SELV-ABSORBERENDE C*-ALGEBRAER

Speciale af
Randi Rohde

25. marts 2006

Vejleder: Mikael Rørdam

Indhold

Kapitel 1

Indledning

Til ethvert par af C^*-algebraer A og B kan man danne det minimale tensorprodukt $A \otimes B$, som er genstanden for dette speciale. Specielt er der fokus på, hvornår der findes en isomorfi, så $A \cong A \otimes B$. Denne identitet studeres for generelle separable C^*-algebraer A og unitale, separable C^*-algebraer B, der har approksimativt indre halvflip. For disse C^*-algebraer viser vi eksistensen af en isomorfi $A \cong A \otimes B$, hvis der findes en approksimativ central følge af unitale, injektive *-homomorfier fra B ind i $\mathcal{M}(A)$.
Mere specifikt skal vi give eksempler på unitale C^*-algebraer B med approksimativt indre halvflip, der er selv-absorberende. Dvs. vi skal betragte isomorfien $B \cong B \otimes B$. Som det første viser vi, at en UHF-algebra B med associeret supernaturligt tal $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ er selv-absorberende, hvis og kun hvis $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

Herefter rettes interessen mod de såkaldte stærkt selv-absorberende C^*-algebraer, der er unitale, separable C^*-algebraer D, som opfylder, at $D \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} D$. Bl.a. vises, at selv-absorberende UHF-algebraer samt Cuntz algebraerne $\mathcal{O}_2$ og $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende.
Der fortsættes med en gennemgang af teorien for C^*-algebraer A, som for en given stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv C^*-algebra D opfylder, at $A \cong A \otimes D$. Disse C^*-algebraer kaldes D-stabile. Denne gennemgang indeholder permanens resultater, hvor vi viser, at D-stabilitet nedarves til idealer, kvotienter og ekstensioner. Som eksempler viser vi, at en simpel, separabel og nukleær C^*-algebra A er $\mathcal{O}_\infty$-stabil, hvis og kun hvis A er purely infinite. Dette giver anledning til, at alle Cuntz algebraerne $\mathcal{O}_n$ er $\mathcal{O}_\infty$-stabile. Derimod er $\mathcal{O}_2$ den eneste unitale, separable, simple og nukleære C^*-algebra, der er $\mathcal{O}_2$-stabil.
Til sidst gives en kort introduktion til Jiang-Su algebraen $\mathcal{Z}$, og vi viser bl.a. at alle C^*-algebraer A, der absorberer $\mathcal{O}_2$ også absorberer selv-absorberende UHF-algebraer samt $\mathcal{O}_\infty$ og $\mathcal{Z}$.

Nedenfor følger en gennemgang af specialets opbygning:

I Kapitel 2 gives en kort introduktion til det minimale tensorprodukt af C^*-algebraer, hvor vi viser Takesakis Sætning. Herefter gennemgås resultater vedr. fuldstændigt positive lineære afbildninger. Hovedresultatet er at vise eksistensen af en isomorfi $A \cong A \otimes B$, hvis der findes en approksimativ central følge af unitale, injektive *-homomorfier fra B ind i $\mathcal{M}(A)$, når A og B er separable C^*-algebraer, og B er unital med approksimativt indre halvflip.
Kapitel 3 omhandler eksempler på C^*-algebraer, der er selv-absorberende. Vi viser, at en UHF-algebra B med associeret supernaturligt tal $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ er selv-absorberende, hvis og kun hvis $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Vi viser, at de samme betingelser er ækvivalente med at

$B \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$.
I Toms og Winters notation er en unital, separabel C^*-algebra D stærkt selv-absorberende, hvis der findes en *-isomorfi $\varphi : D \mapsto D \otimes D$, så φ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_D \otimes 1_D$. I Kapitel 4 viser vi, at en stærkt selv-absorberende C^*-algebra D har approksimativt indre halvflip, og vi viser en sætning, som giver nogle betingelser, der er ækvivalente med at D er stærkt selv-absorberende. En af disse er, at $D \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} D$.
Kapitel 5 omhandler Cuntz algebraerne. Der gives et bevis for deres universelle egenskab og et bevis for, at Cuntz algebraerne er simple og purely infinite C^*-algebraer. Endvidere vises, at $\mathcal{O}_2$ og $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende.
I Kapitel 6 betragtes C^*-algebraer A, der for en given stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv C^*-algebra D opfylder, at A er D-stabil. Der vises en sætning, som giver en betingelse, der er ækvivalent med, at A er D-stabil. Denne sætning bruges i Kapitel 7 til at vise permanens resultater for D-stabilitet, og i Kapitel 8 bruges sætningen til at vise, at en ekstension E af A ved J er D-stabil, hvis A og J er D-stabile, separable C^*-algebraer.
Kapitel 9 giver eksempler på D-stabilitet. Bl.a. vises, at $\mathcal{O}_n \cong \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_\infty$ for alle $n \geq 2$, og at en unital, separabel, simpel og nukleær C^*-algebra A er $\mathcal{O}_2$-stabil, hvis og kun hvis $A \cong \mathcal{O}_2$. Efter en kort introduktion til Jiang-Su algebraen $\mathcal{Z}$, opbygges et hieraki for hvorledes C^*-algebraerne $\mathcal{Z}$, B, $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_\infty \otimes B$ og $\mathcal{O}_2$ virker som enheder mht. det minimale tensorprodukt, hvor B er en stærkt selv-absorberende UHF-algebra. Til sidst vises, at Bunce-Deddens algebraen af type 2^∞ ikke er M_{2^∞}-stabil.

Endvidere indeholder specialet også et Appendix, der omhandler resultater vedr. grænsealgebraer, integraler af kontinuerte funktioner med værdier i en vilkårlig C^*-algebra, purely infinite C^*-algebraer og et afsnit om semiprojektive C^*-algebraer, som er skrevet af Mikael Rørdam. I Kapitlerne 2-9 vil disse resultater blive benyttet frit.

Resultaterne i denne rapport bygger hovedsageligt på [TW05], [Cun77] og [Rør02], men i det indledende arbejde er [Mur90] benyttet til introduktion af det minimale tensorprodukt af C^*-algebraer.

I forbindelse med specialeskrivningen vil jeg rette en stor tak til min vejleder Mikael Rørdam for stor tålmodighed, og for altid at have tid, hvis jeg havde brug for hjælp. Endvidere skal lyde en tak for hans engagement i at introducere de studerende til såvel faglige som sociale aktiviteter i operatoralgebra-gruppen.
Ikke mindst vil jeg gerne takke IMADA samt operatoralgebra-gruppen for at dække rejseudgifterne i forbindelse med „The Fields Institute Summer School in Operator Algebras“, 2005.

Randi Rohde

Kapitel 2

Tensorprodukter

I det følgende skal vi først se på nogle indledende resultater vedr. tensorprodukter for C^*-algebraer. Vi skal bl.a. vise, at C^*-algebraen $A \otimes B$ er simpel, hvis A og B er simple C^*-algebraer. Herefter gennemgås resultater, der omhandler fuldstændigt positive lineære afbildninger, hvor vi også skal definere begrebet en nukleær afbildning mellem C^*-algebraer. I afsnittet vedr. nukleære C^*-algebraer skal vi bl.a. bruge denne definition til at vise, at en C^*-algebra med approksimativt indre halvflip er nukleær. Til sidst vil vi vha. de tidligere resultater give betingelser, der medfører, at C^*-algebraen $A \otimes B$ er isomorf med A.

2.1 Indledende resultater

Vi skal indledningsvis se på nogle vigtige resultater, der omhandler tensorprodukter af C^*-algebraer. Hvis A og B er C^*-algebraer, betegner $A \odot B$ det algebraiske tensorprodukt af A og B, mens $A \otimes B$ er fuldstændiggørelsen af $A \odot B$ mht. mindstenormen $\| \cdot \|_{\min}$. Hvis (π_A, H) og (π_B, K) er repræsentationer af hhv. A og B, findes en entydig *-homomorfi
$\pi : A \odot B \mapsto B(H \hat{\otimes} K)$, så $\pi(a \otimes b) = \pi_A(a) \otimes \pi_B(b)$ for $a \in A$ og $b \in B$ [Mur90, Theorem 6.3.3], hvor $H \hat{\otimes} K$ er Hilbertrums fuldstændiggørelsen af $H \odot K$. *-homomorfien π benævnes $\pi_A \otimes \pi_B$. Hvis π_A og π_B er injektive er $\pi_A \otimes \pi_B$ også injektiv. Ved at betragte de universelle repræsentationer (π_A, H) og (π_B, K) af hhv. A og B defineres $\| \cdot \|_{\min} : A \odot B \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ved, $\|c\|_{\min} = \|(\pi_A \otimes \pi_B)(c)\|$. Dermed er $\| \cdot \|_{\min}$ en C^*-norm på $A \odot B$, da $\pi_A \otimes \pi_B$ er injektiv (de universelle repræsentationer er injektive). Der gælder, at

$$\|c\|_{\min} = \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \| \left(\pi_\tau \otimes \pi_\rho\right)(c) \|,$$

hvor π_τ, π_ρ er GNS-repræsentationerne for hhv. A og B hørende til tilstandene $\tau : A \mapsto \mathbb{C}$ og $\rho : B \mapsto \mathbb{C}$. [Mur90, Theorem 6.4.2]. Endvidere er $\| \cdot \|_{\min}$ den mindste norm på $A \odot B$.
Lad Γ være mængden af alle C^*-normer på $A \odot B$, og definer $\|c\|_{\max} = \sup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(c)$ for alle $c \in A \odot B$. Da er

$$\| \cdot \|_{\max} : A \odot B \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \; c \mapsto \|c\|_{\max}$$

en C^*-norm på $A \odot B$, som kaldes den maksimale C^*-norm. C^*-algebraen $A \otimes_{\max} B$ er fuldstændiggørelsen af $A \odot B$ mht. $\| \cdot \|_{\max}$.

Fremover vil $\|\cdot\|$ være mindstenormen på $A \odot B$ med mindre andet angives.

Efter at have givet en kort gennemgang af de vigtigste resultater vedrørende tensorprodukter af C^*-algebraer, skal vi nu vise Takesakis Sætning, der giver, at C^*-algebraen $A \otimes B$ er simpel, hvis A og B er unitale simple C^*-algebraer. Til beviset får vi brug for nedenstående sætninger.

Sætning 2.1.1. [1] *Lad H være et Hilbertrum og $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ en von Neumann algebra med center $Z(\mathcal{A})$. Da er $\sum_{j=1}^n T_j T_j' = 0$ for $T_j \in \mathcal{A}$ og $T_j' \in \mathcal{A}'$, hvis og kun hvis der findes operatorer $C_{jk} \in Z(\mathcal{A})$ for $1 \leq j \leq n$ og $1 \leq k \leq n$, så*

$$\textstyle\sum_{j=1}^n T_j C_{jk} = 0 \text{ for } 1 \leq k \leq n \text{ og } \sum_{k=1}^n C_{jk} T_k' = T_j' \text{ for } 1 \leq j \leq n.$$

Bevis. Hvis der findes operatorer $C_{jk} \in Z(\mathcal{A})$ for $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ med de givne egenskaber fås

$$\sum_{j=1}^n T_j T_j' = \sum_{j=1}^n T_j \sum_{k=1}^n C_{jk} T_k' = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n T_j C_{jk} \right) T_k' = 0.$$

Antag nu, at $\sum_{j=1}^n T_j T_j' = 0$ for $T_j \in \mathcal{A}$ og $T_j' \in \mathcal{A}'$.
Lad $M_n(\mathcal{A})$ og $M_n(\mathcal{A}')$ være von Neumann algebraerne af $n \times n$ matricer virkende på H^n med indgange fra hhv. $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$. Lad $\widetilde{T} \in M_n(\mathcal{A})$ være matricen med indgangene $T_1, \ldots T_n$ i første række og alle andre ingange 0,

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \ldots & T_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sæt $\Lambda = \left\{ \widetilde{E} \in \mathcal{P}(M_n(\mathcal{A}')) : \widetilde{T}\widetilde{E} = 0 \right\}$. Mængden Λ er ikke-tom, da 0 er en projektion i $M_n(\mathcal{A}')$.
Definer

$$\widetilde{P} = (C_{jk})_{j,k=1}^n = \bigvee_{\widetilde{E} \in \Lambda} \widetilde{E}.$$

Da er $\widetilde{P}$ en projektion i $M_n(\mathcal{A}')$, idet $M_n(\mathcal{A}') \subseteq B(H^n)$ er en von Neumann algebra, og der gælder, at $\widetilde{T}\widetilde{P} = 0$. Vi skal nu vise, at $C_{jk} \in Z(\mathcal{A})$ for $1 \leq j \leq n$ og $1 \leq k \leq n$.

Lad F' være en projektion i $\mathcal{A}'$ og lad $\widetilde{F'}$ være $n \times n$ matricen med F' som diagonalelement og 0 i alle andre indgange,

$$\widetilde{F'} = \begin{pmatrix} F' & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F' & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & F' \end{pmatrix}.$$

Da er $\widetilde{F'}$ en projektion i $M_n(\mathcal{A}')$ og $\widetilde{F'}\widetilde{T} = \widetilde{T}\widetilde{F'}$, idet $F'T_j = T_j F'$ for $1 \leq j \leq n$. Heraf er

$$\widetilde{T}\widetilde{F'}\widetilde{P} = \widetilde{F'}\widetilde{T}\widetilde{P} = 0.$$

[1] [KR86a, Theorem 5.5.4]

Dermed vil $R(\widetilde{F}'\widetilde{P}) \in \Lambda$, hvor $R(\widetilde{F}'\widetilde{P})$ er range projektionen for $\widetilde{F}'\widetilde{P}$, så

$$\widetilde{F}'\widetilde{P} = \widetilde{P}\widetilde{F}'\widetilde{P} = \left(\widetilde{P}\widetilde{F}'\widetilde{P}\right)^* = \left(\widetilde{F}'\widetilde{P}\right)^* = \widetilde{P}\widetilde{F}'.$$

Ved udregning af matrixproduktet fås, at ovenstående lighedstegn gælder, såfremt $C_{jk}F' = F'C_{jk}$ for $j,k \in \{1,\dots,n\}$. Så C_{jk} kommuterer med enhver projektion i $\mathcal{A}'$ og dermed også med enhver operator i $\mathcal{A}'$, da $\mathcal{A}' = \overline{\operatorname{span}\mathcal{P}(\mathcal{A}')}$. Altså vil $C_{jk} \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ for $1 \le j \le n$ og $1 \le k \le n$.
Hermed er vist, at $C_{jk} \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A} = Z(\mathcal{A})$ for $1 \le j \le n$ og $1 \le k \le n$.

Vi mangler nu at vise, at $\sum_{j=1}^n T_j C_{jk} = 0$ for $1 \le k \le n$ og $\sum_{k=1}^n C_{jk}T_k' = T_j'$ for $1 \le j \le n$. Fra tidligere har vi, at $\widetilde{T}\widetilde{P} = 0$. Det giver specielt ved udregning af matrixproduktet, at $\sum_{j=1}^n T_j C_{jk} = 0$ for $1 \le k \le n$.
Lad nu $\widetilde{T}' \in M_n(\mathcal{A}')$ være $n \times n$ matricen med indgange $T_1', \dots, T_n'$ i første søjle og 0 i alle andre indgange, dvs.

$$\widetilde{T}' = \begin{pmatrix} T_1' & 0 & \dots & 0 \\ T_2' & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_n' & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\sum_{j=1}^n T_j T_j' = 0$ er $\widetilde{T}\widetilde{T}' = 0$, hvilket medfører, at $\widetilde{T}R(\widetilde{T}') = 0$, hvor $R(\widetilde{T}')$ er rangeprojektionen for $\widetilde{T}'$. Så $R(\widetilde{T}') \in \Lambda$, idet von Neumann algebraen $M_n(\mathcal{A}')$ indeholder sine rangeprojektioner. Heraf er $R(\widetilde{T}') \le \widetilde{P}$ og

$$\widetilde{P}\widetilde{T}' = \widetilde{P}R(\widetilde{T}')\widetilde{T}' = R(\widetilde{T}')\widetilde{T}' = \widetilde{T}'.$$

Ved udregning af matrixproduktet fås at $\widetilde{P}\widetilde{T}' = \widetilde{T}'$, hvis og kun hvis $\sum_{k=1}^n C_{jk}T_k' = T_j'$ for $1 \le j \le n$. □

I det følgende antages enhver repræsentation (π, H) af en C^*-algebra A at være ikke-triviel, dvs. vi antager, at $H \neq 0$ og at π er forskellig fra nulafbildningen.

Sætning 2.1.2. *En unital C^*-algebra A er simpel, hvis og kun hvis enhver irreducibel repræsentation af A er tro.*

Bevis. Antag A er simpel, og lad (π, H) være en irreducibel repræsentation af A. Sæt

$$I = \{a \in A : \pi(a) = 0\}.$$

Da er I et lukket to-sidet ideal i A, så $I = \{0\}$ eller $I = A$. Hvis $I = A$ fås en modstrid, idet π er en repræsentation af A, som pr. antagelse er forskellig fra nulafbildningen. Så $I = \{0\}$, hvilket betyder π er injektiv, og det ønskede er vist.

