursive relationer/ funktioner. Ved proposition 3.3 følger så, at relationen/ funktionen er rekursiv. Vi vil ikke bevise sætningerne her, men blot henvise til Mendelson, Proposition 3.26. Fremgangsmåden i beviserne vil blive brugt en enkelt gang her og igen i beviset for proposition 4.5.

Lad nu t være en term med Gödeltal u, z en variabel med Gödeltal v, og A et udtryk med Gödeltal y. Så defineres Sub(y, u, v) til at være Gödeltallet af det udtryk der fremkommer ved i A at erstatte enhver fri forekomst af variablen v med termen t.
Denne funktion er rekursiv;

$$Sub(y, u, v) = \mu x_{x<(p_{uy}!)^{uy}} Subst(u, y, u, v)$$

Propotion 3.3 giver nu at Sub er rekursiv.

Funktionen Num, defineret ved at Num(y) er Gödeltallet for udtrykket $\bar{y}$, er rekursiv:

$$\begin{aligned} Num(0) &= 2^{15} \\ Num(y+1) &= 2^{49} 3^3 5^{Num(y)} 7^5. \end{aligned}$$

Nu ser man at

$$D(u) = \mathrm{Sub}(u, Num(u), 21), \tag{2}$$

og derfor en rekursiv funktion. □

Lemma 3.6. *Lad K være en vilkårlig teori i sproget $\mathscr{L}_A$ sådan at $\vdash_K 0 \neq \bar{1}$. En talteoretisk relation R er da repræsenterbar i K hvis C_R er udtrykbar i K.*

Beviset er ligetil og overspringes. Se Mendelson Proposition 3.13.

Proposition 3.7. *Lad K være en teori med et rekursivt vokabularium og aksiomsystem. Da er følgende 3 relationer rekursive.*

1. Ax(y): y er Gödeltal til et aksiom i K.
2. Prf(y): y er Gödeltal til et bevis i K.
3. Pf(y,x): y er Gödeltal til et bevis af en wf med Gödeltal x i K.

Bevis. Ax(y) er ækvivalent med

$$LAX(y) \vee PrAx(y)$$

idet et aksiom i K enten er et logisk aksiom, eller ikke et logisk aksiom, dvs et 'proper' aksiom. Da begge disse er rekursive, er ifølge proposition 3.3 Ax(y) rekursiv.

Prf(y) er ækvivalent med

$$((\exists u)_{u<y}(\exists v)_{v<y}(\exists z)_{z<y}(\exists w)_{w<y})(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4)$$

$\mathscr{A}_1 : [y = 2^w \wedge Ax(w)]$; Et bevis i K er en streng $u_o u_1 \dots u_r$, og dets Gödeltal er $g(u_o u_1 \dots u_r) = 2^{u_0} 3^{u_1} \dots p_r^{u_r} = y = 2^w$, dvs beviset er på et led, og har Gödeltal w. Men i den situation er det viste et aksiom, hvilket også er indeholdt, da der gælder Ax(w).

$\mathscr{A}_2 : [Prf(u) \wedge Fml((u)_w) \wedge Gen((u)_w, v) \wedge y = u * 2^v]$; Gödeltallet for et bevis kan også udtrykkes ved

$$g(u_o u_1 \dots u_r) = g(u_0) * \dots * g(u_r)$$

Altså består beviset af et bevis med Gödeltal u, $a_0 \dots a_s$, hvor den w'te primtalspotens af u, $g(a_w)$, er Gödeltal for en formel i K, og formlen med Gödeltal v kommer fra denne formel ved en generalisering. Med andre ord er beviset dannet af et andet bevis i K, ved i et skridt i dette bevis at lave en generalisering.

$\mathscr{A}_3 : [Prf(u) \wedge Fml((u)_z) \wedge Fml((u)_w) \wedge y = u * 2^v \wedge MP((u)_z, (u)_w, v)]$;Af det foregående ses, at dette kan udtrykkes som at beviset følger af et andet bevis i K ved modus ponens på 2 skridt i beviset.

$\mathscr{A}_4 : [Prf(u) \wedge y = u * 2^v \wedge Ax(v)]$; Beviset følger af et andet bevis i K, ved at tilføje et aksiom.

Haves et bevis i K $u_o u_1 \dots u_r$, er der kun disse muligheder for i eet skridt at bygge et nyt bevis i K. Det givne bevis kan enten være et aksiom i K ($r = 0$), eller være bygget på $u_o u_1 \dots u_{r-1}$ på denne måde. Derfor dækker $\mathscr{A}_i$, $i = 1, \dots, 4$ alle mulighederne for Gödeltal for beviser i K. Hvis y er Gödeltal for et bevis i K, må y altså have een af formerne, og ækvivalensen er altså påvist. Men da følger af proposition 3.3, at Prf(y) er rekursiv.

Pf(y,x) er ækvivalent med

$$Prf(y) \wedge x = (y)_{lh(y) \dot{-} 1}$$

$lh(y)$ er antal primdivisorer i y. Hvis beviset kun har et skridt, ses ækvivalensen at gælde umiddelbart. Da nummereringen af skridtene i beviser starter med 0, bliver det sidste skridt derfor skridt nr $n-1$, hvis beviset har n skridt. Ifølge de foregående bemærkninger om Gödeltallet for et bevis følger da, at den sidste primtalspotens i primfaktoropløsningen af y er x, da beviset jo viser wf'eren med Gödeltal x, og denne wf derfor er det sidste led i beviset. Antallet af primdivisorer i y minus 1 er netop nummeret på det sidste primtal i primfaktoropløsningen af y. Altså er ækvivalensen påvist. Igen følger af proposition 3.3, at Pf(y,x) er rekursiv. □

4 GUF

4.1 Propositioner anvendt i GUF - bevis

Vores intension med opgaven var, så hurtigt som muligt at komme frem til GUF, samt at gøre dens bevis lettilgængeligt. Derfor har vi valgt, her at samle sætningerne, som bruges i beviset for GUF, og kun vise de centrale sætninger. Derved bliver teoretisk set muligt at starte sin læsning af GUF med dette kapitet, og først senere dykke ned i de forudgående beviser. Derudover har det den fordel, at sætningerne ligger friskt i erindringen, når beviset for GUF læses, og er nemme at finde for reference i beviset.

I beviset benyttes Deduktionssætningen og dens korrolar fra Mendelson kap. 2, som vi jvf. Indledning har forudsat kendt. Denne spiller dog en så vigtig rolle i beviset, at vi alligevel vil bevise den. Derfor vender vi tilbage til den, efter at have vist GUF.

4.1.1 Sekundære propositioner

I dette afsnit angives de sætninger, som indgår i beviset for Gödels ufuldstændighedssætning. De spiller ikke en afgørende rolle i beviset, og deres beviser er derfor i de 3 første tilfælde oversprunget. Afsnittets sidste sætning er allerede gennemgået i kapitlet om rekursivitet.