Antag omvendt, at enhver irreducibel repræsentation af A er tro, og lad I være et lukket to-sidet ideal i A, så $I \neq A$. Lad $\pi : A \mapsto A/I$ være kvotientafbildningen, dvs. π er en *-homomorfi med $\ker(\pi) = I$.
Mængden af tilstande på A/I er en ikke-tom, konveks og w^*-kompakt mængde, så Krein-Milmans sætning giver, at der findes en ren tilstand ρ på A/I. Den tilhørende GNS repræsentation (π_ρ, H_ρ) er en irreducibel repræsentation af A/I. [KR86b, Theorem 10.2.3]

Dette giver, at $\pi_\rho \circ \pi : A \mapsto B(H_\rho)$ er en irreducibel repræsentation af A. For antag $M \subseteq H_\rho$ er et lukket underrum, så $(\pi_\rho \circ \pi)(A)M \subseteq M$. Heraf fås $\pi_\rho(\pi(A))M = \pi_\rho(A/I)M \subseteq M$. Altså er $M = \{0\}$ eller $M = H_\rho$, da π_ρ er en irreducibel repræsentation af A/I. Så $\pi_\rho \circ \pi$ er en irreducibel repræsentation af A.

For $a \in I$ gælder, at $(\pi_\rho \circ \pi)(a) = 0$, da $a \in \ker(\pi)$. Dermed er $a = 0$, idet enhver irreducibel repræsentation af A er tro pr. antagelse. Heraf følger, at A er simpel, da $I = \{0\}$ eller $I = A$ for ethvert lukket to-sidet ideal I i A. □

Nu kan Takesakis Sætning vises. Beviset er ændret i forhold til det, der er givet i [Tak79], idet vi benytter Sætning 2.1.1. Det skal bemærkes, at sætningen også gælder for ikke-unitale C^*-algebraer. Vi skal dog kun bruge resultatet i det unitale tilfælde.

Sætning 2.1.3 (Takesaki). [2] *Hvis A og B er simple unitale C^*-algebraer, da er $A \otimes B$ simpel.*

Bevis. Lad (π, H) være en irreducibel repræsentation af $A \otimes B$. Da er $\overline{\pi(A \otimes B)(H)}$ et invariant underrum for $\pi(A \otimes B)$, og derfor lig med H, idet π antages at være forskellig fra nulafbildningen. Så (π, H) er en ikke-degenereret repræsentation af $A \otimes B$. Jvf. [Mur90, Theorem 6.3.5] findes entydige *-homomorfier $\pi_A : A \mapsto B(H)$ og $\pi_B : B \mapsto B(H)$, så

$$\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b) = \pi_B(b)\pi_A(a) \text{ for } a \in A, b \in B.$$

Repræsentationerne (π_A, H) og (π_B, H) er tro. For sæt

$$I = \{a \in A : \pi_A(a) = 0\}.$$

Da er I et lukket to-sidet ideal i A, så da A er simpel fås $I = \{0\}$ eller $I = A$. Hvis $I = \{0\}$ er π_A injektiv og det ønskede er vist. Hvis $I = A$ er $\pi(A \odot B) = \{0\}$, da π_A og π_B er entydigt bestemte, så $\pi(a \otimes b) = \pi_A(a)\pi_B(b)$. Dvs. $\pi(A \otimes B) = \{0\}$, da $A \odot B$ er en tæt delmængde af $A \otimes B$, og π er en lineær kontraktion. Men da (π, H) er en repræsentation af $A \otimes B$ er π forskellig fra nulafbildningen, hvilket medfører, at $I \neq A$. Tilsvarende fås, at π_B er injektiv.

Vi vil vise, at π er injektiv på det algebraiske tensorprodukt $A \odot B$.
Antag at $\pi(x) = 0$ for $x \in A \odot B$. Dvs. x kan skrives på formen $x = \sum_{j=1}^n a_j \otimes b_j$ for $a_j \in A$ og $b_j \in B$. Det gælder hermed, at

$$0 = \pi\left(\sum_{j=1}^n a_j \otimes b_j\right) = \sum_{j=1}^n \pi(a_j \otimes b_j) = \sum_{j=1}^n \pi_A(a_j)\pi_B(b_j).$$

Lad $\mathcal{M} = \pi_A(A)''$. Vi vil nu vise, at $\mathcal{M}$ en faktor, ved at gøre rede for flg.:

$$Z(\mathcal{M}) \subseteq \pi_A(A)' \cap \pi_B(B)' = \mathbb{C}I_H.$$

Da $\pi_A(A)$ er en C^*-algebra er $\pi_A(A)'$ en von Neumann algebra, så da $\pi_A(A)$ og $\pi_B(B)$ kommuterer fås, at $\pi_B(B) \subseteq \pi_A(A)' = \mathcal{M}'$ jvf. dobbeltkommutantsætningen.
Dvs. $\mathcal{M} = \mathcal{M}'' \subseteq \pi_B(B)'$. Så da $\pi_A(A)' = \mathcal{M}'$ fås, at $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}' \subseteq \pi_B(B)' \cap \pi_A(A)'$.

[2] [Tak79, Korollar IV4.21]

Vi mangler således at vise, at $\pi_A(A)' \cap \pi_B(B)' = \mathbb{C}I_H$. Eftersom $\pi : A \otimes B \mapsto B(H)$ er en irreducibel repræsentation gælder, at $\pi(A \otimes B)' = \mathbb{C}I_H$. For hvis P er en projektion i $B(H)$ vil $P \in \pi(A \otimes B)'$ hvis og kun hvis, $P(H)$ er et invariant underrum for $\pi(A \otimes B)$. Dvs. $P = 0$ og $P = I$ er de eneste projektioner i $\pi(A \otimes B)'$. Altså fås det ønskede, da von Neumann algebraen $\pi(A \otimes B)'$ er det lukkede lineære span af mængden af projektioner i $\pi(A \otimes B)'$.

Men $\pi(A \otimes B)'' \subseteq (\pi_A(A) \cup \pi_B(B))''$, hvilket giver, at $(\pi_A(A) \cup \pi_B(B))' \subseteq \pi(A \otimes B)' = \mathbb{C}I_H$. Heraf fås $\pi(A)' \cap \pi(B)' \subseteq \mathbb{C}I$, idet $(\pi_A(A) \cup \pi_B(B))' = \pi_A(A)' \cap \pi_B(B)'$.
Den anden inclusion $\mathbb{C}I_H \subseteq \pi(A)' \cap \pi(B)'$ er oplagt.

Hermed er vist, at $\mathcal{M}$ er en faktor. Endvidere vil $\pi_A(a_j) \in \mathcal{M}$ og $\pi_B(b_j) \in \mathcal{M}'$ for $1 \leq j \leq n$, så af Sætning 2.1.1 følger, at der findes en $n \times n$ matrix $(c_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$, så

$$\textstyle\sum_{j=1}^n c_{jk}\pi_A(a_j) = 0 \text{ for } 1 \leq k \leq n \text{ og } \sum_{k=1}^n c_{jk}\pi_B(b_k) = \pi_B(b_j) \text{ for } 1 \leq j \leq n.$$

Heraf fås, at $\sum_{j=1}^n c_{jk}a_j = 0$ for $1 \leq k \leq n$ og $\sum_{k=1}^n c_{jk}b_k = b_j$ for $1 \leq j \leq n$, da π_A og π_B er injektive.
Dvs.

$$\sum_{j=1}^n a_j \otimes b_j = \sum_{j=1}^n a_j \otimes \sum_{k=1}^n c_{jk}b_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk}a_j \otimes b_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{jk}a_j \right) \otimes b_k = 0.$$

Hermed er vist, at π er injektiv på $A \odot B$.

Definer nu $\|x\|_\beta = \|\pi(x)\|$ for $x \in A \odot B$. Da π er injektiv på $A \odot B$ er $\|\cdot\|_\beta$ C^*-norm på $A \odot B$. Men fra [Mur90, Theorem 6.4.18] fås, at $\|\cdot\|_{\min}$ er den mindste C^*-norm på $A \odot B$. Dvs.

$$\|x\|_{\min} \leq \|x\|_\beta = \|\pi(x)\| \leq \|x\|_{\min}, \quad x \in A \odot B,$$

hvor det sidste ulighedstegn gælder, da $\|\cdot\|_{\min}$ er en norm på $A \odot B$ og π er normformindskende. Så $\|\pi(x)\| = \|x\|_{\min}$ for $x \in A \odot B$, og $\pi|_{A \odot B}$ er hermed en isometri mht. $\|\cdot\|_{\min}$. Det betyder altså, at $\pi : A \otimes B \mapsto B(H)$ er en isometri og dermed injektiv.

Hermed er vist, at enhver irreducibel repræsentation af $A \otimes B$ er tro, hvilket giver, at $A \otimes B$ er simpel jvf. Sætning 2.1.2. □

Hvis A og B er C^*-algebraer med B unital, får vi i de følgende kapitler ofte brug for, at $\mathcal{M}(A) \otimes B \subseteq \mathcal{M}(A \otimes B)$, hvor $\mathcal{M}(A)$ er multiplikatoralgebraen for A. Beviset for dette resultat følger nedenfor:

Lemma 2.1.4. *Lad A være en C^*-algebra og lad B være en unital C^*-algebra. Da er $\mathcal{M}(A) \otimes B \subseteq \mathcal{M}(A \otimes B)$.*

Bevis. C^*-algebraerne A og B er lukkede to-sidede idealer i hhv. $\mathcal{M}(A)$ og B, hvilket betyder, at $A \otimes B$ er et lukket to-sidet ideal i $\mathcal{M}(A) \otimes B$. Vi vil vise, at $A \otimes B$ er et essentielt ideal i $\mathcal{M}(A) \otimes B$. Så lad $x \in \mathcal{M}(A) \otimes B$ og antag $xy = 0$ for alle $y \in A \otimes B$. Vælg en tro repræsentation $\pi : \mathcal{M}(A) \mapsto B(H)$, så $\overline{\pi(A)H} = H$. Dette kan lade sig gøre, idet der findes et Hilbertrum H_0 og en injektiv *-homomorfi $\psi : A \mapsto B(H_0)$. C^*-algebraen A er ikke nødvendigvis unital, så der skal evt. tilføjes en enhed først, hvorefter ψ restringeres til A. Hvis ψ er degenereret sættes $H = \overline{\psi(A)H_0}$. Da vil $\psi : A \mapsto B(H)$ være en tro ikke-degenereret repræsentation. Denne kan udvides til en repræsentation $\pi : \mathcal{M}(A) \mapsto B(H)$, der opfylder det ønskede jvf. [Ped79, Prop.

3.12.3]. Lad $\nu : B \mapsto B(K)$ være en tro repræsentation. Heraf er $\pi \otimes \nu : \mathcal{M}(A) \otimes B \mapsto B(H \hat{\otimes} K)$ en injektiv *-homomorfi [Mur90, Thm. 6.3.3].

Lad $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ være en approksimativ enhed for A, hvilket medfører, at $(e_\lambda \otimes 1_B)_{\lambda \in \Lambda}$ er en approksimativ enhed for $A \otimes B$, da B er en unital C^*-algebra. Det giver specielt, at $x(e_\lambda \otimes 1_B) = 0$ for alle $\lambda \in \Lambda$, og hermed er

$$(\pi \otimes \nu)(x)(\pi \otimes \nu)(e_\lambda \otimes 1_B) = (\pi \otimes \nu)(x(e_\lambda \otimes 1_B)) = 0$$

for alle $\lambda \in \Lambda$.
Bemærk, at $\pi(e_\lambda)$ konvergerer mod I_H i den stærke operator topologi. For hvis ξ er en vilkårlig vektor i $\pi(A)H$ findes $a \in A$ og $\eta \in H$, så $\xi = \pi(a)\eta$. Heraf fås,

$$\begin{aligned}
\lim_\lambda \|\pi(e_\lambda)\xi - \xi\| &= \lim_\lambda \|\pi(e_\lambda)\pi(a)\eta - \pi(a)\eta\| \\
&= \lim_\lambda \|\pi(e_\lambda a)\eta - \pi(a)\eta\| \\
&= \lim_\lambda \|\pi(e_\lambda a - a)\eta\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Så da $\pi(A)H$ er en tæt delmængde i H og $\pi(e_\lambda)$ er kontinuert for alle $\lambda \in \Lambda$ fås $\lim_\lambda \|\pi(e_\lambda)\xi - \xi\| = 0$ for ethvert $\xi \in H$.
Dvs. $(\pi \otimes \nu)(e_\lambda \otimes 1_B) = \pi(e_\lambda) \otimes I_K$ konvergerer mod $I_{H \hat{\otimes} K}$ i den stærke operator topologi. Altså fås for ethvert $\xi \in H \hat{\otimes} K$,

$$(\pi \otimes \nu)(x)\xi = \lim_\lambda (\pi \otimes \nu)(x)(\pi \otimes \nu)(e_\lambda \otimes 1_B)\xi = 0.$$

Eftersom $\pi \otimes \nu$ er injektiv er $x = 0$. Dvs. $A \otimes B$ er et essentielt afsluttet to-sidet ideal i $\mathcal{M}(A) \otimes B$, hvilket giver, at $\mathcal{M}(A) \otimes B \subseteq \mathcal{M}(A \otimes B)$. □

2.2 Fuldstændigt positive afbildninger

I det følgende gennemgås resultater vedrørende fuldstændigt positive lineære afbildninger mellem C^*-algebraer. Idet vi lader A være en C^*-algebra vises først resultater, der omhandler positive elementer i $M_n(A)$.

Lemma 2.2.1. [3] *Et element i $M_n(A)$ er positivt, hvis og kun hvis det er sum af matricer på formen $(a_i^* a_j)_{i,j=1}^n$ for $a_1, \dots a_n \in A$.*

Bevis. Hvis $c = (a_i^* a_j)_{i,j=1}^n$, da er $c = a^* a$, hvor $a \in M_n(A)$ med $a_{1,j} = a_j$ for $1 \le j \le n$ og $a_{i,j} = 0$ for $2 \le i \le n, 1 \le j \le n$. Heraf fås, at summen af matricer på formen $(a_i^* a_j)_{i,j=1}^n$ er positiv, da summen af positive elementer er positiv.
Antag omvendt, at $a = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$ er positiv. Da findes $b = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$, så $a = b^* b$. Dvs.

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i}^* b_{k,j},$$

hvilket medfører, at $a = \sum_{k=1}^n c_k$, hvor $c_k = (b_{k,i}^* b_{k,j})_{i,j=1}^n$. □

Lemma 2.2.2. [4] *En matrix $a = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$ er positiv, hvis og kun hvis*

[3][Tak79, Lemma IV.3.1]
[4][Tak79, Lemma IV.3.2]

$\sum_{i,j=1}^n x_i^* a_{i,j} x_j \geq 0$ *for vilkårlige* $x_1, \dots x_n \in A$.

Bevis. Antag $a \geq 0$. For vilkårlige $x_1, \dots x_n \in A$ er

$$\sum_{i,j=1}^n x_i^* a_i^* a_j x_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^* \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \geq 0$$

for $a_1, \dots a_n \in A$. Dvs. $\sum_{i,j=1}^n x_i^* a_{i,j} x_j \geq 0$ for alle $x_1, \dots x_n \in A$, da a er sum af matricer på formen $(a_i^* a_j)_{i,j=1}^n$ jvf. Lemma 2.2.1.
Antag omvendt, at $\sum_{i,j=1}^n x_i^* a_{i,j} x_j \geq 0$ for vikårlige $x_1, \dots, x_n \in A$. Lad (π, H, ξ_0) være en cyklisk repræsentation af A og definer $\widetilde{\pi} : M_n(A) \mapsto B(H^n)$ ved

$$(\widetilde{\pi}(b)\xi)_j = \sum_{i=1}^n \pi(b_{i,j})\xi_i, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in H^n, \ b = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(A), \ 1 \leq j \leq n.$$

Da er $\widetilde{\pi}$ en repræsentation af $M_n(A)$ og for ethvert $\xi \in H^n$ gælder

$$(\widetilde{\pi}(a)\xi, \xi) = \sum_{j=1}^n ((\widetilde{\pi}(a)\xi)_j, \xi_j) = \sum_{i,j=1}^n (\pi(a_{i,j})\xi_i, \xi_j).$$

Men $\overline{\pi(A)\xi_0} = H$, så for hvert $1 \leq j \leq n$ findes en følge $(x_j^m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq A$, så $\xi_j = \lim_{m \to \infty} \pi(x_j^m)\xi_0$. Dvs.