Proposition 4.1. **Regel A4** *Hvis t er fri for x i $\mathscr{B}(x)$, vil*

$$(\forall x)\mathscr{B}(x) \vdash \mathscr{B}(t)$$

Proposition 4.2. **Regel E4** *Lad t være fri for x i $\mathscr{B}(x,t)$. Lad $\mathscr{B}(t,t)$ være opnået fra $\mathscr{B}(x,t)$ ved at erstatte alle frie forekomster af x med t. ($\mathscr{B}(x,t)$ har ikke nødvendigvis forekomster af t). Da vil*

$$\mathscr{B}(t,t) \vdash (\exists x)\mathscr{B}(x,t)$$

Bemærkning 4.3. *Det ses af definitionen af at være fri for en variabel x, at hvis t er en enkelt variabel eller konstant, er t altid fri for x i en vilkårlig wf $\mathscr{B}$. Thi var t ikke fri for x i en wf $\mathscr{B}$, ville en fri forekomst af x ligge i sit eget skop i $\mathscr{B}$, og denne forekomst var derfor ikke fri. Er t derfor en enkelt variabel eller konstant, kan regel A4 og E4 altid anvendes.*

Proposition 4.4. **Regel C** *Reglen er en "vælgeregel". Den siger, at man kan gå fra $(\exists x)\mathscr{B}(x)$ til $\mathscr{B}(c)$, hvis c er et vilkårligt valgt (eng. "chosen") element. Det eneste krav for at bruge reglen er altså, at c vælges vilkårligt. Hvis c tidligere i et bevis er valgt, kan det ikke vælges igen senere i beviset.*

Prop. 4.1, 4.2 og 4.4 er ligetil at vise, og vi henviser derfor til beviserne i Mendelson for interesserede.

Proposition 4.5. *Lad K være en teori med et rekursivt vokabularium og aksiomsystem. Da er følgende relation rekursive.*
Pf(y,x): y er Gödeltal til et bevis af en wf med Gödeltal x i K.

Prop. 4.5 bevises i kapitlet om rekursive funktioner.

4.1.2 Primære propositioner

I beviset for GUF spiller fixpunktssætningen, som angives senere i dette afsnit, en afgørende rolle. Men for at vise sætningen har vi brug for et

Lemma 4.6. (Diagonallemmaet) *Antag, diagonalfunktionen D kan repræsenteres i en teori med lighedstegn K med sproget $\mathscr{L}_A$. For enhver wf $\mathscr{E}(x_1)$ med kun een fri variabel findes da en lukket wf $\mathscr{C}$, så*

$$\vdash_K \mathscr{C} \Leftrightarrow \mathscr{E}(\ulcorner \mathscr{C} \urcorner) \tag{3}$$

Bevis. Der er givet en wf $\mathscr{E}(x_1)$ med kun een fri variabel. D er antaget at kunne repræsenteres. Lad derfor wf'eren $\mathscr{D}(x_1, x_2)$ repræsentere D i K i sproget $\mathscr{L}_A$. Vi konstruerer en wf ved

$$(\forall x_2)(\mathscr{D}(x_1, x_2) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2)) \tag{4}$$

Lad m være Gödeltallet til (4). Substituer x_1 med $\bar{m}$ heri

$$(\forall x_2)\,(\mathscr{D}(\bar{m}, x_2) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2)) \tag{5}$$

Kald denne wf $\mathscr{C}$. Bemærk, at $\mathscr{C}$ ikke indeholder nogen fri variabel. $\bar{m}$ er jo en term uden variable, og x_2 er bunden af al- kvantoren. Altså er $\mathscr{C}$ en lukket wf. Da vil $\mathscr{C}$ opfylde (3). Thi lad $\mathscr{C}$'s Gödeltal være q. Per definition er altså $q = \ulcorner \mathscr{C} \urcorner$. Per definitionen af D følger det, at $D(m) = q$. Da $\mathscr{D}(x_1, x_2)$ repræsenterer D i K, vil altså

$$\vdash_K \mathscr{D}(\bar{m}, \bar{q}) \tag{6}$$

(3) består af 2 implikationer. Kan begge vises, er vi færdige, thi da følger (3) ved biconditional introduction.

	$\vdash_K \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{E}(\bar{q})$:	
1	$\mathscr{C}$	Hyp
2	$(\forall x_2)(\mathscr{D}(\bar{m}, x_2) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2))$	$\mathscr{C}$, opskrevet
3	$\mathscr{D}(\bar{m}, \bar{q}) \Rightarrow \mathscr{E}(\bar{q})$	2, regel A4
4	$\mathscr{D}(\bar{m}, \bar{q})$	Iflg. (6)
5	$\mathscr{E}(\bar{q})$	3,4, MP
6	$\mathscr{C} \vdash_K \mathscr{E}(\bar{q})$	1-5
7	$\vdash_K \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{E}(\bar{q})$	1-6, kor. 4.12
	$\vdash_K \mathscr{E}(\bar{q}) \Rightarrow \mathscr{C}$:	
1	$\mathscr{E}(\bar{q})$	Hyp
2	$\mathscr{D}(\bar{m}, x_2)$	Hyp
3	$(\exists_1 x_2)\mathscr{D}(\bar{m}, x_2)$	$\mathscr{D}$ repræsenterer D
4	$\mathscr{D}(\bar{m}, \bar{q})$	Iflg. (6)
5	$x_2 = \bar{q}$	2-4, entydighed af x_2
6	$x_2 = \bar{q} \Rightarrow (\mathscr{E}(\bar{q}) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2))$	'$=$'- egenskab
7	$\mathscr{E}(\bar{q}) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2)$	5, 6, MP
8	$\mathscr{E}(x_2)$	1, 7, MP
9	$\mathscr{E}(\bar{q}), \mathscr{D}(\bar{m}, x_2) \vdash_K \mathscr{E}(x_2)$	1-8
10	$\mathscr{E}(\bar{q}) \vdash_K \mathscr{D}(\bar{m}, x_2) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2)$	1-9, kor. 4.12
11	$\mathscr{E}(\bar{q}) \vdash_K (\forall x_2)(\mathscr{D}(\bar{m}, x_2) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2))$	10, Gen
12	$\vdash_K \mathscr{E}(\bar{q}) \Rightarrow (\forall x_2)(\mathscr{D}(\bar{m}, x_2) \Rightarrow \mathscr{E}(x_2))$	1-11, kor. 4.12
13	$\vdash_K \mathscr{E}(\bar{q}) \Rightarrow \mathscr{C}$	12, omskrevet

I beviserne benyttes kor. 4.12. Kun før sidste gang kor. 4.12 benyttes, er Gen anvendt. Netop denne anvendelse skal opfylde en betingelse, for at korrolaret kan anvendes. Der bliver på intet tidspunkt brugt Gen på $\bar{q}$, som er den eneste fri variabel i $\mathscr{E}$ per antagelse. Derfor er alle anvendelserne af kor. 4.12 lovlige. Hermed er beviset afsluttet. □

Proposition 4.7. (Fikspunktssætningen) *Antag, alle rekursive funktioner kan repræsenteres i en teori K i sproget $\mathscr{L}_A$. For enhver wf $\mathscr{E}(x_1)$, hvor x_1 er den eneste fri variabel, findes da en lukket wf $\mathscr{C}$, så*

$$\vdash_K \mathscr{C} \Leftrightarrow \mathscr{E}(\ulcorner \mathscr{C} \urcorner)$$

Bevis. D ses i kapitlet om rekursive funktioner at være rekursiv. Derfor kan D repræsenteres i K, og Lemma 4.6 kan anvendes. Men denne giver netop det ønskede. □

Proposition 4.8. *Hvis K er ω- konsistent, er K konsistent.*

Bevis. Er K inkonsistent, findes en wf $\mathscr{A}$, som selv kan vises, og hvis negation også kan vises. Ved tautologien $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ ville alle wf'ere da kunne vises i K. For at vise, at K er konsistent, er det derfor nok at vise, at der i K findes en wf, som ikke kan vises i K.

Lad en wf $\mathscr{E}$ i K være givet, med x som sin eneste frie variabel. Vi kan skrive $\mathscr{E}(x)$. Nu defineres en wf $\mathscr{B}(x)$ ved $\mathscr{E}(x) \wedge \neg\mathscr{E}(x)$. Det er strategien at vises, at der ikke findes noget x, så $\mathscr{B}(x)$ kan vises i K.

Af definitionen af $\mathscr{B}$ fås nu

$$\neg\mathscr{B} \equiv \neg\mathscr{E}(x) \wedge \neg\mathscr{E}(x) \equiv (\neg\mathscr{E}(x)) \vee (\neg\neg\mathscr{E}(x)) \equiv (\neg\mathscr{E}(x)) \vee (\mathscr{E}(x))$$

Her er '$\equiv$' en forkortelse for, at 2 wf'ere er ækvivalente. Altså er $\neg\mathscr{B}(\bar{n})$ en instans af en tautologi, da jo enten en wf eller dens negation er sand. Men så vil $\vdash_K \neg\mathscr{B}(\bar{n})$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Ved ω- konsistens fås da ikke- $\vdash_K (\exists x)\mathscr{B}(x)$. Hermed er beviset afsluttet. □

4.2 GUF

Proposition 4.9. GUF *Lad K være en teori med lighedstegn i sproget $\mathscr{L}_A$, som opfylder*

1. *K har et rekursivt aksiomsystem (dvs. PrAx(y) er rekursiv).*
2. $\vdash_K 0 \neq \bar{1}$.
3. *Enhver rekursiv funktion kan repræsenteres i K.*

Da findes i K en wf $\mathscr{G}$, som opfylder

$$\vdash_K \mathscr{G} \Leftrightarrow (\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$$

Den hermed definerede wf'er kaldes en Gödelsætning *for K.*

Der gælder desuden:

(a) *Hvis K er konsistent, ikke- $\vdash_K \mathscr{G}$.*
(b) *Hvis K er ω- konsistent, ikke- $\vdash_K \neg\mathscr{G}$*

Altså er $\mathscr{G}$ en ikke- afgørlig sætning i K, hvis K er ω- konsistent.

Bevis. Eksistens af en teori opfyldende pkt. 1-3. Vi viser senere, at K kan antages at være S, idet S har et rekursivt aksiomsystem, og enhver rekursiv funktion kan repræsenteres i S. At $0 \neq \bar{1}$ er et aksiom i S. Der findes altså en teori, som opfylder kravene, sætningen er ikke et tomt udsagn!

Eksistens af $\mathscr{G}$. Ved pkt. 2 kan Prop. 3.6 benyttes, og det fås heraf, at en talteoretisk relation R kan udtrykkes i K hvis og kun hvis C_R er repræsenterbar i K. Antag nu, C_R er rekursiv. Per definition gælder dette, hvis og kun hvis R er rekursiv. Men ved pkt. 3 fås C_R at være repræsenterbar i K, og altså kan R udtrykkes i K. Vi har altså: Enhver rekursiv talteoretisk relation kan udtrykkes i K.

Ved pkt. 3 kan Fikspunktssætningen anvendes. Fra denne fås, at er $\mathscr{E}(x_1)$ en wf med x_1 som eneste fri variabel, findes en lukket wf $\mathscr{C}$, så

$$\vdash_K \mathscr{C} \Leftrightarrow \mathscr{E}(\ulcorner\mathscr{C}\urcorner) \tag{7}$$

Ifølge Prop. 4.5 er Pf(y,x) rekursiv, dvs Pf kan udtrykkes i K. Lad wf'eren $\mathscr{P}f(x_2, x_1)$ udtrykke Pf i K. Vi definerer nu $\mathscr{E}(x_1)$ som wf'eren $(\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, x_1)$. Da giver (7), at der findes en lukket wf $\mathscr{G}$, så

$$\vdash_K \mathscr{G} \Leftrightarrow (\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner) \tag{8}$$

(Der findes altså ikke noget naturligt tal n, som er Gödeltal for et bevis af $\mathscr{G}$ i K. $\mathscr{G}$ kan altså ikke bevises i K). Hermed er eksistensen af $\mathscr{G}$ vist.

Punkt a. Lad $\bar{q} = \ulcorner\mathscr{G}\urcorner$, dvs q er $\mathscr{G}$'s Gödeltal. Antag, $\vdash_K \mathscr{G}$. Beviset for $\mathscr{G}$ har da et Gödeltal. Kald dette r. Dette kan kort skrives Pf(r,q). Altså gælder

$$\vdash_K \mathscr{P}f(\bar{r}, \bar{q}); \tag{9}$$

Dette er jo netop definitionen af, at $\mathscr{P}f$ udtrykker Pf i K. Af $\bar{q} = \ulcorner\mathscr{G}\urcorner$ fås så $\vdash_K \mathscr{P}f(\bar{r}, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$, jvf. beviset for Diagonallemmaet, hvor $\bar{q}$ substitueres med x_2. Ved biconditional elimination fås fra (8), at

$$\vdash_K (\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner) \tag{10}$$

Ifølge bem. 4.3 kan regel A4 benyttes for termen $\bar{r}$. Anvendt på (10) giver denne:

$$(\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner) \vdash_K \mathscr{P}f(\bar{r}, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$$

$\mathscr{P}f(\bar{r}, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$ er ikke $(\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$, og følger heller ikke ved MP eller Gen fra nogen wf i beviset for denne. $(\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$ følger jo fra $\vdash_K \mathscr{G}$ som just anført, og kunne vi fra $\vdash_K \mathscr{G}$ slutte $\neg\mathscr{P}f(\bar{r}, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$, havde vi sluttet ikke- $\vdash_K \mathscr{G}$, i modstrid med antagelsen. $\neg\mathscr{P}f(\bar{r}, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$ er altså ikke afhængig af $(\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$. Prop. 4.10 giver da

$$\vdash_K \neg\mathscr{P}f(\bar{r}, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$$

Som før kan $\ulcorner\mathscr{G}\urcorner$ substitueres heri med $\bar{q}$

$$\vdash_K \neg\mathscr{P}f(\bar{r}, \bar{q})$$

Sammenlignes dette med (9) ses en modstrid med konsistensen af K at være opnået. Antagelsen var derfor forkert, og der gælder ikke- $\vdash_K \mathscr{G}$.