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\pi}(a)\xi, \xi) &= \lim_{m \to \infty} \sum_{i,j=1}^n (\pi(a_{i,j})\pi(x_i^m)\xi_0, \pi(x_j^m)\xi_0) \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{i,j=1}^n (\pi(x_j^m)^* \pi(a_{i,j})\pi(x_i^m)\xi_0, \xi_0) \\
&= \lim_{m \to \infty} \left(\pi \left(\sum_{i,j=1}^n (x_j^m)^* a_{i,j} x_i^m \right) \xi_0, \xi_0 \right).
\end{aligned}$$

Pr. antagelse er $\sum_{i,j=1}^n (x_j^m)^* a_{i,j} x_i^m \geq 0$, så $\pi\left(\sum_{i,j=1}^n (x_j^m)^* a_{i,j} x_i^m\right) \geq 0$, da π er en *-homomorfi. Dette medfører altså, at $(\widetilde{\pi}(a)\xi, \xi) \geq 0$ for alle $\xi \in H$, hvilket betyder, at $\widetilde{\pi}(a) \geq 0$ for enhver cyklisk repræsentation π.

Lad nu $(\pi_\alpha)_{\alpha \in I}$ være familien af alle cykliske repræsentationer af A. Da er $\bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha$ en tro repræsentation af A, hvilket medfører, at $\widetilde{(\bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha)}$ er en tro repræsentation af $M_n(A)$. For hvis $\varphi : A \mapsto B(H)$ er en tro repræsentation, da er $\widetilde{\varphi} : M_n(A) \mapsto B(H^n)$ tro. Thi, lad $c = (c_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$ og antag $\widetilde{\varphi}(c) = 0$. For et vilkårligt $1 \leq j \leq n$ gælder, at

$$\widetilde{\varphi}(c) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \xi_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(c_{1,j})\xi_j \\ \vdots \\ \varphi(c_{n,j})\xi_j \end{pmatrix}.$$

Dvs. $\varphi(c_{i,j}) = 0$ for alle $1 \leq i \leq n$. Så da φ er tro, og j var valgt vilkårligt, er $c_{i,j} = 0$ for alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, hvilket medfører $\widetilde{\varphi}$ er tro.

Eftersom $(\widetilde{\bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha}) = \bigoplus_{\alpha \in I} \widetilde{\pi}_\alpha$ fås,

$$(\widetilde{\bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha})(a) = \bigoplus_{\alpha \in I} \widetilde{\pi}_\alpha(a) \geq 0,$$

da $\widetilde{\pi}_\alpha(a) \geq 0$ for alle $\alpha \in I$. Dvs. $a \geq 0$, da $(\widetilde{\bigoplus_{\alpha \in I} \pi_\alpha})$ er tro. □

Definition 2.2.3. [5] Lad A og B være C^*-algebraer. For en lineær afbildning $\varphi : A \mapsto B$ defineres en lineær afbildning $\varphi_n : M_n(A) \mapsto M_n(B)$ ved

$$\varphi_n\left((a_{i,j})_{i,j=1}^n\right) = (\varphi(a_{i,j}))_{i,j=1}^n, \quad (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(A).$$

Hvis det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at φ_n er positiv, siges φ at være fuldstændigt positiv.

Korollar 2.2.4. [6] *Lad A og B være C^*-algebraer. En lineær afbildning $\varphi : A \mapsto B$ er fuldstændigt positiv, hvis og kun hvis det for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder,*

$$\sum_{i,j=1}^n y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j \geq 0$$

for alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ og alle $y_1, \ldots, y_n \in B$.

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}$, lad $x_1, \ldots, x_n$ være vilkårlige elementer i A og lad $a \in M_n(A)$ være matricen $a = (x_i^* x_j)_{i,j=1}^n$. Lemma 2.2.1 giver hermed, at a er positiv. Antag φ er fuldstændigt positiv. Dvs. $\varphi_n(a) \in M_n(B)$ er positiv. Så af Lemma 2.2.2 fås, at $\sum_{i,j=1}^n y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j \geq 0$ for alle $y_1, \ldots, y_n \in B$.

Antag omvendt at $\sum_{i,j=1}^n y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j \geq 0$ for alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ og alle $y_1, \ldots, y_n \in B$. Jvf. Lemma 2.2.2 er matricen $(\varphi(x_i^* x_j))_{i,j=1}^n \in M_n(B)$ positiv. Dvs. $\varphi_n(a) \geq 0$, hvor a er matricen $a = (x_i^* x_j)_{i,j=1}^n \in M_n(A)$. Eftersom ethvert positivt element i $M_n(A)$ er sum af matricer på formen $(x_i{}^* x_j)_{i,j=1}^n$ for $x_1, \ldots, x_n \in A$, fås heraf at $\varphi_n(a)$ er positiv for ethvert positivt element i $M_n(A)$, da φ_n er lineær. □

Korollar 2.2.5. [7] *Lad A og B være C^*-algebraer. Hvis B er kommutativ, er enhver positiv lineær afbildning $\varphi : A \mapsto B$ fuldstændigt positiv.*

Bevis. Af [Zhu93, Theorem 15.9] findes et lokalt kompakt Hausdorff rum Ω, så B er *-isomorf med $C_0(\Omega)$. Vi skal således identificere elementer i B med kontinuerte funktioner på et lokalt kompakt Hausdorff rum. For vilkårlige elementer $x_1, \ldots, x_n \in A$ og $y_1, \ldots, y_n \in B = C_0(\Omega)$

[5] [Tak79, Definition IV.3.3]
[6] [Tak79, Korollar IV.3.4]
[7] [Tak79, Korollar IV.3.5]

fås for $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i,j=1}^{n} y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j\right)(\omega) &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{y_i(\omega)} \varphi(x_i^* x_j)(\omega) y_j(\omega) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi((\overline{y_i(\omega)} x_i^*)(x_j y_j(\omega)))(\omega) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi((x_i y_i(\omega))^*(x_j y_j(\omega)))(\omega) \\ &= \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i(\omega)\right)^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j(\omega)\right)\right)(\omega) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

da φ er positiv.
Dvs. $\sum_{i,j=1}^{n} y_i^* \varphi(x_i^* x_j) y_j \geq 0$ og φ er hermed fuldstændigt positiv jvf. Korollar 2.2.4. □

Specielt giver Korollar 2.2.5, at enhver positiv lineær funktional er fuldstændig positiv.

Sætning 2.2.6. [8] *Lad A_1 og A_2 være C^*-algebraer. Hvis $\theta_1 : A_1 \mapsto B_1$ og $\theta_2 : A_2 \mapsto B_2$ er fuldstændigt positive lineære afbildninger ind i C^*-algebraer B_1 og B_2, da kan $\theta_1 \otimes \theta_2 : A_1 \odot A_2 \mapsto B_1 \odot B_2$ udvides til en fuldstændigt positiv lineær afbildning $\theta : A_1 \otimes A_2 \mapsto B_1 \otimes B_2$.*

Bevis. Vi kan vha. de universelle repræsentationer antage, at B_1 og B_2 er C^*-algebraer virkende på Hilbertrum H_1 hhv. H_2. Så af Stinesprings Sætning, [Tak79, Theorem IV.3.6] findes repræsentationer (π_1, K_1) af A_1 og (π_2, K_2) af A_2 samt begrænsede lineære operatorer $V_1 : H_1 \mapsto K_1$ og $V_2 : H_2 \mapsto K_2$, så

$$\theta_1(x_1) = V_1^* \pi_1(x_1) V_1, \quad x_1 \in A_1 \quad \text{og} \quad \theta_2(x_2) = V_2^* \pi_2(x_2) V_2, \quad x_2 \in A_2.$$

Eftersom θ_1 og θ_2 er lineære afbildninger findes en entydig lineær afbildning $\theta_1 \otimes \theta_2 : A_1 \odot A_2 \mapsto B_1 \odot B_2$, så

$$(\theta_1 \otimes \theta_2)(x_1 \otimes x_2) = \theta_1(x_1) \otimes \theta_2(x_2), \quad x_1 \in A_1, x_2 \in A_2.$$

Tilsvarende findes en entydig *-homomorfi $\pi_1 \otimes \pi_2 : A_1 \otimes A_2 \mapsto B(K_1 \hat{\otimes} K_2)$, så

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(x_1 \otimes x_2) = \pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2), \quad x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$$

[Mur90, Theorem 6.5.1], og en entydig begrænset lineær afbildning $V_1 \hat{\otimes} V_2 : H_1 \hat{\otimes} H_2 \mapsto K_1 \hat{\otimes} K_2$, så

$$(V_1 \hat{\otimes} V_2)(\xi_1 \otimes \xi_2) = V_1(\xi_1) \otimes V_2(\xi_2), \quad \xi_1 \in H_1, \xi_2 \in H_2$$

[8] [Tak79, Proposition IV.4.23]

[Mur90, Lemma 6.3.2].
Dvs.

$$(\theta_1 \otimes \theta_2)(x_1 \otimes x_2) = V_1^* \pi_1(x_1) V_1 \otimes V_2^* \pi_2(x_2) V_2 = (V_1 \hat{\otimes} V_2)^* (\pi_1 \otimes \pi_2)(x_1 \otimes x_2)(V_1 \hat{\otimes} V_2),$$

for $x_1 \in A_1$ og $x_2 \in A_2$. For hvert $x \in A_1 \otimes A_2$ sættes

$$\theta(x) = (V_1 \hat{\otimes} V_2)^* (\pi_1 \otimes \pi_2)(x)(V_1 \hat{\otimes} V_2).$$

Da er θ lineær og $\theta|_{A_1 \odot A_2} = \theta_1 \otimes \theta_2$, så θ er en udvidelse af $\theta_1 \otimes \theta_2$. Eftersom θ er lineær og begrænset, og da $A_1 \odot A_2$ samt $B_1 \odot B_2$ er tætte delmængder i hhv. $A_1 \otimes A_2$ og $B_1 \otimes B_2$ fås, at $\theta(A_1 \otimes A_2) \subseteq B_1 \otimes B_2$, idet $\theta(A_1 \odot A_2) \subseteq B_1 \odot B_2$.
Endvidere er θ fuldstændigt positiv. For lad $x_1, \ldots, x_n$ være vilkårlige elementer i $A_1 \otimes A_2$ og lad $y_1, \ldots, y_n$ være vilkårlige elementer i $B_1 \otimes B_2$. Heraf fås,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} y_i^* \theta(x_i^* x_j) y_j &= \sum_{i,j=1}^{n} y_i^* (V_1 \hat{\otimes} V_2)^* (\pi_1 \otimes \pi_2)(x_i^* x_j)(V_1 \hat{\otimes} V_2) y_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} y_i^* (V_1 \hat{\otimes} V_2)^* (\pi_1 \otimes \pi_2)(x_i^*)(\pi_1 \otimes \pi_2)(x_j)(V_1 \hat{\otimes} V_2) y_j \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} (\pi_1 \otimes \pi_2)(x_i)(V_1 \hat{\otimes} V_2) y_i \right)^* \left(\sum_{j=1}^{n} (\pi_1 \otimes \pi_2)(x_j)(V_1 \hat{\otimes} V_2) y_j \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

□

I beviset for Sætning 8.1.2 vil vi konstruere nogle fuldstændigt positive lineære afbildninger, og vi vil få brug for et par velkendte resultater vedrørende fuldstændigt positive kontraktioner, hvoraf Lemma 2.2.9 er et resultat, der kommer af Stinesprings sætning.

Definition 2.2.7. [9] En fuldstændigt positiv kontraktion $\rho : A \mapsto B$ mellem C^*-algebraer A og B kaldes nukleær, hvis der for enhver endelig delmængde $F \subseteq A$ og for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $n \in \mathbb{N}$ og fuldstændigt positive kontraktioner $\sigma : A \mapsto M_n(\mathbb{C})$ og $\eta : M_n(\mathbb{C}) \mapsto B$, så

$$\|\rho(a) - (\eta \circ \sigma)(a)\| \leq \varepsilon$$

for alle $a \in F$.

Lemma 2.2.8. *Lad A, B, C være C^*-algebraer og lad $\rho : A \mapsto B$, $\gamma : B \mapsto C$ være fuldstændigt positive kontraktioner. Da er $\gamma \circ \rho$ nukleær, hvis ρ eller γ er nukleære.*

Bevis. Antag ρ er nukleær, lad $F \subseteq A$ være en endelig delmængde i A og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vælg $n \in \mathbb{N}$ og fuldstændigt positive kontraktioner $\sigma : A \mapsto M_n(\mathbb{C})$ og $\eta : M_n(\mathbb{C}) \mapsto B$ så $\|\rho(a) - (\eta \circ \sigma)(a)\| \leq \varepsilon$ for alle $a \in F$.
Afbildningen $\gamma \circ \eta : M_n(\mathbb{C}) \mapsto C$ er en fuldstændigt positiv kontraktion, og

$$\|(\gamma \circ \rho)(a) - ((\gamma \circ \eta) \circ \sigma)(a)\| \leq \|\rho(a) - (\eta \circ \sigma)(a)\| \leq \varepsilon$$

for alle $a \in F$. Tilsvarende vises, at $\gamma \circ \rho$ er nukleær, hvis γ er det. □

[9] [Rør02, Definition 6.1.2]

Lemma 2.2.9. *Lad A og B være C^*-algebraer, og lad $\varphi : A \mapsto B$ være en fuldstændigt positiv kontraktion. Hvis $\|\varphi(x^2) - \varphi(x)^2\| = 0$ for alle $x \in A_+$, da er $\|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\| = 0$ for alle $x, y \in A$.*

Bevis. Af Stinesprings Sætning findes en repræsentation af B på et Hilbertrum H, en *-homomorfi $\alpha : A \mapsto B(H)$ og en projektion p på H, så

$$\varphi(x) = p\alpha(x)p, \ x \in A,$$

når B betragtes som en del-C^*-algebra af $B(H)$. Dvs.

$$\begin{aligned}\|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\| &= \|p\alpha(x)\alpha(y)p - p\alpha(x)p\alpha(y)p\| \\ &= \|p\alpha(x)(I-p)\alpha(y)p\| \\ &\leq \|p\alpha(x)(I-p)\|\|y\|\end{aligned}$$

for $x, y \in A$.
For $x \in A_+$ gælder, at

$$\begin{aligned}\|\varphi(x^2) - \varphi(x)^2\| &= \|p\alpha(x)(I-p)\alpha(x)p\| \\ &= \|p\alpha(x)(I-p)(p\alpha(x)(I-p))^*\| \\ &= \|p\alpha(x)(I-p)\|^2.\end{aligned}$$

Så hvis $\|\varphi(x^2) - \varphi(x)^2\| = 0$ for alle $x \in A_+$, da er $\|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\| = 0$ for alle $x \in A_+$ og alle $y \in A$.
Da ethvert $x \in A$ kan skrives som en linearkombination af fire positive elementer, giver lineariteten af φ hermed, at $\|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\| = 0$ for alle $x, y \in A$. □

2.3 Nukleære C^*-algebraer

Definition 2.3.1. En C^*-algebra A kaldes nukleær, hvis der for enhver C^*-algebra B kun er én C^*-norm på $A \odot B$.

Nedenfor angives et meget vigtigt resultat vedrørende nukleære C^*-algebraer. Sætningen er et meget dybt resultat, der blev vist af Choi og Effros.

Sætning 2.3.2. [10] *Lad A være en separabel C^*-algebra. Da er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) *A er nukleær.*

(ii) *Identitetsafbildningen $\mathrm{id}_A : A \mapsto A$ er nukleær.*

(iii) *Der findes et net $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ af lineære fuldstændigt positive kontraktioner, $\varphi_\lambda : A \mapsto A$ med endelig rang, så*

$$\lim_\lambda \|\varphi_\lambda - \mathrm{id}_A\| = 0.$$

[10] [Rør02, Theorem 6.1.3]

En af de betingelser, der skal være opfyldte for at A er isomorf med $A\otimes B$, når A er en separabel C^*-algebra og B er en separabel og unital C^*-algebra, er at B skal have approksimativt indre halvflip, hvilket er den betingelse, der er givet nedenfor. Det viser sig at være en stærk betingelse, som medfører, at B er nukleær og simpel, og at der højst er én sportilstand på B.

Definition 2.3.3. Lad A og B være separable C^*-algebraer. To *-homomorfier $\varphi : A \mapsto B$ og $\psi : A \mapsto B$ siges, at være approksimativt unitært ækvivalente, hvis der findes en følge $(u_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $\mathcal{M}(B)$ så

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\varphi(a)u_n^* - \psi(a)\| = 0 \quad \text{for alle } a \in A.$$

Definition 2.3.4. Lad B være en separabel og unital C^*-algebra. B siges at have approksimativt indre halvflip, hvis de to *-homomorfier $\alpha, \beta : B \mapsto B \otimes B$ givet ved

$$\alpha(b) = b \otimes 1_B \quad \text{og} \quad \beta(b) = 1_B \otimes b, \quad b \in B$$

er approksimativt unitært ækvivalente.

Sætning 2.3.5. *Lad B være en separabel unital C^*-algebra med approksimativt indre halvflip. Da gælder, at*

(i) *B er nukleær,* [11]

(ii) *B er simpel, og*

(iii) *der findes højst én sportilstand på B.*

Bevis. (i). Da B har approksimativt indre halvflip, findes en en følge $(u_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $B \otimes B$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(b\otimes 1_B)u_n^* - 1_B \otimes b\| = 0$$

for alle $b \in B$.
Eftersom enhedskuglen for det algebraiske tensorprodukt $B \odot B$ er en tæt delmængde i enhedskuglen for $B \otimes B$ kan vi vælge $c_n \in B \odot B$, så $\|c_n\| \le 1$ og $\lim_{n\to\infty} c_n = u_n$. Dvs.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|c_n(b\otimes 1_B)c_n^* - 1_B \otimes b\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|c_n(b\otimes 1_B)c_n^* - u_n(b\otimes 1_B)u_n^* + u_n(b\otimes 1_B)u_n^* - 1_B \otimes b\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} (\|c_n(b\otimes 1_B)c_n^* - u_n(b\otimes 1_B)u_n^*\| + \|u_n(b\otimes 1_B)u_n^* - 1_B \otimes b\|) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lad $\rho : B \mapsto \mathbb{C}$ være en vilkårlig tilstand på B. Eftersom ρ er en positiv lineær funktional, er ρ en lineær fuldstændigt positiv afbildning på B. Tilsvarende er $\mathrm{id}_B : B \mapsto B$ givet ved $\mathrm{id}_B(b) = b$, klart en lineær fuldstændigt positiv afbildning. Heraf følger jvf. Sætning 2.2.6, at $\rho \otimes \mathrm{id}_B : B \otimes B \mapsto B$ er en lineær fuldstændigt positiv afbildning, der opfylder

$$(\rho \otimes \mathrm{id}_B)(b_1 \otimes b_2) = \rho(b_1)b_2 \quad \text{for} \quad b_1, b_2 \in B.$$

[11] [KP00, Lemma 3.10]

Definer for hvert $n \in \mathbb{N}$, $T_n : B \mapsto B$ ved,

$$T_n(b) = (\rho \otimes \mathrm{id}_B)(c_n(b \otimes 1_B)c_n^*), \quad b \in B.$$

Afbildningen $b \mapsto b \otimes 1_B$ er lineær, så T_n er en lineær afbildning, da $\rho \otimes \mathrm{id}_B$ også er lineær. Vi vil nu vise, at T_n er fuldstændigt positiv. Dvs. vi skal for ethvert $m \in \mathbb{N}$ og alle $b_1, \ldots, b_m \in B$ og alle $y_1, \ldots, y_m \in B$ vise, at $\sum_{i,j=1}^m y_i^* T_n(b_i^* b_j) y_j \geq 0$ jvf. Korollar 2.2.4.
For $b_1, \ldots, b_m, y_1, \ldots, y_m \in B$ fås,

$$\sum_{i,j=1}^m y_i^* T_n(b_i^* b_j) y_j = \sum_{i,j=1}^m y_i^* (\rho \otimes \mathrm{id}_B)(c_n(b_i^* b_j \otimes 1_B)c_n^*) y_j.$$

For en elementær tensor $x_1 \otimes x_2$, $x_1, x_2 \in B$ gælder, at

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^m y_i^* (\rho \otimes \mathrm{id}_B)((x_1 \otimes x_2)(b_i^* b_j \otimes 1_B)(x_1^* \otimes x_2^*)) y_j \\
&= \sum_{i,j=1}^m y_i^* (\rho \otimes \mathrm{id}_B)((x_1 b_i^* \otimes x_2)(b_j x_1^* \otimes x_2^*)) y_j \\
&= \sum_{i,j=1}^m y_i^* (\rho \otimes \mathrm{id}_B)((b_i x_1^* \otimes x_2^*)^* (b_j x_1^* \otimes x_2^*)) y_j \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

da $\rho \otimes \mathrm{id}_B$ er fuldstændigt positiv.
Så da c_n er en endelig sum af elementære tensorer og $\rho \otimes \mathrm{id}_B$ er lineær, er T_n således en lineær fuldstændigt positiv afbildning. Endvidere er,

$$\begin{aligned}
\|T_n(b)\| &= \|(\rho \otimes \mathrm{id}_B)(c_n(b \otimes 1_B)c_n^*\| \\
&\leq \|\rho \otimes \mathrm{id}_B\| \|c_n(b \otimes 1_B)c_n^*\| \\
&\overset{12}{=} \|(\rho \otimes \mathrm{id}_B)(1_{B \otimes B})\| \|c_n(b \otimes 1_B)c_n^*\| \\
&= \|c_n(b \otimes 1_B)c_n^*\| \\
&\leq \|c_n\|^2 \|b \otimes 1_B\| \\
&= \|c_n\|^2 \|b\| \|1_B\| \\
&\leq \|b\|.
\end{aligned}$$

Hermed er vist, at T_n er en lineær fuldstændigt positiv kontraktion. For hvert $n \in \mathbb{N}$ findes

[12][Pau86, Proposition 3.6]

$m \in \mathbb{N}$, så $c_n = \sum_{j=1}^m x_j \otimes y_j$ for $x_j, y_j \in B$. Heraf fås,

$$\begin{aligned}
T_n(b) &= (\rho \otimes \mathrm{id}_B)\left(\left(\sum_{k=1}^m x_k \otimes y_k\right)(b \otimes 1_B)\left(\sum_{j=1}^m x_j^* \otimes y_j^*\right)\right) \\
&= (\rho \otimes \mathrm{id}_B)\left(\left(\sum_{k=1}^m x_k b \otimes y_k\right)\left(\sum_{j=1}^m x_j^* \otimes y_j^*\right)\right) \\
&= (\rho \otimes \mathrm{id}_B)\left(\sum_{j,k=1}^m (x_k b x_j^* \otimes y_k y_j^*)\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^m (\rho \otimes \mathrm{id}_B)(x_k b x_j^* \otimes y_k y_j^*) \\
&= \sum_{j,k=1}^m \rho(x_k b x_j^*) y_k y_j^*,
\end{aligned}$$

hvilket betyder, at dimensionen af T_n højst er m^2, og dermed endelig.
Der gælder, at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|T_n(b) - b\| &= \lim_{n\to\infty} \|(\rho \otimes \mathrm{id}_B)(c_n(b \otimes 1_B)c_n^*) - (\rho \otimes \mathrm{id}_B)(1_B \otimes b)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(\rho \otimes \mathrm{id}_B)(c_n(b \otimes 1_B)c_n^* - 1_B \otimes b)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} (\|\rho \otimes \mathrm{id}_B\| \|c_n(b \otimes 1_B)c_n^* - 1_B \otimes b\|) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dvs. B er nukleær, da $(T_n)_{n=1}^\infty$ er en følge af lineære fuldstændigt positive kontraktioner med endelig rang, så T_n konvergerer punktvis mod id_B.

(ii). Lad $I \subseteq B$ være et lukket to-sidet ideal i B. Da B har approksimativt indre halvflip eksisterer en følge $(u_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $B \otimes B$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(b \otimes 1_B)u_n^* - 1_B \otimes b\| = 0$$

for alle $b \in B$. Dermed vil $1_B \otimes b \in I \otimes B$ for $b \in I$. Dvs. $\tilde{b} \otimes b = (\tilde{b} \otimes 1_B)(1_B \otimes b) \in I \otimes B$ for $\tilde{b} \in B$ og $b \in I$, da $I \otimes B$ er et to-sidet ideal i $B \otimes B$. Altså er $B \otimes I \subseteq I \otimes B$.
Af symmetri fås, at $B \otimes I = I \otimes B$, hvilket betyder, at $I = 0$ eller $I = B$. For antag $I \neq 0$. Da findes et positivt element $e \in I$ med $\|e\| = 1$, og $e \otimes 1_B \in I \otimes B = B \otimes I$. Lad $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ være en approksimativ enhed for I. Eftersom B er unital er $(1_B \otimes e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en approksimativ enhed for $B \otimes I$. Dvs. $\lim_\lambda \|(1_{B\otimes B} - 1_B \otimes e_\lambda)x\| = 0$ for alle $x \in B \otimes I$. Heraf er,

$$\lim_\lambda \|(1_B \otimes (1_B - e_\lambda))(e \otimes 1_B)\| = \lim_\lambda \|(1_{B\otimes B} - 1_B \otimes e_\lambda)(e \otimes 1_B)\| = 0.$$

Så $\lim_\lambda \|1_B - e_\lambda\| = 0$, idet

$$\|(1_B \otimes (1_B - e_\lambda))(e \otimes 1_B)\| = \|e \otimes (1_B - e_\lambda)\| = \|e\|\|1_B - e_\lambda\| = \|1_B - e_\lambda\|.$$

Så der findes $\lambda \in \Lambda$ så $\|1_B - e_\lambda\| < 1$. Men da er $0 \notin \sigma(e_\lambda)$, og I indeholder altså invertible elementer. Dvs. $1_B \in I$ og $I = B$.

(iii). Antag at τ_1 og τ_2 er to sportilstande på B. Dvs. $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$ er en sportilstand på $B \otimes B$. Pr. antagelse findes en følge $(u_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $B \otimes B$, så $\lim_{n\to\infty} u_n(b \otimes 1_B)u_n^* = 1_B \otimes b$ for alle $b \in B$. Heraf fås,

$$\begin{aligned}
\tau_2(b) &= \tau_1(1_B)\tau_2(b) = \tau(1_B \otimes b) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau(u_n(b \otimes 1_B)u_n^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau(u_n^* u_n(b \otimes 1_B)) \\
&= \tau(b \otimes 1_B) \\
&= \tau_1(b)\tau_2(1_B) \\
&= \tau_1(b).
\end{aligned}$$

□

Endvidere gælder følgende sammenhæng mellem nuklearitet af en fuldstændigt positiv kontraktion og nuklearitet af separable C^*-algebraer.

Lemma 2.3.6. *Lad $\rho : A \mapsto B$ være en fuldstændigt positiv kontraktion mellem separable C^*-algebraer A og B. Da er ρ nukleær, hvis A eller B er nukleære C^*-algebraer.*

Bevis. Antag A er nukleær. Jvf. Sætning 2.3.2 er dette ækvivalent med, at $\mathrm{id}_A : A \mapsto A$ er nukleær. Dvs. $\rho = \rho \circ \mathrm{id}_A$ er nukleær jvf. Lemma 2.2.8. Hvis B er nukleær fås ligeledes, at $\rho = \mathrm{id}_B \circ \rho$ er nukleær, da $\mathrm{id}_B : B \mapsto B$ er nukleær. □

2.4 En approksimativ intertwining

I dette afsnit skal vi give betingelser for, hvornår C^*-algebraen A er isomorf med $A \otimes B$. Målet er således at vise Sætning 2.4.2, der giver to betingelser for, at A er isomorf med $A \otimes B$, når A er en separabel C^*-algebra og B er en unital og separabel C^*-algebra.
Først gennemgås Sætning 2.4.1, der skal benyttes i beviset for Sætning 2.4.2

Sætning 2.4.1. [13] *Lad A og B være separable C^*-algebraer og lad $\varphi : A \mapsto B$ være en injektiv *-homomorfi. Antag at der findes en følge $(v_n)_{n=1}^\infty$ af unitære elementer i $\mathcal{M}(B)$ så*

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\varphi(a) - \varphi(a)v_n\| = 0 \text{ og} \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(v_n^* b v_n, \varphi(A)) = 0, \tag{2.2}$$

for alle $a \in A$ og alle $b \in B$.
Da er A og B *-isomorfe, og der findes en *-isomorfi $\psi : A \mapsto B$, som er approksimativt unitært ækvivalent med φ.

[13] [KR02, Proposition 8.1]

Bevis. C^*-algebraerne A og B er separable, så der findes tællelige tætte delmængder $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ og $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ i hhv. A og B. For ethvert $b \in B$ og for ethvert $v \in \mathcal{M}(B)$ er $v^*bv \in B$, da B er et lukket to-sidet ideal i $\mathcal{M}(B)$. Så vi kan induktivt vælge unitære elementer $v_n \in \mathcal{M}(B)$ og elementer $a_{n,j} \in A$, så

$$\|v_n^*(v_{n-1}^* \cdots v_2^* v_1^* b_j v_1 v_2 \cdots v_{n-1})v_n - \varphi(a_{n,j})\| \leq \frac{1}{n},$$

$$\|v_n\varphi(a_j) - \varphi(a_j)v_n\| \leq 2^{-n} \qquad \text{og} \quad \|v_n\varphi(a_{m,j}) - \varphi(a_{m,j})v_n\| \leq 2^{-n},$$

for $j = 1, 2, \dots, n$ og $m = 1, 2, \dots, n-1$. Thi, for givet $n \in \mathbb{N}$ eksisterer $r(n) \in \mathbb{N}$ og $a_{n,j} \in A$, så

$$\|v_r^*(v_n^* \dots v_2^* v_1^* b_j v_1 v_2 \dots v_n)v_r - \varphi(a_{n,j})\| \leq \frac{1}{n},$$

$$\|v_r\varphi(a_j) - \varphi(a_j)v_r\| \leq 2^{-n} \quad \text{og} \quad \|v_r^*\varphi(a_{m,j}) - \varphi(a_{m,j})v_r\| \leq 2^{-n}$$

for $r \geq r(n)$, $j = 1, \dots, n$ og $m = 1, \dots, n-1$. Ved at erstatte $r(n)$ med n fås altså en følge af unitære $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, der opfylder det ønskede.

Definer en følge af *-homomorfier $\psi_n : A \mapsto B$ ved,

$$\psi_n(a) = v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(a) v_n^* \cdots v_2^* v_1^*, \quad a \in A.$$

Vi vil nu vise, at $(\psi_n(a))_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge i B for hvert $a \in A$.
For hvert $j \in \mathbb{N}$ kan vi ved at vælge $n \in \mathbb{N}$ tilstrækkeligt stort opnå, at $\|v_{n+1}\varphi(a_j) - \varphi(a_j)v_{n+1}\| < 2^{-(n+1)}$. Dvs.

$$\begin{aligned}
\|\psi_{n+1}(a_j) - \psi_n(a_j)\| &= \|v_1 \cdots v_n(v_{n+1}\varphi(a_j)v_{n+1}^* - \varphi(a_j))v_n^* \cdots v_1^*\| \\
&= \|v_{n+1}\varphi(a_j)v_{n+1}^* - \varphi(a_j)\| \\
&= \|(v_{n+1}\varphi(a_j) - \varphi(a_j)v_{n+1})v_{n+1}^*\| \\
&= \|v_{n+1}\varphi(a_j) - \varphi(a_j)v_{n+1}\| \\
&< 2^{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

Så $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_{n+1}(a_j) - \psi_n(a_j)\| < \infty$, og $(\psi_n(a_j))_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge i B for ethvert $j \in \mathbb{N}$. Eftersom $\{a_1, a_2, \dots\}$ er en tæt delmængde i A fås heraf, at $(\psi_n(a))_{n=1}^{\infty}$ er en Cauchy-følge i B for alle $a \in A$, og fuldstændigheden af B betyder, at grænseværdien

$$\psi(a) = \lim_{n \to \infty} v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(a) v_n^* \cdots v_2^* v_1^*$$

eksisterer for alle $a \in A$.
Endvidere er $\psi : A \mapsto B$ en *-homomorfi. Afbildningen er klart lineær, og for alle $a, c \in A$ gælder, at

$$\begin{aligned}
\psi(ac) &= \lim_{n \to \infty} v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(ac) v_n^* \cdots v_2^* v_1^* \\
&= \lim_{n \to \infty} v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(a)\varphi(c) v_n^* \cdots v_2^* v_1^* \\
&= \lim_{n \to \infty} v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(a) v_n^* \cdots v_2^* v_1^* v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(c) v_n^* \cdots v_2^* v_1^* \\
&= \left(\lim_{n \to \infty} v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(a) v_n^* \cdots v_2^* v_1^*\right) \left(\lim_{n \to \infty} v_1 v_2 \cdots v_n \varphi(c) v_n^* \cdots v_2^* v_1^*\right) \\
&= \psi(a)\psi(c),
\end{aligned}$$

og for alle $a \in A$ er

$$\begin{aligned}\psi(a^*) &= \lim_{n\to\infty} v_1v_2\cdots v_n\varphi(a^*)v_n^*\cdots v_2^*v_1^* \\ &= \lim_{n\to\infty} v_1v_2\cdots v_n\varphi(a)^*v_n^*\cdots v_2^*v_1^* \\ &= \lim_{n\to\infty} (v_1v_2\cdots v_n\varphi(a)v_n^*\cdots v_2^*v_1^*)^* \\ &= \psi(a)^*.\end{aligned}$$

Eftersom φ er injektiv og dermed en isometri, fås at $\|\psi(a)\| = \|a\|$ for alle $a \in A$. Dvs. ψ er injektiv, idet den isometrisk.
Sæt $u_n = v_1v_2\cdots v_n$. Dvs. $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ er en følge af unitære i $\mathcal{M}(B)$, så $\lim_{n\to\infty}\|u_n\varphi(a)u_n^* - \psi(a)\| = 0$ for alle $a \in A$. Hermed er ψ approksimativt unitært ækvivalent med φ.