Punkt b. Antag, K er ω- konsistent, og $\vdash_K \neg\mathscr{G}$. Ved biconditional elimination fås fra (8), at $\vdash_K \neg(\forall x_2)\neg\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$. $(\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C}, \neg\mathscr{C} \vdash_K \neg\mathscr{B})$. Dette kan forkortes til

$$\vdash_K (\exists x_2)\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner) \tag{11}$$

Da K er ω- konsistent, fås fra Prop. 4.8 at K er konsistent. Men da det er antaget, at $\vdash_K \neg\mathscr{G}$, gælder så ikke- $\vdash_K \mathscr{G}$. Der findes altså ikke et bevis i K for $\mathscr{G}$, dvs. Pf(n,q) er falsk for alle $n \in \mathbb{N}$. Per definition fås da $(\bar{q} = \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$

$$\vdash_K \neg\mathscr{P}f(\bar{n}, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$, da $\mathscr{P}f$ udtrykker Pf i K. Ved K's ω- konsistens fås da ikke-

$$\vdash_K (\exists x_2)\mathscr{P}f(x_2, \ulcorner\mathscr{G}\urcorner)$$

i modstrid med (11). Der gælder derfor ikke- $\vdash_K \neg\mathscr{G}$. □

4.3 Deduktionssætningen

I dette afsnit betegner Γ en mængde af wf'ere, og vi arbejder med en førsteordens teori K med sproget $\mathscr{L}$ [5].

Proposition 4.10. *Antag, $\mathscr{C}$ ikke afhænger af $\mathscr{B}$ i en deduktion, som viser, at $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$. Da vil $\mathscr{C}$ følge af Γ alene, $\Gamma \vdash \mathscr{C}$.*

Bevis. Lad $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ være en sådan deduktion. I denne er $\mathscr{D}_n = \mathscr{C}$. Vi viser nu propositionen ved induktion efter antal led n i deduktionen.

For $n = 1$ er propositionen klart sand. Enten gælder nemlig, at $\mathscr{C} \in \Gamma$, eller $\mathscr{C}$ er et aksiom, og i begge tilfælde vil altså $\Gamma \vdash \mathscr{C}$.

Antag nu, propositionen er vist for deduktioner med færre end n led.

$\mathscr{C}$ vil i deduktionen følge fra 2 wf'ere ved enten MP eller Gen, da de er de eneste slutningsregler i teorien. Da $\mathscr{C}$ ikke afhænger .af $\mathscr{B}$, kan wf'erne heller ikke afhænge af $\mathscr{B}$. Thi gjorde de, ville $\mathscr{C}$ jo jvf. pkt 2 i def. af afhængighed afhænge af $\mathscr{B}$. Ved induktionsantagelsen kan de derfor deduceres fra Γ alene.

Antag først, $\mathscr{C}$ følger ved Gen. Da følger $\mathscr{C}$ af en wf $\mathscr{E}$, $\mathscr{C}$ er $(\forall x_k)\mathscr{E}(x_k)$. Vi har så

1	$\mathscr{E}$	Hyp
2	$(\forall x_k)\mathscr{E}(x_k)$	1, Gen
3	$\mathscr{C}$	2, def. af $\mathscr{C}$
4	$\Gamma \vdash \mathscr{E} \Rightarrow \mathscr{C}$	1-3

Da også $\Gamma \vdash \mathscr{E}$ per antagelse, følger derfor ved modus ponens, at $\mathscr{C}$ kan deduceres fra Γ alene.

Hvis $\mathscr{C}$ følger ved modus ponens, findes 2 wf'ere $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, hvor $\mathscr{E}_1$ er $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$ og $\mathscr{E}_2$ er $\mathscr{B}$. Ved simpel anvendelse af modus ponens følger derfor, at $\mathscr{C}$ kan deduceres fra Γ alene, thi $\Gamma \vdash \mathscr{B}$, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$.

I alle tilfælde gælder altså $\Gamma \vdash \mathscr{C}$. Et bevis er en endelig streng af wf'ere, så ved induktion fås da propositionen. □

Proposition 4.11. (Deduktionssætningen) *Antag, der ikke er brugt Gen over en fri variabel i $\mathscr{B}$ i en wf som afhænger af $\mathscr{B}$, ved en deduktion af $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$. Da vil $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$.*

Bevis. Lad $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ være en sådan deduktion. Vi vil vise, at for alle $i \leq n$ gælder $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i$. Er dette vist, følger sætningen. I deduktionen er $\mathscr{D}_n$ nemlig $\mathscr{C}$, og derfor er propositionen særtilfældet $i = n$.

[5] Jvf Mendelson kap. 2

Beviset føres ved induktion efter i.

For $i = 1$ er enten $\mathscr{D}_i \in \Gamma$, $\mathscr{D}_i$ er $\mathscr{B}$, eller $\mathscr{D}_i$ er et aksiom. I det første tilfælde er udsagnet oplagt, i det sidste tilfælde følger det af aksiomet A1, $\mathscr{D}_i \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i)$. Er $\mathscr{D}_i$ $\mathscr{B}$, følger ved aksiom A1, anvendt på $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B})$. Altså er udsagnet OK for $i = 1$.

Vi antager nu, udsagnet er vist for $j < i$.

De 2 måder, $\mathscr{D}_i$ kan følge af de foregående $\mathscr{D}_l$'er, er nu Gen og MP.

Ved MP. Der findes $k, l < i$, så $\mathscr{D}_k$ er $\mathscr{D}_l \Rightarrow \mathscr{D}_i$. Induktionsantagelsen giver nu, at $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_l$, og $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{D}_l \Rightarrow \mathscr{D}_i)$, da begge skridt i deduktionen er deduceret fra $\Gamma, \mathscr{B}$, i færre skridt end i. Aksiom A2 giver nu

$$(\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{D}_l \Rightarrow \mathscr{D}_i)) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_l) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i))$$

Modus ponens giver så først $((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_l) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i))$, og dernæst $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i$, altså $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i$.

Ved Gen. $\mathscr{D}_i$ er $(\forall x_k)\mathscr{D}_j$, for et $j < i$. Som før haves, at

$$\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_j \tag{12}$$

Er $\mathscr{D}_j$ afhængig af $\mathscr{B}$, og x_k en fri variabel i $\mathscr{B}$, fås $\mathscr{D}_i$ altså ved en generalisering over en variabel, som er fri i $\mathscr{B}$, hvilket er i modstrid med antagelsen i propositionen. Altså er enten $\mathscr{D}_j$ ikke afhængig af $\mathscr{B}$, eller x_k er ikke en fri variabel i $\mathscr{B}$.