For $n \in \mathbb{N}$ og $j = 1, \dots, n$ gælder, at

$$\begin{aligned}\|\psi(a_{n,j}) - v_1v_2\cdots v_n\varphi(a_{n,j})v_n^*\cdots v_2^*v_1^*\| &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \|\psi_m(a_{n,j}) - \psi_{m-1}(a_{n,j})\| \\ &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \|v_m\varphi(a_{n,j})v_m^* - \varphi(a_{n,j})\| \\ &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \|v_m\varphi(a_{n,j}) - \varphi(a_{n,j})v_m\| \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m} \\ &= 2^{-n}.\end{aligned}$$

Dvs.

$$\begin{aligned}\|b_j - \psi(a_{n,j})\| &= \|b_j - (\psi(a_{n,j}) - v_1v_2\cdots v_n\varphi(a_{n,j})v_n^*\cdots v_2^*v_1^*) - v_1v_2\cdots v_n\varphi(a_{n,j})v_n^*\cdots v_2^*v_1^*\| \\ &\leq \|b_j - v_1v_2\cdots v_n\varphi(a_{n,j})v_n^*\cdots v_2^*v_1^*\| + \|\psi(a_{n,j}) - v_1v_2\cdots v_n\varphi(a_{n,j})v_n^*\cdots v_2^*v_1^*\| \\ &\leq \|v_1v_2\cdots v_n(v_n^*\cdots v_2^*v_1^*b_jv_1v_2\cdots v_n - \varphi(a_{n,j}))v_n^*\cdots v_2^*v_1^*\| + 2^{-n} \\ &= \|v_n^*\cdots v_2^*v_1^*b_jv_1v_2\cdots v_n - \varphi(a_{n,j})\| \\ &\leq \frac{1}{n} + 2^{-n}.\end{aligned}$$

Dette giver, at $\{b_1, b_2, b_3, \dots\} \subseteq \psi(A)$, da $\psi(A)$ er afsluttet. Men $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ er en tæt delmængde i B, så $\psi(A) = B$. □

Vi er nu i stand til at vise de betingelser, der giver, at A er isomorf med $A\otimes B$ for en separabel C^*-algebra A og en separabel og unital C^*-algebra B. Denne sætning vil vi få brug for flere gange i specialet, bl.a. i Kapitel 4 og Kapitel 5. Til beviset får vi brug for resultater vedrørende grænse-algebraer, som findes i Appendix.

Sætning 2.4.2. [14] *Lad A være en separabel C^*-algebra og lad B være en unital og separabel C^*-algebra. Da er A *-isomorf med $A \otimes B$, hvis*

[14][KR02, Theorem 8.2]

(i) *der findes en følge* $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ *af unitale injektive* **-homomorfier* $\varphi_n : B \mapsto \mathcal{M}(A)$*, som opfylder, at*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(b)a - a\varphi_n(b)\| = 0$$

for alle $a \in A$ *og alle* $b \in B$*, og*

(ii) *de to* **-homomorfier* $\alpha, \beta : B \mapsto B \otimes B$ *givet ved* $\alpha(b) = b \otimes 1_B$ *og* $\beta(b) = 1_B \otimes b$*,* $b \in B$*, er approksimativt unitært ækvivalente. (Dvs. B har approksimativt indre halvflip.)*

Bevis. Da A og B er separable, er C^*-algebraen $A \otimes B$ også separabel, da det algebraiske tensorprodukt $A \odot B$ er en tæt delmængde i $A \otimes B$. Lad $\varphi : A \mapsto A \otimes B$ være givet ved $\varphi(a) = a \otimes 1_B$. Da er φ en injektiv *-homomorfi, og vi skal vise, at der findes en følge $(v_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $\mathcal{M}(A \otimes B)$, så $\lim_{n\to\infty} \|v_n\varphi(a) - \varphi(a)v_n\| = 0$ og $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(v_n^* c v_n, \varphi(A)) = 0$ for alle $a \in A$ og alle $c \in A \otimes B$. Heraf følger jvf. Sætning 2.4.1, at A er *-isomorf med $A \otimes B$.

Det er tilstrækkeligt for enhver endelig delmængde $F \subseteq A$, enhver endelig delmængde $G \subseteq B$ og ethvert $\varepsilon > 0$, at finde en unitær $v \in \mathcal{M}(A \otimes B)$, så

$$\|v\varphi(a) - \varphi(a)v\| \le \varepsilon \qquad \text{og} \qquad \operatorname{dist}(v^*(a \otimes b)v, \varphi(A)) \le \varepsilon, \tag{2.3}$$

for alle $a \in F$ og alle $b \in G$.

Thi, vælg tætte delmængder $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq A$ og $\{b_1, b_2, b_3, \dots\} \subseteq B$. Hvis (2.3) gælder findes for ethvert $n \in \mathbb{N}$ en unitær $v_n \in \mathcal{M}(A \otimes B)$, så

$$\|v_n\varphi(a_j) - \varphi(a_j)v_n\| \le \frac{1}{n},\ j = 1, \dots, n \quad \text{og} \quad \operatorname{dist}(v_n^*(a_i \otimes b_j)v_n, \varphi(A)) \le \frac{1}{n},\ i, j = 1, \dots, n.$$

For ethvert $a \in A$ findes $j \in \mathbb{N}$, så $\|a - a_j\| \le \frac{1}{n}$. Endvidere gælder, at $\operatorname{span}\{a_i \otimes b_j : i, j \in \mathbb{N}\}$ er en tæt delmængde i $A \otimes B$, så for hvert $c \in A \otimes B$ og for alle $n \in \mathbb{N}$ eksisterer $d_m \in \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $f_m \in \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ og $M \in \mathbb{N}$, så $\left\|c - \sum_{m=1}^M (d_m \otimes f_m)\right\| \le \frac{1}{n}$.
Så ved at vælge $n \in \mathbb{N}$ tilpas stort fås,

$$\begin{aligned}
\|v_n\varphi(a) - \varphi(a)v_n\| &\le \|v_n\varphi(a) - v_n\varphi(a_j)\| + \|v_n\varphi(a_j) - \varphi(a_j)v_n\| + \|\varphi(a_j)v_n - \varphi(a)v_n\| \\
&\le \|\varphi(a - a_j)\| + \frac{1}{n} + \|\varphi(a_j - a)\| \\
&\le 2\|a - a_j\| + \frac{1}{n} \\
&= \frac{3}{n}
\end{aligned}$$

og der findes $a_m \in A$, så $\|v_n^*(d_m \otimes f_m)v_n - \varphi(a_m)\| \le \frac{1}{n}$ for $m = 1, \dots, M$.
Dvs.

$$\begin{aligned}
&\left\|v_n^* c v_n - \varphi\left(\sum_{m=1}^M a_m\right)\right\| \\
&\le \left\|v_n^* c v_n - v_n^* \sum_{m=1}^M (d_m \otimes f_m)\, v_n\right\| + \left\|v_n^* \sum_{m=1}^M (d_m \otimes f_m)\, v_n - \sum_{m=1}^M \varphi(a_m)\right\| \\
&\le \left\|v_n^*\left(c - \sum_{m=1}^M (d_m \otimes f_m)\right) v_n\right\| + \sum_{m=1}^M \|v_n^*(d_m \otimes f_m)v_n - \varphi(a_m)\| \\
&\le \frac{M+1}{n}.
\end{aligned}$$

Dermed eksisterer en følge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i $\mathcal{M}(A \otimes B)$, så $\lim_{n\to\infty} \|v_n\varphi(a) - \varphi(a)v_n\| = 0$ og $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(v_n^* c v_n, \varphi(A)) = 0$ for alle $a \in A$ og alle $c \in A \otimes B$.

Lad $\alpha_n : B \mapsto \mathcal{M}(A \otimes B)$ være givet ved $\alpha_n(b) = \varphi_n(b) \otimes 1_B$, og lad $\pi_\infty : l^\infty(\mathcal{M}(A \otimes B)) \mapsto \mathcal{M}(A \otimes B)_\infty$ være kvotientafbildningen. Følgen $(\alpha_n(b))_{n=1}^{\infty}$ er begrænset, da φ_n er normformindskende. Så vi kan nu definere $\hat{\alpha} : B \mapsto \mathcal{M}(A \otimes B)_\infty$ ved

$$\hat{\alpha}(b) = \pi_\infty((\alpha_n(b))_{n\in\mathbb{N}}), \quad b \in B.$$

Lad $\delta : \mathcal{M}(A \otimes B) \mapsto l^\infty(\mathcal{M}(A \otimes B))$ være *-homomofien givet ved,

$$\delta(c) = (c, c, c, \dots), \quad c \in \mathcal{M}(A \otimes B).$$

Af (i) fås, at der for alle $a \in A$ og alle $b \in B$ gælder, at

$$\begin{aligned}
&\|\hat{\alpha}(b)(\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a)) - (\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a))\hat{\alpha}(b)\| \\
&= \|\pi_\infty((\alpha_n(b))_{n\in\mathbb{N}})(\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a)) - (\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a))\pi_\infty((\alpha_n(b))_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\alpha_n(b)\varphi(a) - \varphi(a)\alpha_n(b)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|(\varphi_n(b) \otimes 1_B)(a \otimes 1_B) - (a \otimes 1_B)(\varphi_n(b) \otimes 1_B)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n(b)a \otimes 1_B - a\varphi_n(b) \otimes 1_B\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n(b)a - a\varphi_n(b)\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dette giver hermed, at ethvert element i $(\pi_\infty \circ \delta \circ \varphi)(A)$ kommuterer med ethvert element i $\hat{\alpha}(B)$.

Lad $\hat{\beta} : B \mapsto \mathcal{M}(A \otimes B)_\infty$ være givet ved

$$\hat{\beta}(b) = (\pi_\infty \circ \delta)(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b), \quad b \in B.$$

Det er klart, at billedet af $\hat{\beta}$ kommuterer med billedet af $(\pi_\infty \circ \delta \circ \varphi)$. Endvidere kommuterer billedet af $\hat{\alpha}$ med billedet af $\hat{\beta}$, idet der for alle $b_1, b_2 \in B$ gælder,

$$\begin{aligned}
&\|\hat{\alpha}(b_1)\hat{\beta}(b_2) - \hat{\beta}(b_2)\hat{\alpha}(b_1)\| \\
&= \|\pi_\infty((\alpha_n(b_1))_{n\in\mathbb{N}})(\pi_\infty \circ \delta)(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b_2) - (\pi_\infty \circ \delta)(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b_2)\pi_\infty((\alpha_n(b_1))_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\alpha_n(b_1)(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b_2) - (1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b_2)\alpha_n(b_1)\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vi vil nu vise, at C^*-algebraen $D_0 = C^*(\hat{\alpha}(B), \hat{\beta}(B))$ genereret af $\hat{\alpha}(B)$ og $\hat{\beta}(B)$ er *-isomorf med $B \otimes B$.

Da $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : B \mapsto D_0$ er *-homomorfier, så ethvert element i $\hat{\alpha}(B)$ kommuterer med ethvert element i $\hat{\beta}(B)$, findes en entydig *-homomorfi $\psi : B \otimes_{\max} B \mapsto D_0$, så

$$\psi(b_1 \otimes b_2) = \hat{\alpha}(b_1)\hat{\beta}(b_2), \quad b_1, b_2 \in B. \tag{2.4}$$

[Mur90, Theorem 6.3.7]. Men B er nukleær jvf. Sætning 2.3.5 (i), så $B \otimes_{\max} B = B \otimes B$, og $\psi : B \otimes B \mapsto D_0$ er surjektiv jvf. (2.4). Vi mangler således, at vise, at ψ er injektiv.

Takesakis Sætning (Sætning 2.1.3) giver, at $B \otimes B$ er simpel, da B er simpel (Sætning 2.3.5 (ii)). Så da $\ker \psi$ er et lukket to-sidet ideal i $B \otimes B$, og ψ er unital fås, at ψ er injektiv.

Hermed er vist, at D_0 er *-isomorf med $B \otimes B$, så af (ii) findes for ethvert $\varepsilon > 0$ en unitær $w \in D_0$, så $\|w^*\hat{\beta}(b)w - \hat{\alpha}(b)\| = \|w^*\psi(\beta(b))w - \psi(\alpha(b))\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$ for alle $b \in B$, hvor $C = \max\{\|a\| : a \in F\}$. Da $w \in D_0$ vil w kommutere med alle elementer i $(\pi_\infty \circ \delta \circ \varphi)(A)$. Dette giver, at

$$w^*(\pi_\infty \circ \delta)(a \otimes b)w = w^*(\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a))(\hat{\beta}(b))w = (\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a))w^*\hat{\beta}(b)w$$

for $a \in A$ og $b \in B$. C^*-algebraen D_0 er en del-C^*-algebra af $\mathcal{M}(A \otimes B)_\infty$. Så Lemma A.1.15 giver eksistensen af en følge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af unitære i $\mathcal{M}(A \otimes B)$, så $w = \pi_\infty((w_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Dvs.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|w_n\varphi(a) - \varphi(a)w_n\| &= \|\pi_\infty((w_n\varphi(a))_{n\in\mathbb{N}}) - \pi_\infty((\varphi(a)w_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \|w(\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a)) - (\pi_\infty \circ \delta)(\varphi(a))w\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$. Tilsvarende fås,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup \|w_n^*(a \otimes b)w_n - \varphi(a)w_n^*(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b)w_n\| = 0 \text{ og} \\
&\lim_{n\to\infty} \sup \|w_n^*(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b)w_n - \alpha_n(b)\| = \|w^*\hat{\beta}(b)w - \hat{\alpha}(b)\| \leq \frac{\varepsilon}{2C},
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$ og alle $b \in B$.
Der findes altså et $n \in \mathbb{N}$, så

$$\begin{aligned}
&\|w_n\varphi(a) - \varphi(a)w_n\| \leq \varepsilon, \quad \|w_n^*(a \otimes b)w_n - \varphi(a)w_n^*(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b)w_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{og} \\
&\|w_n^*(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b)w_n - \alpha_n(b)\| \leq \frac{\varepsilon}{2C},
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$ og alle $b \in B$.

Betragt nu $a \in F$ og $b \in G$. Da er

$$\|w_n\varphi(a) - \varphi(a)w_n\| \leq \varepsilon \quad \text{og} \quad \|w_n^*(a \otimes b)w_n - \varphi(a)\alpha_n(b)\| \leq \varepsilon.$$

Den sidste ulighed følger, idet

$$\begin{aligned}
\|w_n^*(a \otimes b)w_n - \varphi(a)\alpha_n(b)\| &\leq \|w_n^*(a \otimes b)w_n - \varphi(a)w_n^*(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b)w_n\| \\
&\quad + \|\varphi(a)w_n^*(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b)w_n - \varphi(a)\alpha_n(b)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\varphi(a)\|\|w_n^*(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes b)w_n - \alpha_n(b)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|a\|\frac{\varepsilon}{2C} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{2C} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ovenstående uligheder gælder altså for mindst ét $n \in \mathbb{N}$, og elementet $\varphi(a)\alpha_n(b) = (a \otimes 1_B)(\varphi_n(b) \otimes 1_B) = a\varphi_n(b) \otimes 1_B \in A \otimes 1_B = \varphi(A)$. Så (2.3) er opfyldt med $v = w_n$. □

Kapitel 3

Klassifikation af selv-absorberende UHF-algebraer

I afsnit 3.1 vil vi give et eksempel på en C^*-algebra, der har indre flip, nemlig matrixalgebraen $M_n(\mathbb{C})$, og vi skal for $M_2(\mathbb{C})$ give en konkret definition af det unitære element, der inducerer det indre flip på $M_2(\mathbb{C})$. I afsnit 3.2 skal vi vise, at UHF-algebraer har approksimativt indre halvflip, og vi skal i 3.3 give betingelser for, hvornår UHF-algebraer er selv-absorberende. Herefter vil vi i 3.4 give en kort indtroduktion til det uendelige tensorprodukt, som skal benyttes til at vise, at visse UHF-algebraer B opfylder, at $B \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$.

3.1 En C^*-algebra med indre flip

Definition 3.1.1. Lad B være en separabel C^*-algebra. Da siges B at have indre flip, hvis der findes en unitær $u \in \mathcal{M}(B \otimes B)$, så

$$u(x \otimes y)u^* = y \otimes x$$

for alle $x, y \in B$.

Eksempel 3.1.2. For hvert $n \in \mathbb{N}$ har C^*-algebraen $B = M_n(\mathbb{C})$ indre flip.

Bevis. Lad $(e_{ij})_{i,j=1}^{n}$ være matrixenhederne for B og sæt $U = \sum_{i,j=1}^{n}(e_{ij} \otimes e_{ji}) \in B \otimes B$. Da er

$$U^* = \sum_{i,j=1}^{n}(e_{ij}^* \otimes e_{ji}^*) = \sum_{i,j=1}^{n}(e_{ji} \otimes e_{ij}),$$

og der gælder, at

$$U^*U = \left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{ji} \otimes e_{ij}\right)\left(\sum_{h,k=1}^{n} e_{hk} \otimes e_{kh}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{h,k=1}^{n}(e_{ji}e_{hk} \otimes e_{ij}e_{kh}).$$

Men

$$e_{ji}e_{hk} = \begin{cases} e_{jk}, & i = h \\ 0, & i \neq h. \end{cases}$$

Tilsvarende er $e_{ij}e_{kh} = e_{ih}$, hvis $j = k$ og ellers nul. Dvs.

$$U^*U = \sum_{j=1}^{n} e_{jj} \otimes \sum_{i=1}^{n} e_{ii} = 1_B \otimes 1_B = 1_{B\otimes B}.$$

Analogt fås, at $UU^* = 1_{B\otimes B}$, så U er et unitært element i $B \otimes B$. Vi skal nu vise, at $U(x \otimes y)U^* = y \otimes x$ for $x, y \in B$. Idet e_{pq} og e_{rs} er to matrixenheder i B fås,

$$\begin{aligned} U(e_{pq} \otimes e_{rs})U^* &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes e_{ji}\right)(e_{pq} \otimes e_{rs})\left(\sum_{h,k=1}^{n} e_{kh} \otimes e_{hk}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{n} e_{ij}e_{pq}e_{kh} \otimes e_{ji}e_{rs}e_{hk}. \end{aligned}$$

Da

$$e_{pq}e_{kh} = \begin{cases} e_{ph}, & k = q \\ 0, & k \neq q \end{cases}$$

fås, at

$$e_{ij}e_{pq}e_{kh} = \begin{cases} e_{ih}, & k = q, j = p \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Tilsvarende er,

$$e_{ji}e_{rs}e_{hk} = \begin{cases} e_{jk}, & h = s, i = r \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Så $U(e_{pq} \otimes e_{rs})U^* = e_{rs} \otimes e_{pq}$. Eftersom B er det lineære span af matrixenhederne, gælder altså for vilkårlige elementer $x, y \in B$, at

$$U(x \otimes y)U^* = y \otimes x,$$

hvilket betyder, at B har indre flip. $\square$

Eksempel 3.1.3. Lad nu $B = M_2(\mathbb{C})$. Fra Eksempel 3.1.2 gælder at B har indre flip, hvor $U = \sum_{i,j=1}^{2}(e_{ij} \otimes e_{ji}) \in B \otimes B$ giver,

$$U(x \otimes y)U^* = y \otimes x,$$

for alle $x, y \in B$, hvor $(e_{ij})_{i,j=1}^{2}$ er matrixenhederne for B. Vi vil nu give en eksplicit beskrivelse af det unitære element $U \in B \otimes B$.
Jvf. [KR86b, Eksempel 11.1.5] er $B \otimes B \cong M_4(\mathbb{C})$, hvor en isomorfi $\varphi : B \otimes B \mapsto M_4(\mathbb{C})$ er givet ved

$$\varphi(x \otimes y) = \begin{pmatrix} y_{11}x & y_{12}x \\ y_{21}x & y_{22}x \end{pmatrix}, \quad x \in B,\ y = (y_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in B.$$

Dvs.,

$$e_{11} \otimes e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} \otimes e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{21} \otimes e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad e_{22} \otimes e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Så

$$U = \sum_{i,j=1}^{2} (e_{ij} \otimes e_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 En C^*-algebra med approksimativt indre halvflip

I det følgende vil vi arbejde os frem mod at give et eksempel på en C^*-algebra, der har approksimativt indre halvflip. Vi skal vise, at en UHF-algebra er en C^*-algebra, der har approksimativt indre halvflip, men før vi kan give et bevis herfor, får vi brug for nogle indledende sætninger.

Definition 3.2.1. En AF-algebra er en C^*-algebra, som er en induktiv grænse af en induktiv følge af endeligt dimensionale C^*-algebraer.

Definition 3.2.2. En UHF-algebra A er en C^*-algebra, som er isomorf med den induktive grænse af en induktiv følge på formen

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

hvor de forbindende *-homomorfier er injektive og unitale, og hvor $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ er en følge af naturlige tal, som opfylder, at $k_i | k_{i+1}$.

Hvis $\{p_1, p_2, p_2, \dots\}$ er mængden af positive primtal, der er ordnet i voksende rækkefølge og k_i skrives på formen

$$k_i = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_{i,j}}, \quad n_{i,j} \in \mathbb{N},$$

da er det supernaturlige tal $n(A) = \{(n(A))_j\}_{j=1}^{\infty}$, der er associeret til A givet ved,

$$(n(A))_j = \sup\{n_{i,j} : i \in \mathbb{N}\}.$$

Af [MRL, Theorem 7.4.5] fås at to UHF-algebraer er isomorfe, hvis og kun hvis deres associerede supernaturlige tal er ens.

Ofte vil vi skrive $n(A)$ som en uendelig primtalsfaktorisering, hvor $n(A)_j$ er potensen af primtallet p_j. Dvs.

$$n(A) = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n(A)_j}.$$

Sætning 3.2.3. *Hvis A og B er AF-algebraer (UHF-algebraer), da er $A \otimes B$ en AF-algebra (UHF-algebra).*

Bevis. Lad A, B være AF-algebraer, dvs. $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty})$ er den induktive grænse af en induktiv følge

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

af endeligt dimensionale C^*-algebraer $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vi kan uden tab af generalitet antage, at $\varphi_n : A_n \mapsto A_{n+1}$ er injektiv for alle $n \in \mathbb{N}$. Dvs. $\mu_n : A_n \mapsto A$ er injektiv for alle $n \in \mathbb{N}$ jvf. [KR86b, Proposition 11.4.1].
(Ellers sættes $D_n = A_n/\ker(\mu_n)$ og lad $\pi_n : A_n \mapsto D_n$ være kvotientafbildningen. Dvs. D_n er endeligt dimensional for alle $n \in \mathbb{N}$, og da $\ker(\pi_n) = \ker(\pi_{n+1} \circ \varphi_n)$ fås af første homomorfisætning injektive *-homomorfier $\xi_n : D_n \mapsto D_{n+1}$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi_1"] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] & \cdots \arrow[r] & A \\
D_1 \arrow[r, "\xi_1"] & D_2 \arrow[r, "\xi_2"] & D_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

hvor $(D, \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty})$ er den induktive grænse af $\{D_n, \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Hermed er $\lambda_n \circ \pi_n : A_n \mapsto D$ er en *-homomorfi, der giver følgende kommuterende diagram

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\lambda_n \circ \pi_n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\lambda_{n+1} \circ \pi_{n+1}"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Dvs. der findes en entydig *-homomorfi $\pi : A \mapsto B$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi_1"] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[d, dashed, "\pi"] \\
D_1 \arrow[r, "\xi_1"] & D_2 \arrow[r, "\xi_2"] & D_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Der gælder, at

$$D = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(D_n)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\pi_n(A_n))} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \circ \pi_n)(A_n)},$$

så π er surjektiv. Endvidere er π injektiv, da $\ker(\lambda_n \circ \pi_n) \subseteq \ker(\mu_n)$, idet λ_n er injektiv [KR86b, Proposition 11.4.1]. Så $A \cong D$.)

Lad $(B, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty})$ være den induktive grænse af den induktive følge

$$B_1 \xrightarrow{\psi_1} B_2 \xrightarrow{\psi_2} B_3 \xrightarrow{\psi_3} \cdots$$

af endeligt dimensionale C^*-algebraer $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, hvor de forbindende homomorfier antages at være injektive.
For ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes en entydig injektiv *-homomorfi $\varphi_n \otimes \psi_n : A_n \otimes B_n \mapsto A_{n+1} \otimes B_{n+1}$ og vi skal vise, at $(A \otimes B, \{\mu_n \otimes \gamma_n\}_{n=1}^{\infty})$ er isomorf med den induktive grænse $(C, \{\rho_n\}_{n=1}^{\infty})$ af

$$A_1 \otimes B_1 \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \psi_1} A_2 \otimes B_2 \xrightarrow{\varphi_2 \otimes \psi_2} A_3 \otimes B_3 \xrightarrow{\varphi_3 \otimes \psi_3} \cdots$$

For alle $n \in \mathbb{N}$ er $\mu_n : A_n \mapsto A$, $\gamma_n : B_n \mapsto B$ injektive *-homomorfier jvf. [KR86b, Proposition 11.4.1], så der findes en entydig injektiv *-homomorfi $\mu_n \otimes \gamma_n : A_n \otimes B_n \mapsto A \otimes B$, og

$$(\mu_{n+1} \otimes \gamma_{n+1}) \circ (\varphi_n \otimes \psi_n) = (\mu_{n+1} \circ \varphi_n) \otimes (\gamma_{n+1} \circ \psi_n) = \mu_n \otimes \gamma_n.$$

Jvf. [KR86b, Proposition 11.4.1] findes hermed en injektiv *-homomorfi $\theta : C \mapsto A \otimes B$, så $\mu_n \otimes \gamma_n = \theta \circ \rho_n$.
Endvidere er $A \otimes B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n) \otimes \gamma_n(B_n)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mu_n \otimes \gamma_n)(A_n \otimes B_n)}$, hvilket medfører, at θ er surjektiv. Hermed er vist, at $A \otimes B$ er isomorf med den induktive grænse af

$$A_1 \otimes B_1 \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \psi_1} A_2 \otimes B_2 \xrightarrow{\varphi_2 \otimes \psi_2} A_3 \otimes B_3 \xrightarrow{\varphi_3 \otimes \psi_3} \cdots$$

Eftersom A_n og B_n er endeligt dimensionale for alle $n \in \mathbb{N}$ er $A_n \otimes B_n$ en endeligt dimensional C^*-algebra for alle $n \in \mathbb{N}$.
Dette gælder, idet der findes positive heltal $n_1, \ldots, n_k$ og $m_1, \ldots, m_p$, så A_n er *-isomorf med $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ og B_n er *-isomorf med $M_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{m_p}(\mathbb{C})$ jvf. [Mur90, Theorem 6.3.8]. Så da

$$\begin{aligned} A_n \otimes B_n &\cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \otimes B_n \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \otimes B_n \\ &\cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_1}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_p}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_p}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

og $M_{n_p}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_q}(\mathbb{C}) \cong M_{n_p m_q}(\mathbb{C})$ [KR86b, Eksempel 11.1.5], fås heraf at $A_n \otimes B_n$ er endeligt dimensional. Dvs. $A \otimes B$ er en AF-algebra.

Lad A og B være UHF-algebraer og antag, at A er den induktive grænse af den induktive følge

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

hvor de forbindende *-homomorfier er injektive og unitale, og hvor $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ er en følge af naturlige tal, som opfylder, at $k_i | k_{i+1}$. Lad tilsvarende B være den induktive grænse af den induktive følge

$$M_{m_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_1} M_{m_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_2} M_{m_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_3} \cdots,$$

hvor $m_i | m_{i+1}$ og $\psi_i : M_{m_i}(\mathbb{C}) \mapsto M_{m_{i+1}}(\mathbb{C})$ er injektiv og unital. Hermed er C^*-algebraen $A \otimes B$ isomorf med den induktive grænse af den induktive følge

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \psi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2 \otimes \psi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3 \otimes \psi_3} \cdots.$$

Lad $\gamma_i : M_{k_i}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_i}(\mathbb{C}) \mapsto M_{k_i m_i}(\mathbb{C})$ være den naturlige *-isomorfi, der er givet ved,

$$\gamma_i(a \otimes b) = \begin{pmatrix} b_{11}a & b_{12}a & \ldots & b_{1m_i}a \\ b_{21}a & b_{22}a & \ldots & b_{2m_i}a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m_i 1}a & b_{m_i 2}a & \ldots & b_{m_i m_i}a \end{pmatrix},$$

for $a \in M_{k_i}(\mathbb{C})$, $b = (b_{rs})_{r,s=1}^{m_i} \in M_{m_i}(\mathbb{C})$, og definer $\lambda_i : M_{k_i m_i}(\mathbb{C}) \mapsto M_{k_{i+1} m_{i+1}}(\mathbb{C})$ ved

$$\lambda_i = \gamma_{i+1} \circ (\varphi_i \otimes \psi_i) \circ \gamma_i^{-1}.$$

Da er $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ en følge af unitale, injektive *-homomorfier, der giver følgende kommuterende diagram:

$$\begin{tikzcd} M_{k_1}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_1}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_1 \otimes \psi_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & M_{k_2}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_2}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_2 \otimes \psi_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & M_{k_3}(\mathbb{C}) \otimes M_{m_3}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi_3 \otimes \psi_3"] \arrow[d, "\gamma_3"] & \cdots \\ M_{k_1 m_1}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\lambda_1"] & M_{k_2 m_2}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\lambda_2"] & M_{k_3 m_3}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\lambda_3"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Så $A \otimes B$ er isomorf med den induktive grænse af den induktive følge

$$M_{k_1 m_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_1} M_{k_2 m_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_2} M_{k_3 m_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_3} \cdots .$$

Dvs. $A \otimes B$ er en UHF-algebra, idet $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ er en følge af unitale injektive *-homomorfier og $k_i m_i | k_{i+1} m_{i+1}$ for alle $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Lemma 3.2.4. *Lad A og B være UHF-algebraer og lad $\varphi, \psi : A \mapsto B$ være unitale *-homomorfier. Da er $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.*

Bevis. Lad H, G være undergrupper af den additive gruppe $\mathbb{Q}$, og lad $1 \in H$ og $1 \in G$. Antag, at $\alpha, \beta : H \mapsto G$ er gruppehomomorfier med $\alpha(1) = 1 = \beta(1)$.
Ethvert $x \in H$ kan skrives på formen $x = \frac{p}{q}$ for $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, og $1 = q\frac{1}{q}$. Heraf fås,

$$q\alpha\left(\frac{1}{q}\right) = \alpha(1) = \beta(1) = q\beta\left(\frac{1}{q}\right).$$

Dette giver, $\alpha(\frac{1}{q}) = \beta(\frac{1}{q})$. Dvs.

$$\alpha(x) = \alpha\left(\frac{p}{q}\right) = p\alpha\left(\frac{1}{q}\right) = p\beta\left(\frac{1}{q}\right) = \beta(x).$$

Så $\alpha = \beta$.
Lad $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$ og $m = (m_j)_{j=1}^{\infty}$ være de supernaturlige tal associeret til hhv. A og B. Da er $(K_0(A), [1]_0) \cong (Q(n), 1)$ og $(K_0(B), [1]_0) \cong (Q(m), 1)$ [MRL, Lemma 7.4.4], hvor $Q(n)$ er undergruppen af $(\mathbb{Q}, +)$ bestående af alle brøker $\frac{x}{y}$, hvor x er et vilkårligt helt tal og $y = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{r_j}$ for positive heltal $r_j \leq n_j$. Så da $K_0(\varphi), K_0(\psi) : K_0(A) \mapsto K_0(B)$ er gruppehomomorfier med $K_0(\varphi)([1]_0) = [1]_0 = K_0(\psi)([1]_0)$, giver ovenstående, at $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$. $\square$

Lemma 3.2.5. *Lad A og B være unitale AF-algebraer, og lad $\varphi, \psi : A \mapsto B$ være unitale *-homomorfier med $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$. Da findes en følge $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i B, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^* \varphi(a) u_n - \psi(a)\| = 0$$

for alle $a \in A$.

Bevis. Da A er en unital AF-algebra findes en voksende følge af endeligt dimensionale del-C^*-algebraer $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ i A med $1_{A_n} = 1_A$ og $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A$.
Lad for ethvert $n \in \mathbb{N}$, $\iota_n : A_n \mapsto A$ være inklusionsafbildningen. Dvs.

$$K_0(\varphi \circ \iota_n) = K_0(\varphi) \circ K_0(\iota_n) = K_0(\psi) \circ K_0(\iota_n) = K_0(\psi \circ \iota_n).$$

Eftersom B er en AF-algebra, har B kancelleringsegenskaben, så [MRL, Lemma 7.3.2] giver eksistensen af en unitær $u_n \in B$, så

$$\psi(a) = u_n^* \varphi(a) u_n \quad \text{for alle} \quad a \in A_n.$$

For $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ findes et $n \in \mathbb{N}$, så $a \in A_n$. Dvs.

$$\psi(a) = u_m^* \varphi(a) u_m \quad \text{for alle} \quad m \geq n.$$

Lad nu $a \in A$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes et $n \in \mathbb{N}$ og $a' \in A_n$, så $\|a - a'\| < \frac{\varepsilon}{2}$. For $m \geq n$ fås,

$$\|\psi(a) - u_m^* \varphi(a) u_m\| \leq \|\psi(a) - \psi(a')\| + \|u_m^* \varphi(a') u_m - u_m^* \varphi(a) u_m\| \leq 2\|a - a'\| < \varepsilon.$$

Dvs. $\lim_{n\to\infty} u_n^* \varphi(a) u_n = \psi(a)$ for alle $a \in A$. □

Vi er nu i stand til at vise, at en UHF-algebra har approksimativt indre halvflip.

Eksempel 3.2.6. En UHF-algebra B har approksimativt indre halvflip.