Antag først, $\mathscr{D}_j$ ikke er afhængig af $\mathscr{B}$. Vi har da, at $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{D}_j$. Proposition 4.10 giver så, at $\Gamma \vdash \mathscr{D}_j$. Ved Gen fås da $\Gamma \vdash (\forall x_k)\mathscr{D}_j$, dvs $\Gamma \vdash \mathscr{D}_i$. Aksiom A1 kan igen bruges: $\mathscr{D}_i \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i)$, og ved modus ponens følger det ønskede, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i$.

Lad til slut x_k være en ikke- fri variabel i $\mathscr{B}$. Aksiom A5 giver da

$$\vdash (\forall x_k)(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_j) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow (\forall x_k)\mathscr{D}_j)$$

Fra (12) fås ved Gen, at $\Gamma \vdash (\forall x_k)\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_j$. Nu følger ved modus ponens, at $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D}_i$, da $\mathscr{D}_i$ jo var $(\forall x_k)\mathscr{D}_j$.

Per induktion følger udsagnet nu for alle $i \leq n$. Altså er propositionen vist. □

Korollar 4.12. *Antag, der ikke er brugt Gen over en fri variabel i $\mathscr{B}$ i en wf, ikke nødvendigvis afhængig af $\mathscr{B}$, ved en deduktion af $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$. Da vil $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$.*

Bevis. Udsagnet er svagere end proposition 4.11. □

5 Egenskaber for S

Proposition 5.1.

$$\vdash_S (\forall x)(\mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{C}(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\mathscr{B}(x)) \wedge ((\forall x)\mathscr{C}(x))$$

Bevis. Der er 2 implikationer at vise. Kan begge vises, følger sætningen ved 'biconditional introduction'.

$\vdash (\forall x)(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \Rightarrow (\forall x)\mathscr{B} \wedge (\forall x)\mathscr{C}$:

1	$(\forall x)(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$	Hyp.
2	$\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}$	1, regel A4
3	$\mathscr{B}$	2, konj. elimination
4	$\mathscr{C}$	2, konj. elimination
5	$(\forall x)\mathscr{B}$	3, Gen
6	$(\forall x)\mathscr{C}$	4, Gen
7	$(\forall x)\mathscr{B} \wedge (\forall x)\mathscr{C}$	5, 6, konj. intro.
8	$(\forall x)(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \vdash (\forall x)\mathscr{B} \wedge (\forall x)\mathscr{C}$	1-7
9	$\vdash (\forall x)(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \Rightarrow (\forall x)\mathscr{B} \wedge (\forall x)\mathscr{C}$	8, prop. 4.11

Den anden vej følger tilsvarende. Lad os opskrive en skitse:

1	$(\forall x)\mathscr{B} \wedge (\forall x)\mathscr{C}$	Hyp.
2	$\mathscr{B}$	1, konj. eli., regel A4
3	$\mathscr{B}$	d.o. for $\mathscr{C}$
4	$(\forall x)(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$	2, 3, konj. intro., Gen
5	$\vdash (\forall x)\mathscr{B} \wedge (\forall x)\mathscr{C} \Rightarrow (\forall x)(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$	1-4, prop. 4.11

Hermed er beviset afsluttet. □

Proposition 5.2.

$$\vdash_S ((\exists x)(\mathscr{B}(x) \wedge (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = x))) \Rightarrow ((\exists_1 x)\mathscr{B}(x))$$

Bevis. Sætningen er kun anført den ene vej, da det er den, vi har brug for senere. Den anden, skal det dog i parantes bemærkes, kan også vises.

Det skal vises, at
$(\exists x)(\mathscr{B}(x) \wedge (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = x)) \Rightarrow$
$(\exists x)\mathscr{B}(x) \wedge (\forall x, y)(\mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y) \Rightarrow x = y)$

Betragt nu følgende:

1	$(\exists x)(\mathscr{B}(x) \wedge (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = x))$	Hyp.
2	$\mathscr{B}(c) \wedge (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = c)$	1, regel C
3	$\mathscr{B}(c)$	2, konj. eli.
4	$(\exists x)\mathscr{B}(x)$	3, regel E4

Vi mangler altså kun at vise
$(\exists x)(\mathscr{B}(x) \wedge (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = x)) \Rightarrow$
$(\forall x, y)(\mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y) \Rightarrow x = y)$

thi da vil det ønskede følge ved konj. introduktion. Men så mangles kun at vise, at

$$(\exists x)(\mathscr{B}(x) \wedge (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = x)) \Rightarrow (\mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y) \Rightarrow x = y)$$

for så følger ovenstående ved 2 gange Gen.

Antag altså, at

$$(\exists x)(\mathscr{B}(x) \wedge (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = x)) \tag{13}$$

Antag også, at $\vdash_S \mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y)$, og $\vdash x \neq y$. Ved regel C og konjunktion elimination på (13) fås (1) $\vdash \mathscr{B}(c)$ og (2) $\vdash (\forall y)(\mathscr{B}(y) \Rightarrow y = c)$. Ved (2) fås først ved regel A4 $\vdash \mathscr{B}(y) \Rightarrow y = c$, og dernæst ved MP på dette og (1), $\vdash y = c$. Helt analogt kan vi ved en sustitution af y med x i (2) opnå $\vdash x = c$. Dette er en modstrid, da vi arbejder i en teori med lighedstegn, og '$=$' derfor er transitiv. Denne egenskab giver jo, at $\vdash y = x$. Under antagelsen $\vdash_S \mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y)$ har vi altså vist, at $\vdash y = x$, dvs $\mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y) \vdash y = x$, som igen ved prop. 4.11 giver, at $\vdash \mathscr{B}(x) \wedge \mathscr{B}(y) \Rightarrow y = x$. Hermed er beviset afsluttet. $\square$

Beviset benytter altså ikke andet om S, end at det er en teori med lighedstegn. Prop. 5.2 gælder altså for alle første- ordens teorier med lighedstegn.

Definition 5.3. *Funktionen $rm(x, y)$ er defineret som resten ved division af y med x, dvs $y = q \cdot x + rm(x, y)$. Men dermed er $rm(x, y)$ kun defineret modulo x. For at definere en funktion kræves derfor også, at $0 \leq rm(x, y) < x$.*

Lemma 5.4. *Sæt $\beta(x_1, x_2, x_3) = rm(1+(x_3+1)x_2, x_1)$. Ved 3.16(u) i Mendelson er β rekursiv. β kan ved følgende wf $Bt(x_1, x_2, x_3, y)$ repræsenteres stærkt i S:*

$$(\exists w)(x_1 = (1 + (x_3 + 1)x_2)w + y \wedge y < 1 + (x_3 + 1)x_2)$$

Bevis. A priori ses Bt at udtrykke egenskaber, vi normalt kender fra divisionsrester, og lemmaet virker derfor rimeligt. Men nu til beviset. I det følgende indfører vi for korthedens skyld forkortelsen $(\forall(x, y))$ for $(\forall x)(\forall y)$. Tilsvarende for kvantorerne $\exists$ og $\exists_1$.

Mendelson 3.11 siger:

$$\vdash_S y \neq 0 \Rightarrow (\exists u, v)[\mathscr{B}(u, v) \wedge (\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1, v_1) \Rightarrow (u = u_1 \wedge v = v_1))]$$

Her er $\mathscr{B}(u, v)$: $x = y \cdot u + v \wedge v < y$

Vi vil vise, at resten er entydigt bestemt. Betragt derfor det følgende:

1 $y \neq 0$
Hyp.
2 $y \neq 0 \Rightarrow (\exists u, v)[\mathscr{B}(u,v) \wedge (\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow (u = u_1 \wedge v = v_1))]$
Mendelson 3.11
3 $(\exists u, v)[\mathscr{B}(u,v) \wedge (\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow (u = u_1 \wedge v = v_1))]$
1, 2, MP
4 $\mathscr{B}(a,b) \wedge (\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow (a = u_1 \wedge b = v_1))]$
3, regel C
5 $\mathscr{B}(a,b)$
4, konj. elimination
6 $(\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow (a = u_1 \wedge b = v_1))]$
4, konj. elimination
7 $(\forall u_1, v_1)[(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow a = u_1) \wedge (\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow b = v_1)]$
6, instanst af tautologi.
8 $(\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow a = u_1) \wedge (\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow b = v_1)$
7, prop. 5.1
9 $(\forall u_1, v_1)(\mathscr{B}(u_1,v_1) \Rightarrow b = v_1)$
8, konj. elimination
10 $(\forall v_1)(\mathscr{B}(a,v_1) \Rightarrow b = v_1)$
9, Regel A4
11 $\mathscr{B}(a,b) \wedge (\forall v_1)(\mathscr{B}(a,v_1) \Rightarrow b = v_1)$
5, 10, konj. introduktion
12 $(\exists v)(\mathscr{B}(a,v) \wedge (\forall v_1)(\mathscr{B}(a,v_1) \Rightarrow v = v_1)$
11, regel E4
13 $(\exists_1 v)\mathscr{B}(a,v)$
13, prop. 5.2
14 $y \neq 0 \vdash_S (\exists_1 v)\mathscr{B}(a,v)$
1-13
15 $\vdash_S y \neq 0 \Rightarrow (\exists_1 v)\mathscr{B}(a,v)$
14, prop. 4.11

I linie 7 bruges en tautologi. Denne er

$$(A \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$$

I linie 10 bruges regel A4, som kan benyttes, da a *altid* er fri for u_1.

Hvis $y = 0$, er $x = y \cdot u + v = 0 \cdot u + v = v$. I alle tilfælde er v altså entydigt bestemt. Altså gælder

$$\vdash_S (\exists_1 v)(x = ay + v \wedge v < y)$$

Ved regel E4 fås da

$$\vdash_S (\exists_1 v)(\exists u)(x = uy + v \wedge v < y)$$

Vi har her byttet om på kvantorerne $\exists_1$ og $\exists$. Dette er lovligt for eksistenskvantorer, men $\exists_1$- kvantoren består af eksistenskvantorer og konjunktioner, og derfor kan det ved konjunktion- elimination vises, at ombytningen er lovlig.

Vi vil nu bruge dette på Bt. w bruges som u, y bruges som v, og $(1+(x_3+1)x_2)$ anvendes som y. Ved identifikationen fås nu

$$\vdash_S (\exists_1 y)Bt(x_1, x_2, x_3, y)$$

Dette viser krav 2'.

Antag, $\beta(k_1, k_2, k_3) = m$. Det betyder, at

$$k_1 = (1 + (k_3 + 1)k_2)k + m$$

for et $k \in \mathbb{N}$, og $m < 1 + (k_3 + 1)k_2$. Men da giver de 2 ens tal klart den samme efterfølger til 0 i S:

$$\vdash_S \bar{k}_1 = (\bar{1} + (\bar{k}_3 + \bar{1})\bar{k}_2)\bar{k} + \bar{m} \tag{14}$$

(Her er brugt Mendelson 3.6(a): $\overline{m + n \cdot p} = \bar{m} + \bar{n} \cdot \bar{p}$). Tilsvarende gælder der klart, at

$$\vdash_S \bar{m} < \bar{1} + (\bar{k}_3 + \bar{1})\bar{k}_2 \tag{15}$$

(Her er udnyttet, at '$<$' kan udtrykkes i S). Ved konjunktion introduktion på (14) og (15) fås nu, at

$$\vdash_S (\bar{k}_1 = (\bar{1} + (\bar{k}_3 + \bar{1})\bar{k}_2)\bar{k} + \bar{m}) \wedge (\bar{m} < \bar{1} + (\bar{k}_3 + \bar{1})\bar{k}_2) \tag{16}$$

Betragt nu $Bt(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{m})$:

$$(\exists \bar{k})[\bar{k}_1 = (\bar{1} + (\bar{k}_3 + \bar{1})\bar{k}_2)\bar{k} + \bar{m}) \wedge (\bar{m} < \bar{1} + (\bar{k}_3 + \bar{1})\bar{k}_2)]$$

Ved bemærkning 4.3 kan regel E4 bruges på (16), og det fås, at

$$\vdash_S Bt(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{m})$$

Altså er også krav 1 opfyldt, og altså repræsenteres β stærkt i S af Bt. $\square$

Lemma 5.5. *For alle naturlige taltupler $k_0, \ldots, k_n$ findes naturlige tal b, c, så $\beta(b, c, i) = k_i$*

Bevis. Lad $k = \max\{n, k_0, \ldots, k_n\}$, og $c = k!$. Betragt tallene

$$u_i = 1 + (i+1)c, \ 0 \leq i \leq n$$

Det er nu strategien at vise, u_i'erne er parvis primiske, og bruge den Kinesiske restklassesætning. Antag derfor, der findes et primtal p, så $p|u_i$ og $p|u_j$, hvor $i \neq j$. Antag, $i > j$. Da vil

$$p|(u_i - u_j) = 1 + (i+1)c - 1 - (j+1)c = (i-j)c$$

Altså vil $p|(i-j)c$, dvs $p|(i-j)$ eller $p|c$. Antag først, $p|c$. Da også $p|(1+(i+1)c)(= u_i)$, vil derfor $p|1$, som er en modstrid. Altså vil $p \not| c$. Nu må så $p|(i-j)$. $i, j \leq n$, så $i-j \leq n \leq k$. Derfor går $(i-j)$ op i $k!$, thi $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (i-j) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Men $k! = c$, dvs $(i-j)|c$, og så vil $p|c$, endnu en modstrid. Det er hermed vist, at u_i'erne er indbyrdes primiske.