Bevis. C^*-algebraen $B \otimes B$ er også en UHF-algebra jvf. Sætning 3.2.3. Lad $\alpha, \beta : B \mapsto B \otimes B$ være givet ved,

$$\alpha(b) = b \otimes 1_B \quad \text{og} \quad \beta(b) = 1_B \otimes b, \; b \in B.$$

Da er α og β unitale *-homomorfier, så $K_0(\alpha) = K_0(\beta)$ jvf. Lemma 3.2.4. Af Lemma 3.2.5 findes en følge $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i $B \otimes B$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^* \alpha(b) u_n - \beta(b)\| = 0$$

for alle $b \in B$. □

3.3 Selv-absorberende UHF-algebraer

En C^*-algebra B kaldes selv-absorberende, hvis $B \cong B \otimes B$. Vi skal nu give en klassifikation af de UHF-algebraer B, der opfylder, at $B \cong B \otimes B \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$. Til klassifikationen benyttes UHF-algebraernes associerede supernaturlige tal. Så hvis A og B er UHF-algebraer, skal vi som det første finde det supernaturlige tal associeret til $A \otimes B$ vha. de supernaturlige tal associeret til A og B.

Sætning 3.3.1. *Lad A og B være UHF-algebraer med associerede supernaturlige tal hhv. $n(A)$ og $n(B)$. Da er det supernaturlige tal $n(A \otimes B)$ associeret til UHF-algebraen $A \otimes B$ givet ved,*

$$n(A \otimes B) = n(A)n(B).$$

Bevis. Antag A og B er induktive grænser af de induktive følger

$$M_{k_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_1} M_{k_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} M_{k_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

hhv.

$$M_{m_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_1} M_{m_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_2} M_{m_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_3} \cdots,$$

hvor de forbindende *-homomorfier er injektive og unitale, og hvor $k_i | k_{i+1}$ samt $m_i | m_{i+1}$ for alle $i \in \mathbb{N}$.

Jvf. beviset for Sætning 3.2.3 er $A \otimes B$ isomorf med den induktive grænse af den induktive følge

$$M_{k_1m_1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_1} M_{k_2m_2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_2} M_{k_3m_3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_3} \cdots .$$

Skriv $k_i = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_{i,j}}$, $n_{i,j} \in \mathbb{N}$ og $m_i = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{r_{i,j}}$, $r_{i,j} \in \mathbb{N}$. Dvs. $k_i m_i = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_{i,j}+r_{i,j}}$, så det supernaturlige tal $n(A \otimes B) = \{(n(A \otimes B))_j\}_{j=1}^{\infty}$ associeret til $A \otimes B$ er givet ved

$$(n(A \otimes B))_j = \sup\{n_{i,j} + r_{i,j} : i \in \mathbb{N}\} = (n(A))_j + (n(B))_j.$$

Hermed er $n(A \otimes B) = n(A)n(B)$. □

Sætning 3.3.2. *Antag at B er en UHF-algebra. Da er $B \cong B \otimes B$, hvis og kun hvis det supernaturlige tal $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$ associeret til B opfylder, at $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$, hvor $n_j \neq 0$ for mindst ét $j \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Antag $n = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_j}$, $n_j \in \mathbb{N}$ og $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ er den ordnede mængde af positive primtal. Da er

$$n^2 = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{2n_j}$$

det supernaturlige tal associeret til UHF-algebraen $B \otimes B$. Af [MRL, Theorem 7.4.5] er to UHF-algebraer isomorfe, hvis og kun hvis deres associerede supernaturlige tal er ens. Heraf er $B \cong B \otimes B$, hvis og kun hvis $n = n^2$, hvilket betyder, at $n_j = 2n_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Dvs. $B \cong B \otimes B$, hvis og kun hvis $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Hvis $n_j = 0$ for alle $j \in \mathbb{N}$, er B ikke en UHF-algebra, så der findes mindst ét $j \in \mathbb{N}$, så $n_j \neq 0$. □

3.4 Uendelige tensorprodukter

Vi skal nu definere det uendelige tensorprodukt af en uendelig familie af unitale C^*-algebraer. Lad $\{A_a : a \in \mathbb{A}\}$ være en familie af unitale C^*-algebraer. Mængden $\mathbb{F}$ af alle endelige delmængder i $\mathbb{A}$ er ordnet med inklusion, og for ethvert $F \in \mathbb{F}$, sættes $A_F = \bigotimes_{a \in F} A_a$.
Dvs. A_F er en C^*-algebra, da det minimale tensorprodukt af en endelig familie af C^*-algebraer er en C^*-algebra.

Hvis $F, G \in \mathbb{F}$ og $F \subseteq G$ fås pga. associativitet og kommutativitet af det minimale tensorprodukt en unital og injektiv *-homomorfi $\varphi_{G,F} : A_F \mapsto A_G$ givet ved

$$\varphi_{G,F}(a) = (a \otimes 1_{A_{G \setminus F}}), \quad a \in A_F.$$

Associativitet af det minimale tensorprodukt giver endvidere, at $\varphi_{H,F} = \varphi_{H,G} \circ \varphi_{G,F}$, når $F, G, H \in \mathbb{F}$ og $F \subseteq G \subseteq H$.
Heraf vil familien $\{A_F : F \in \mathbb{F}\}$ sammen med de unitale injektive *-homomorfier $\varphi_{G,F}$ danne en induktive følge af C^*-algebraer. Det uendelige tensorprodukt $\bigotimes_{a \in \mathbb{A}} A_a$ defineres som den induktive grænse af den induktive følge $(\{A_F\}_{F \in \mathbb{F}}, \{\varphi_{G,F}\})$, og er dermed en C^*-algebra. Endvidere er $\bigotimes_{a \in \mathbb{A}} A_a$ entydigt bestemt op til isomorfi af eksistensen af en injektiv *-homomorfi $\mu_F : A_F \mapsto \bigotimes_{a \in \mathbb{A}} A_a$, $F \in \mathbb{F}$, så

$$\mu_F = \mu_G \circ \varphi_{G,F}, \quad F, G \in \mathbb{F}, F \subseteq G,$$

og

$$\overline{\bigcup_{F\in\mathbb{F}} \mu_F(A_F)} = \bigotimes_{a\in\mathbb{A}} A_a.$$

Hvis A er en unital C^*-algebra giver ovenstående specielt, at $\bigotimes_{i=1}^{\infty} A$ er den induktive grænse af den induktive følge,

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes 1_A} A\otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_{A\otimes A}\otimes 1_A} A\otimes A\otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_{A\otimes A\otimes A}\otimes 1_A} \cdots$$

Definitionen af det uendelige tensorprodukt af en følge af C^*-algebraer, skal vi benytte til at vise, at $\bigotimes_{i=1}^{\infty} B_i$ er en UHF-algebra, hvis $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ er en følge af UHF-algebraer. Hvis B er en UHF-algebra, vil vi endvidere vise, at $B \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$, hvis og kun hvis det supernaturlige tal $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$ associeret til B opfylder, at $n_j \in \{0,\infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$.

Vi får nu brug for følgende sætning, som angives uden bevis.

Sætning 3.4.1. [1] *Hvis B er en separabel og unital C^*-algebra er følgende ækvivalente:*

(i) *B er en UHF-algebra.*

(ii) *For enhver endelig delmængde $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subseteq B$ og for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en unital del-C^*-algebra $A \subseteq B$, elementer $a_1, \ldots, a_n \in A$ og $k \in \mathbb{N}$, så*

$$A \cong M_k(\mathbb{C}) \quad \textit{og} \quad \|b_j - a_j\| \le \varepsilon, \textit{ for } 1 \le j \le n.$$

Ved hjælp af ovenstående sætning kan vi vise, at den induktive grænse af en induktiv følge af UHF-algebraer er en UHF-algebra.

Lemma 3.4.2. *Lad B være den induktive grænse af den induktive følge*

$$B_1 \xrightarrow{\varphi_1} B_2 \xrightarrow{\varphi_2} B_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \longrightarrow B\ ,$$

hvor $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ er en familie af UHF-algebraer og de forbindende *-homomorfier er unitale. Da er B en UHF-algebra.

Bevis. For alle $j \in \mathbb{N}$ findes en unital injektiv *-homomorfi $\mu_j : B_j \mapsto B$, så

$$B = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \mu_j(B_j)} = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j},$$

hvor $C_j = \mu_j(B_j)$. Dvs. $(C_j)_{j=1}^{\infty}$ en voksende følge af del-C^*-algebraer i B. Lad $b_1, b_2, \ldots, b_n$ være vilkårlige elementer i B og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes $m \in \mathbb{N}$ og elementer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C_m$, så

$$\|b_j - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad 1 \le j \le n.$$

[1] [KR86b, Theorem 12.1.9]

Men C_m er en UHF-algebra, hvilket medfører, at der findes en unital del-C^*-algebra $A \subseteq C_m \subseteq B$ og $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, samt $k \in \mathbb{N}$, så $A \cong M_k(\mathbb{C})$ og

$$\|x_j - a_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Heraf er

$$\|b_j - a_j\| \leq \|b_j - x_j\| + \|x_j - a_j\| < \varepsilon \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dvs. B er en UHF-algebra jvf. Sætning 3.4.1. □

Lemma 3.4.3. *Lad $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ være en familie af UHF-algebraer med associerede supernaturlige tal $(n(B_j))_{j=1}^{\infty}$, og lad $(B, \{\mu_j\}_{j=1}^{\infty})$ være den induktive grænse af den induktive følge*

$$B_1 \xrightarrow{\varphi_1} B_2 \xrightarrow{\varphi_2} B_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

hvor de forbindende *-homomorfier er unitale og injektive. Da er B en UHF-algebra med supernaturligt tal $n = \sup_j n(B_j)$.

Bevis. Lemma 3.4.2 giver, at B er en UHF-algebra. Lad for $j \in \mathbb{N}$, τ_j og τ være de entydige spor på hhv. B_j og B, og lad n være det supernaturlige tal associeret til B. Da er $K_0(\tau_j) : K_0(B_j) \mapsto Q(n(B_j))$ og $K_0(\tau) : K_0(B) \mapsto Q(n)$ gruppeisomorfier jvf. [MRL, Lemma. 7.4.4].
Af [MRL, Theorem 6.3.2] fås,

$$K_0(B) = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_0(\mu_j)(K_0(B_j)).$$

Så

$$\begin{aligned} Q(n) = K_0(\tau)(K_0(B)) &= K_0(\tau)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_0(\mu_j)(K_0(B_j)\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (K_0(\tau) \circ K_0(\mu_j))(K_0(B_j)) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} K_0(\tau \circ \mu_j)(K_0(B_j)) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} K_0(\tau_j)(K_0(B_j)) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} Q(n(B_j)). \end{aligned}$$

Dvs. $Q(n) = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{\frac{x}{y} \, : \, x \in \mathbb{Z}, \; y = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{m_{i,j}}, \; m_{i,j} \leq (n(B_j))_i\}$, hvor $\{p_1, p_2, \ldots\}$ er mængden af ordnede positive primtal. Heraf fås,

$$Q(n) = \left\{\frac{x}{y} \, : \, x \in \mathbb{Z}, \; y = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{m_i}, \; m_i \leq \sup\{(n(B_j))_i : j \in \mathbb{N}\}\right\} = Q(m),$$

hvor m er det supernaturlige tal givet ved, $m = \sup_j(n(B_j))$.
Vi har hermed vist, at B er en UHF-algebra med associeret supernaturligt tal $n = \sup_j(n(B_j))$.

$\square$

Lemma 3.4.4. *Lad $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ være en familie af UHF-algebraer med associerede supernaturlige tal $(n(B_j))_{j=1}^{\infty}$. Da er $\bigotimes_{j=1}^{\infty} B_j$ en UHF-algebra med associeret supernaturligt tal*

$$n\left(\bigotimes_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \prod_{j=1}^{\infty} n(B_j).$$

Bevis. Eftersom $\bigotimes_{j=1}^{\infty} B_j$ er den induktive grænse af den induktive følge

$$B_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{B_1} \otimes 1_{B_2}} B_1 \otimes B_2 \xrightarrow{\mathrm{id}_{B_1 \otimes B_2} \otimes 1_{B_3}} B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \xrightarrow{\mathrm{id}_{B_1 \otimes B_2 \otimes B_3} \otimes 1_{B_4}} \cdots,$$

er $\bigotimes_{j=1}^{\infty} B_j$ en UHF-algebra jvf. Lemma 3.4.2, idet $\bigotimes_{j=1}^{m} B_j$ er en UHF-algebra for alle $m \in \mathbb{N}$. Af Lemma 3.4.3 fås, at det supernaturlige tal associeret til $\bigotimes_{j=1}^{\infty} B_j$ er givet ved,

$$n\left(\bigotimes_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sup_{m \in \mathbb{N}} n\left(\bigotimes_{j=1}^{m} B_j\right) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{m} n(B_j) = \prod_{j=1}^{\infty} n(B_j).$$

$\square$

Sætning 3.4.5. *Lad B være en UHF-algebra med associeret supernaturligt tal $(n_j)_{j=1}^{\infty}$. Da er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) $B \cong B \otimes B$

(ii) $B \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$

(iii) $n_j \in \{0, \infty\}$ *for alle* $j \in \mathbb{N}$, *og* $n_j \neq 0$ *for mindst ét* $j \in \mathbb{N}$.

Bevis. Pr. antagelse er $n = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{n_j}$, hvor $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ er den ordnede mængde af positive primtal. Det medfører, at UHF-algebraen $\bigotimes_{i=1}^{\infty} B$ har associeret supernaturligt tal
$n^{\infty} = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{\infty n_j}$, hvor

$$\infty n_j = \begin{cases} 0 & \text{for } n_j = 0 \\ \infty & \text{for } n_j > 0 \end{cases}$$

Jvf. [MRL, Theorem 7.4.5] er $B \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$, hvis og kun hvis $n = n^{\infty}$. Dvs. $B \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$, hvis og kun hvis $n_j = 0$ eller $n_j = \infty$ for alle $j \in \mathbb{N}$.
Så da $B \cong B \otimes B$, hvis og kun hvis $n_j = 0$ eller $n_j = \infty$ for alle $j \in \mathbb{N}$ jvf. Sætning 3.3.2 fås det ønskede. $\square$

Sætning 3.4.6. *Lad B være en vilkårlig UHF-algebra. UHF-algebraen $D = \bigotimes_{i=1}^{\infty} B$ opfylder, at $D \cong D \otimes D \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} D$.*

Bevis. Antag B har associeret supernaturligt tal $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$. Da er det supernaturlige tal $n(D)$ associeret til D, givet ved $n(D) = n^{\infty}$. Så $(n(D))_j = \infty n_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Dvs.
$(n(D))_j = 0$ eller $(n(D))_j = \infty$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Heraf er $D \cong D \otimes D \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} D$ jvf. Sætning 3.4.5. $\square$

Kapitel 4

Stærkt selv-absorberende C^*-algebraer

Dette kapitel omhandler selv-absorberende C^*-algebraer D, hvor der findes en isomorfi $\varphi : D \mapsto D \otimes D$, som er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_D \otimes 1_D$. Disse C^*-algebraer kaldes stærkt selv-absorberende, og et eksempel herpå er UHF-algebraer, der er associeret med supernaturligt tal $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$, hvor $n_j \in \{0, \infty\}$. Vi har tidligere vist, at denne type UHF-algebraer er selv-absorberende, men det viser sig også, at der findes en isomorfi der opfylder det ønskede, så de er stærkt selv-absorberende. I det følgende vil vi vise nogle sætninger, der giver ækvivalente betingelser for at en C^*-algebra er stærkt selv-absorberende.

4.1 Approksimativt unitært ækvivalente *-homomorfier

Først gennemgås et par lemmaer vedrørende approksimativ unitær ækvivalens af *-homomorfier, som vi skal benytte senere i kapitlet. Kun nogle af påstandene vises, idet beviserne er forholdsvis trivielle.

Lemma 4.1.1. [1] *Lad A, B, C og D være separable C^*-algebraer, så C og D er unitale. Antag at $\varphi : A \mapsto B$, $\alpha, \beta, \gamma : B \mapsto C$ og $\psi : C \mapsto D$ er *-homomorfier så ψ er unital. Da gælder*

(i) *Hvis α er approksimativt unitært ækvivalent med β, og β er approksimativt unitært ækvivalent med γ, så er α approksimativt unitært ækvivalent med γ.*

(ii) *Hvis α er approksimativt unitært ækvivalent med β, så er $\psi \circ \alpha$ approksimativt unitært ækvivalent med $\psi \circ \beta$, og $\alpha \circ \varphi$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\beta \circ \varphi$.*

(iii) *Antag $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ er følger af *-homomorfier, $\alpha_n, \beta_n : B \mapsto C$, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n(b) - \alpha(b)\| = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} \|\beta_n(b) - \beta(b)\| = 0 \quad \text{for alle } b \in B.$$

Hvis α_n er approksimativt unitært ækvivalent med β_n for alle $n \in \mathbb{N}$, da er α approksimativt unitært ækvivalent med β.