For $0 \leq i \leq n$ er $k_i \leq k \leq k! = c < 1 + (i+1)c = u_i$. Den kinesiske restklassesætning giver nu, at der findes et $b < u_0 \cdot \ldots \cdot u_n$, så $rm(u_i, b) = k_i$; dette betyder jo netop, at $b = \alpha u_i + k_i$, altså at

$$b \equiv k_i \ (u_i), \ 0 \leq i \leq n$$

Restklassesætningen siger netop, at dette system har løsninger $x \in \mathbb{Z}$, og løsningerne udgør een restklasse modulo produktet $u_0 \ldots u_n$. Som repræsentant har vi her valgt $b < u_0 \ldots u_n$, hvilket står os frit for. Klassen afhænger jo ikke af repræsentanten, vi vælger. Men så fås

$$\beta(b, c, i) = rm(1 + (i+1)c, b) = rm(u_i, b) = k_i$$

Det var netop det ønskede, og beviset er afsluttet. □

Proposition 5.6. *Enhver rekursiv funktion er repræsentabel i S.*

Bevis. For at vise sætningen viser man først at initialfunktionerne er repræsentable og derefter at substitution, rekursion og μ-operatoren ikke føre ud af klassen af repræsentable funktioner. Siden ideen er meget den samme har vi valgt kun at vise at efterfølgerfunktionen er repræsentabel og derefter at rekursionsreglen anvendt på repræsentable funktioner igen giver repræsentable funktioner.

Efterfølger funktionen er repræsentabel ved wf'eren

$$y = x_1'$$

For ethvert k og m gælder der at hvis $N(k) = m$ så er $m = k + 1$. Så $\overline{m}$ er $\overline{k}'$ og derfor gælder

$$\vdash_K \overline{m} = \overline{k}'$$

Vi skal vise

$$\vdash_K (\exists y)(y = x_1') \wedge (\forall y)(\forall z)(y = x_1' \wedge z = x_1' \Rightarrow y = z)$$

Første del er klar og anden del kommer af aksiom S1 og S2 efterfulgt af Gen.

Vi viser nu første betingelse i definitionen af at være rekursiv for rekursionsreglen.

Antag at $g(\underline{x}_n)$ og $h(\underline{x}_n, y, z)$ er repræsentable i S ved $\mathscr{B}(\underline{x}_{n+1})$ og $\mathscr{C}(\underline{x}_{n+3})$. Lad

$$f(\underline{x}_n, 0) = g(\underline{x}_n)$$

$$f(\underline{x}_n, y+1) = h(\underline{x}_n, y, f(\underline{x}_n, y))$$

At $f(\underline{x}_n, y) = z$ er det samme som at der findes en følge af tal $b_1, \ldots, b_y$, hvor $b_0 = g(\underline{x}_n)$, $b_y = z$ og $b_{w+1} = h(\underline{x}_n, w, b_w)$ for $w+1 \leq y$. Til denne følge svare der ifølge Lemma 5.5 tal b og c sådan at $\beta(b, c, i) = b_i$ for $0 \leq i \leq y$. Denne funktion er ifølge Lemma 5.4 repræsentærbar af

$$\mathrm{Bt}(x_1, x_2, x_3, y)$$

Først vises betingelse a) i definitionen af at være repræsenterbar, altså at der findes en wf'er $\mathscr{D}(\underline{x}_{n+2})$ som opfylder

$$\text{Hvis } f(\underline{k}_n, p) = m, \text{ så er } \vdash_S \mathscr{D}(\overline{\underline{k}_n}, \bar{p}, \bar{m}).$$

Antag først at $p = 0$. Så er $m = g(\underline{x}_n)$ og der findes ifølge Lemma 5.4 og 5.5 hele tal b og c sådan at

$$\vdash_S \mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, 0, \bar{m}). \tag{17}$$

På den anden side har man at $\vdash_S \mathscr{B}(\overline{\underline{k}}_n, \bar{m})$. Regel E4 giver så, siden $\overline{m}$ ikke indeholder nogen variabel og dermed specielt er fri for w i wf'eren, at

$$\vdash_S (\exists w)(\mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, 0, w) \wedge \mathscr{B}(\overline{\underline{k}}_n, w)). \tag{18}$$

Proposition 3.7 (z) i Mendelson viser at $\vdash_S w \not< 0$. Sammen med tautologien $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ og Gen fås

$$\vdash_S (\forall w)(w < 0 \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(\mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, w, y) \wedge \mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, w', z) \wedge \mathscr{C}(\overline{\underline{k}}_n, w, y, z))) \tag{19}$$

Ved at anvende regel E4 på (17),(18) og (19) ses, at wf'eren $\mathscr{D}(\underline{x}_{n+2})$:

$$\begin{aligned}(\exists u)(\exists v)[(\mathrm{Bt}(u, v, x_{n+1}, x_{n+2}) \wedge (\exists w)(\mathrm{Bt}(u, v, 0, w) \wedge \mathscr{B}(\underline{x}_n, w)))\\ \wedge(\forall w)(w < x_{n+1} \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(\mathrm{Bt}(u, v, w, y) \wedge \mathrm{Bt}(u, v, w', z) \wedge \mathscr{C}(\underline{x}_n, w, y, z)))]\end{aligned}$$

opfylder $\vdash_S \mathscr{D}(\overline{\underline{k}}_n, 0, \bar{m})$, som skulle vises.

Antag nu at $p > 0$. Sæt $r_i = f(\underline{k}_n, i)$. Igen giver Lemma 5.4 og 5.5 at $\vdash_S \mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{r_i})$ for $0 \leq i \leq p$.
Siden $\beta(b, c, 0) = r_0 = f(\underline{k}_n, 0) = g(\underline{k}_n)$ er $\vdash_S \mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{r_0}) \wedge \mathscr{B}(\overline{\underline{k}}_n, \bar{r_0})$ og regel E4 giver

$$\vdash_S (\exists w)(\mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, w) \wedge \mathscr{B}(\overline{\underline{k}}_n, w)) \tag{20}$$

Siden $\beta(b, c, p) = r_p = f(\underline{k}_n, p) = m$ har man

$$\vdash_S \mathrm{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{m}) \tag{21}$$

For $1 \leq i \leq p-1$ er $\beta(b,c,i) = r_i = f(\underline{k}_n, i)$ og

$$\beta(b,c,i+1) = r_{i+1} = f(\underline{k}_n, i+1)$$
$$= h(\underline{k}_n, i, f(\underline{k}_n, i)) = h(\underline{k}_n, i, r_i)$$

Derfor er

$$\vdash_S \text{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{r_i}) \wedge \text{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}', r_{\bar{i+1}}) \wedge \mathscr{C}(\overline{\underline{k}}_n, \bar{i}, \bar{r_i}, r_{\bar{i+1}})$$

Igen giver regel E4

$$\vdash_S (\exists y)(\exists z)\text{Bt}((\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, y) \wedge \text{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}', z) \wedge \mathscr{C}(\overline{\underline{k}}_n, \bar{i}, y, z)))$$

Så Proposition 3.8 (b') i Mendelson giver at

$$\vdash_S (\forall w)(w < \bar{p} \Rightarrow (\exists y)(\exists z)\text{Bt}((\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, y) \wedge \text{Bt}(\bar{b}, \bar{c}, \bar{i}', z) \wedge \mathscr{C}(\overline{\underline{k}}_n, \bar{i}, y, z)))) \quad (22)$$

Man kan nu anvende regel E4 på (20), (21) og (22) med $\bar{b}$ og $\bar{c}$ som termerne til at se $\vdash_S \mathscr{D}(\overline{\underline{k}}_n, \bar{p}, \bar{m})$

Vi viser nu anden betingelse for at være repræsenterbar. Det skal vises

$$\vdash_S (\exists_1 x_{n+2})\mathscr{D}(\overline{\underline{k}}_n, \overline{p}, x_{n+2}). \quad (23)$$

Kun entydigheden mangler, da eksistensen allerede er vist. Beviset føres ved induktion på sproget.
Hvis $p = 0$: At lave et bevisskema for dette er meget omstædigt og beviset er lige frem; Man splitter $\mathscr{D}$ op ved konjuktioneleminition og udnytter entydigheden af wf'erne som repræsentere funktionerne β, g og h.

Antag nu at vi har vist (23). Lad $\alpha = g(\underline{k}_n)$, $\beta = f(\underline{k}_n, p)$ og $\gamma = f(\underline{k}_n, p+1) = h(\underline{k}_n, p, \beta)$. Så er

1. $\vdash_S \mathscr{C}(\overline{\underline{k}}_n, \overline{p}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$
2. $\vdash_S \mathscr{B}(\overline{\underline{k}}_n, \overline{\alpha})$
3. $\vdash_S \mathscr{D}(\overline{\underline{k}}_n, \overline{p}, \overline{\beta})$
4. $\vdash_S \mathscr{D}(\overline{\underline{k}}_n, \overline{p+1}, \overline{\gamma})$
5. $\vdash_S (\exists_1 x_{n+2})\mathscr{D}(\overline{\underline{k}}_n, \overline{p}, x_{n+2})$

Antag nu at

$$\vdash_S \mathscr{D}(\overline{\underline{k}}_n, \overline{p+1}, x_{n+2}) \quad (24)$$

Vi skal vise $x_{n+2} = \gamma$. Anvendes regel C på (24) fås

$a)$ $(\exists w)\mathrm{Bt}(b,c,0,w) \wedge \mathscr{B}(\underline{\overline{k}}_n,w)$
$b)$ $\mathrm{Bt}(b,c,\overline{p+1},x_{n+2})$
$c)$ $(\forall w)(w < \overline{p+1} \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(\mathrm{Bt}(b,c,w,y) \wedge \mathrm{Bt}(b,c,w',z) \wedge \mathscr{C}(\underline{\overline{k}}_n,w,y,z)))$

Af $c)$ fås
$d)$ $(\forall)(w < \overline{p} \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(\mathrm{Bt}(b,c,w,y) \wedge \mathrm{Bt}(b,c,w',z) \wedge \mathscr{C}(\underline{\overline{k}}_n,w,y,z)))$ Af $c)$ ved brug af regel A4 og regel C fås
$e)$ $\mathrm{Bt}(b,c,\overline{p},d) \wedge \mathrm{Bt}(b,c,\overline{p+1},e) \wedge \mathscr{C}(\underline{\overline{k}}_n,\overline{p},d,e)$
Fra $a)$, $d)$ og $e)$
$f)$ $\mathscr{D}(\underline{\overline{k}}_n,\overline{p},d)$
Fra $f)$, 5) og 3)
$g)$ $d = \overline{\beta}$
Af $e)$ og $g)$
$h)$ $\mathscr{C}(\underline{\overline{k}}_n,\overline{p},\overline{\beta},e)$
Siden β repræsentere h fås fra 1) og $h)$
$i)$ $\overline{\gamma} = e$
Af $e)$ og $i)$ fås
$j)$ $\mathrm{Bt}(b,c,\overline{p+1},\overline{\gamma})$
Fra $b)$, $j)$ og lemma 5.4
$k)$ $x_{n+2} = \overline{\gamma}$
som fuldfører induktionsskridtet.

□

6 Ikke- standard modeller for S

S har følgende fortolkning som normalmodel:

1. Domænet er de positive, hele tal.
2. 0 er fortolkningen af 0.
3. At addere med 1 er fortolkningen af f_1^1.
4. Sædvanlig addition og multiplikation er fortolkningen af '$+$' og '$\cdot$'.
5. Fortolkningen af '$=$' er identitetsrelationen, dvs '$=$' på de positive, hele tal.

En model for S er som bekendt en fortolkning af sproget for S, dvs $\mathscr{L}_A$, i hvilken alle aksiomerne i S er sande. En normalmodel er en model, hvori '$=$' fortolkes som identitetsrelationen. Altså er den ovenstående fortolkning en normalmodel, hvis den er en model. De logiske aksiomer er klart sande i fortolkningen. Også de ikke-logiske aksiomer ses trivielt at være opfyldt i fortolkningen. Altså er fortolkningen en normalmodel for S. Fortolkningen er, hvad vi normalt forstår ved de naturlige tal med sædvanlige regneoperationer. Modellen kaldes for standardmodellen for S. Ved hjælp af GUF kan det nu vises, at der findes ikke- standard- modeller for S.

Lad M være en standardmodel for S. Lad nu S_g være teorien opnået ved at tilføje en Gödelsætning $\mathscr{G}$ til S som et aksiom. Altså er $\mathscr{G}$ afgørlig i S_g, det kan vises, om $\mathscr{G}$ eller $\neg\mathscr{G}$ gælder. Bemærk, at S_g ved GUF ikke er ω- konsistent. Da S er konsistent, er S_g ved Lemma 2.12 i Mendelson konsistent. $\mathscr{G}$ er jo en lukket wf, som ikke kan bevises i S, og S_g er netop opnået fra S ved proceduren beskrevet i Lemmaet. Men så har S_g ifølge prop. 2.17 i Mendelson en numerabel model. Kald denne M_g. Alle aksiomer i S_g er sande i M_g, dvs. specielt er alle aksiomerne i S sande i M_g, thi alle aksiomerne i S er indeholdt i S_g. Altså er M_g en model for S. Ifølge korollar 2.20.a i Mendelson gælder: En wf $\mathscr{B}$ er sand i enhver numerabel model for S, hvis og kun hvis $\vdash_S \mathscr{B}$. Specielt gælder sætningen altså for $\mathscr{G}$. Men så kan M_g og M ikke være isomorfe modeller. $\mathscr{G}$ er jo sand i M_g, og ved isomorfi ville $\mathscr{G}$ være sand i M, og dermed ved korollaret $\vdash_S \mathscr{G}$, i modstrid med GUF. Altså er M_g en ikke- standard model for S. Det er derfor vist, at der findes ikke-standard modeller for S.

Litteratur

[1] Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic*, 4. ed., Chapman & Hall, UK, 1997.

[2] Hamilton, A. G., *Logic for Mathematicians*, 2. ed., Cambridge University Press, UK, 1989.