Vi vil nu bevise påstand (ii):

[1] [TW05, Proposition 1.2]

Bevis. Antag at α er approksimativt unitært ækvivalent med β, og lad $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C$ være en følge af unitære, så

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^*\alpha(b)v_n - \beta(b)\| = 0 \quad \text{for alle} \quad b \in B. \tag{4.1}$$

Da ψ er unital er $(\psi(v_n))_{n=1}^{\infty}$ en følge af unitære i D, og

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi(v_n)^*\psi(\alpha(b))\psi(v_n) - \psi(\beta(b))\| = \lim_{n\to\infty} \|\psi(v_n^*\alpha(b)v_n - \beta(b))\| = 0$$

for alle $b \in B$.
Så $\psi \circ \alpha$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\psi \circ \beta$. Af (4.1) fås specielt for ethvert $a \in A$,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^*(\alpha(\varphi(a))v_n - \beta(\varphi(a))\| = 0.$$

Så $\alpha \circ \varphi$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\beta \circ \varphi$. $\square$

Lemma 4.1.2. *Lad $\alpha, \beta : A \mapsto B$ være approksimativt unitært ækvivalente *-homomorfier mellem separable C^*-algebraer A og B. Lad $\gamma : C \mapsto D$ være en *-homomorfi mellem separable C^*-algebraer C og D, hvor D er unital. Så er $\alpha \otimes \gamma, \beta \otimes \gamma : A \otimes C \mapsto B \otimes D$ approksimativt unitært ækvivalente, og $\gamma \otimes \alpha, \gamma \otimes \beta : C \otimes A \mapsto D \otimes B$ er approksimativt unitært ækvivalente.*

Bevis. Der findes en følge af unitære $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ i $\mathcal{M}(B)$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^*\alpha(a)v_n - \beta(a)\| = 0 \quad \text{for alle} \quad a \in A.$$

Lad nu $a \otimes c$ være en vilkårlig elementær tensor i $A \otimes C$. Da gælder,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|(v_n^* \otimes 1_D)(\alpha \otimes \gamma)(a \otimes c)(v_n \otimes 1_D) - (\beta \otimes \gamma)(a \otimes c)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(v_n^*\alpha(a)v_n) \otimes \gamma(c) - \beta(a) \otimes \gamma(c)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(v_n^*\alpha(a)v_n - \beta(a)) \otimes \gamma(c)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|v_n^*\alpha(a)v_n - \beta(a)\|\|\gamma(c)\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da det algebraiske tensorprodukt $A \odot C$ er en tæt delmængde i $A \otimes C$, og da $\alpha \otimes \gamma$ samt $\beta \otimes \gamma$ er lineære kontraktioner fås,

$$\lim_{n\to\infty} \|(v_n \otimes 1_D)^*(\alpha \otimes \gamma)(x)(v_n \otimes 1_D) - (\beta \otimes \gamma)(x)\| = 0$$

for alle $x \in A \otimes C$.
Analogt vises, at $\gamma \otimes \alpha$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\gamma \otimes \beta$. $\square$

Et lignende argument giver følgende lemma:

Lemma 4.1.3. *Lad A, A', B og B' være separable C^*-algebraer. Antag $\alpha_1, \alpha_2 : A \mapsto A'$ og $\beta_1, \beta_2 : B \mapsto B'$ er *-homomorfier, så $\alpha_1 \otimes \beta_1, \alpha_2 \otimes \beta_2 : A \otimes B \mapsto A' \otimes B'$ er approksimativt untært ækvivalente. Lad $\gamma : C \mapsto C'$ være en *-homomorfi mellem separable C^*-algebraer C og C', hvor C' er unital. Da er $\alpha_1 \otimes \gamma \otimes \beta_1, \alpha_2 \otimes \gamma \otimes \beta_2 : A \otimes C \otimes B \mapsto A' \otimes C' \otimes B'$ approksimativt unitært ækvivalente.*

4.2 Tensorprodukt af C^*-algebraer med approksimativt indre (halv)flip

Vi skal i det følgende først give definitionen af, at en C^*-algebra er stærkt selv-absorberende. Herefter skal vi bruge resultaterne fra 4.1 til at vise, at C^*-algebraen $A \otimes B$ har approksimativt indre (halv)flip, hvis A og B har approksimativt indre (halv)flip. Endvidere vises, at $A \otimes B$ er stærkt selv-absorberende, hvis A og B er stærkt selv-absorberende C^*-algebraer.

Definition 4.2.1. [2] Lad D være en separabel og unital C^*-algebra.

(i) D siges at have approksimativt indre flip, hvis automorfien $\sigma_D : D \otimes D \mapsto D \otimes D$ givet ved

$$\sigma_D(a \otimes b) = b \otimes a, \ a, b \in D$$

er approksimativt unitært ækvivalent med identitetsafbildningen $\mathrm{id}_{D \otimes D}$.

(ii) D er stærkt selv-absorberende hvis $D \ncong \mathbb{C}$, og der findes en *-isomorfi $\varphi : D \mapsto D \otimes D$, så φ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_D \otimes 1_D$.

Bemærk, at i (ii) vil en *-isomorfi $\psi : D \mapsto D \otimes D$, der er approksimativt unitært ækvivalent med $1_D \otimes \mathrm{id}_D$ også opfylde det ønskede. Thi, da er $\varphi = \sigma_D \circ \psi : D \mapsto D \otimes D$ en *-isomorfi, som opfylder,

$$\varphi \approx_{a.u} \sigma_D \circ (1_D \otimes \mathrm{id}_D) = \mathrm{id}_D \otimes 1_D.$$

I det følgende vil vi for at begrænse notationen angive, at to *-homomorfier φ, ψ er approksimativt unitært ækvivalente ved at skrive, $\varphi \approx_{a.u} \psi$.

Sætning 4.2.2. [3] *Hvis D er en separabel, unital og stærkt selv-absorberende C^*-algebra, så har D approksimativt indre halvflip.*

Bevis. Antag $\varphi : D \mapsto D \otimes D$ er en *-isomorfi, så φ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_D \otimes 1_D$. Definer en unital *-homomorfi $\psi : D \mapsto D$ ved,

$$\psi = \varphi^{-1} \circ (1_D \otimes \mathrm{id}_D).$$

Der gælder, at

$$1_D \otimes \mathrm{id}_D = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ (1_D \otimes \mathrm{id}_D) = \varphi \circ \psi \overset{4}{\approx_{a.u}} (\mathrm{id}_D \otimes 1_D) \circ \psi = \psi \otimes 1_D.$$

Heraf følger også fra Lemma 4.1.1 (ii), at

$$\mathrm{id}_D \otimes 1_D = \sigma_D \circ (1_D \otimes \mathrm{id}_D) \approx_{a.u} \sigma_D \circ (\psi \otimes 1_D) = 1_D \otimes \psi.$$

Da φ er en *-isomorfi er φ unital, så $\varphi^{-1}(1_D \otimes 1_D) = 1_D$. Dvs.

[2] [TW05, Definition 1.3]
[3] [TW05, Proposition 1.6.]
[4] Lemma 4.1.1 (ii)

$$\begin{aligned}\psi \otimes 1_D &= (\mathrm{id}_D \circ \psi) \otimes (\varphi^{-1}(1_D \otimes 1_D)) \\ &= (\mathrm{id}_D \otimes \varphi^{-1}) \circ (\psi \otimes 1_D \otimes 1_D) \\ &\overset{4.1.2}{\approx}_{a.u} (\mathrm{id}_D \otimes \varphi^{-1}) \circ (1_D \otimes \mathrm{id}_D \otimes 1_D) \\ &\overset{4.1.2}{\approx}_{a.u} (\mathrm{id}_D \otimes \varphi^{-1}) \circ (1_D \otimes 1_D \otimes \psi) \\ &\overset{4.1.3}{\approx}_{a.u} (\mathrm{id}_D \otimes \varphi^{-1}) \circ (\mathrm{id}_D \otimes 1_D \otimes 1_D) \\ &= \mathrm{id}_D \otimes \varphi^{-1}(1_D \otimes 1_D) \\ &= \mathrm{id}_D \otimes 1_D.\end{aligned}$$

Af transitiviteten af approksimativ unitær ækvivalens fås hermed, at $1_D \otimes \mathrm{id}_D$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_D \otimes 1_D$, hvilket betyder, at D har approksimativt indre halvflip. □

Lemma 4.2.3. [5] *Lad A og B være separable C^*-algebraer. Lad α være en automorfi på A, der er approksimativt unitært ækvivalent med id_A og lad β være en automorfi på B, der er approksimativt unitært ækvivalent med id_B. Så er automorfien $\alpha \otimes \beta : A \otimes B \mapsto A \otimes B$ approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{A \otimes B}$.*

Bevis. Af [Mur90, Theorem 6.5.1] findes en entydig injektiv *-homomorfi $\alpha \otimes \beta : A \otimes B \mapsto A \otimes B$, så

$$(\alpha \otimes \beta)(a \otimes b) = \alpha(a) \otimes \beta(b), \quad a \in A, b \in B.$$

Endvidere er $\alpha \otimes \beta$ også surjektiv, da billedet $\mathrm{Im}(\alpha \otimes \beta)$ er lukket og indeholder det algebraiske tensorprodukt $A \odot B$, da α og β er surjektive.

Vi skal finde en følge $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i $\mathcal{M}(A \otimes B)$, så

$$\lim_{n \to \infty} \|(\alpha \otimes \beta)(c) - w_n c w_n^*\| = 0$$

for alle $c \in A \otimes B$.

Pr. antagelse findes følger af unitære $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}(A), (v_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{M}(B)$, så

$$\lim_{n \to \infty} \|\alpha(a) - u_n a u_n^*\| = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n \to \infty} \|\beta(b) - v_n b v_n^*\| = 0$$

for alle $a \in A$ og alle $b \in B$.
Men for hvert $n \in \mathbb{N}$ er $w_n = u_n \otimes v_n$ en unitær i $\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{M}(B) \subseteq \mathcal{M}(A \otimes B)$, idet

$$w_n^* w_n = (u_n \otimes v_n)^*(u_n \otimes v_n) = u_n^* u_n \otimes v_n^* v_n = 1_{\mathcal{M}(A)} \otimes 1_{\mathcal{M}(B)}.$$

[5] [ER95, Lemma 2.3]

Tilsvarende fås, $w_n w_n^* = 1_{\mathcal{M}(A)} \otimes 1_{\mathcal{M}(B)}$. Der gælder, at

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|(\alpha\otimes\beta)(a\otimes b) - w_n(a\otimes b)w_n^*\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(\alpha\otimes\beta)(a\otimes b) - (u_n\otimes v_n)(a\otimes b)(u_n^*\otimes v_n^*)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\alpha(a)\otimes\beta(b) - u_n a u_n^* \otimes v_n b v_n^*\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} (\|\alpha(a)\otimes\beta(b) - \alpha(a)\otimes v_n b v_n^*\| \\
&\quad + \|\alpha(a)\otimes v_n b v_n^* - u_n a u_n^* \otimes v_n b v_n^*\|) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\|\alpha(a)\otimes(\beta(b) - v_n b v_n^*)\| + \|(\alpha(a) - u_n a u_n^*)\otimes v_n b v_n^*\|) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\|\alpha(a)\|\|\beta(b) - v_n b v_n^*\| + \|\alpha(a) - u_n a u_n^*\|\|v_n b v_n^*\|) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\|a\|\|\beta(b) - v_n b v_n^*\| + \|\alpha(a) - u_n a u_n^*\|\|b\|) \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$ og alle $b \in B$. Så pga. lineariteten af de to afbildninger $\alpha\otimes\beta$ og $c \mapsto w_n c w_n^*$ gælder, at

$$\lim_{n\to\infty} \|(\alpha\otimes\beta)(c) - w_n c w_n^*\| = 0 \quad \text{for alle} \quad c \in A \odot B.$$

Da $A \odot B$ er en tæt delmængde i $A \otimes B$, og da $\alpha\otimes\beta$ samt $c \mapsto w_n c w_n^*$ er kontinuerte fås heraf, at $\alpha\otimes\beta$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{A\otimes B}$. □

Korollar 4.2.4. [6] *Hvis A og B er separable C^*-algebraer med approksimativt indre flip, så har $A\otimes B$ approksimativt indre flip.*

Bevis. Automorfierne $\sigma_A : A\otimes A \mapsto A\otimes A$ og $\sigma_B : B\otimes B \mapsto B\otimes B$ givet ved,

$$\sigma_A(a_1\otimes a_2) = a_2\otimes a_1,\ a_1, a_2 \in A \quad \text{og} \quad \sigma_B(b_1\otimes b_2) = b_2\otimes b_1,\ b_1, b_2 \in B$$

er approksimativt unitært ækvivalente med hhv. $\mathrm{id}_{A\otimes A}$ og $\mathrm{id}_{B\otimes B}$.
Vi skal vise, at $\sigma_{A\otimes B} : (A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \mapsto (A\otimes B)\otimes(A\otimes B)$ givet ved

$$\sigma_{A\otimes B}(c_1\otimes c_2) = c_2\otimes c_1, \quad c_1, c_2 \in A\otimes B$$

er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)}$.

Da tensorproduktet er kommutativt og associativt op til isomorfi, er $(A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \cong (A\otimes A)\otimes(B\otimes B)$, hvor isomorfien $\gamma : (A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \mapsto (A\otimes A)\otimes(B\otimes B)$ er givet ved,

$$\gamma((a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)) = (a_1\otimes a_2)\otimes(b_1\otimes b_2)$$

for $a_1, a_2 \in A$ og $b_1, b_2 \in B$.

Der findes en entydig *-isomorfi $\sigma_A\otimes\sigma_B : (A\otimes A)\otimes(B\otimes B) \mapsto (A\otimes A)\otimes(B\otimes B)$, så

$$(\sigma_A\otimes\sigma_B)(x\otimes y) = \sigma_A(x)\otimes\sigma_B(y),\ x \in A\otimes A,\ y \in B\otimes B.$$

[6][ER95, Korollar 2.4]

Dvs. $\gamma \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \gamma^{-1} : (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \mapsto (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$ er en *-isomorfi og for $a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$ fås,

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \gamma^{-1})((a_1 \otimes a_2) \otimes (b_1 \otimes b_2)) &= (\gamma \circ \sigma_{A\otimes B})((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) \\ &= \gamma((a_2 \otimes b_2) \otimes (a_1 \otimes b_1)) \\ &= (a_2 \otimes a_1) \otimes (b_2 \otimes b_1) \\ &= (\sigma_A \otimes \sigma_B)((a_1 \otimes a_2) \otimes (b_1 \otimes b_2)).\end{aligned}$$

Dette medfører, at $(\gamma \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \gamma^{-1})(x \otimes y) = (\sigma_A \otimes \sigma_B)(x \otimes y)$ for alle $x \in A \otimes A$ og alle $y \in B \otimes B$. Så pga. entydigheden af $\sigma_A \otimes \sigma_B$ er $\gamma \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \gamma^{-1} = \sigma_A \otimes \sigma_B$. Lemma 4.2.3 giver hermed, at $\gamma \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \gamma^{-1}$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{(A\otimes A)\otimes(B\otimes B)}$. Der eksisterer altså en følge $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i $\mathcal{M}((A \otimes A) \otimes (B \otimes B))$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n d u_n^* - (\gamma \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \gamma^{-1})(d)\| = 0$$

for alle $d \in (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$.
Lad nu $\widetilde{\gamma} : \mathcal{M}((A \otimes B) \otimes (A \otimes B)) \mapsto \mathcal{M}((A \otimes A) \otimes (B \otimes B))$ være en *-isomorfi, så $\widetilde{\gamma}|_{(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)} = \gamma$. Da er

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\gamma}^{-1}(u_n)\gamma^{-1}(d)(\widetilde{\gamma}^{-1}(u_n))^* - \sigma_{A\otimes B}(\gamma^{-1}(d))\| = 0$$

for alle $d \in (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$. Så da $\gamma^{-1} : (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \mapsto (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$ er en *-isomorfi, findes for ethvert $x \in (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$ et $d \in (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$, så $x = \gamma^{-1}(d)$. Dvs.

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\gamma}^{-1}(u_n)x(\widetilde{\gamma}^{-1}(u_n))^* - \sigma_{A\otimes B}(x)\| = 0$$

for alle $x \in (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$.
Heraf er $\sigma_{A\otimes B}$ approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)}$, idet $(\widetilde{\gamma}^{-1}(u_n))_{n=1}^{\infty}$ er en følge af unitære i $\mathcal{M}((A \otimes B) \otimes (A \otimes B))$. $\square$

Lemma 4.2.5. *Lad A og B være separable unitale C^*-algebraer med approksimativt indre halvflip. Da har $A \otimes B$ også approksimativt indre halvflip.*

Bevis. Antag at $\alpha_A, \beta_A : A \mapsto A \otimes A$, givet ved,

$$\alpha_A(a) = a \otimes 1_A \quad \text{og} \quad \beta_A(a) = 1_A \otimes a, \quad a \in A$$

er approksimativt unitært ækvivalente, samt at $\alpha_B, \beta_B : B \mapsto B \otimes B$ givet ved,

$$\alpha_B(b) = b \otimes 1_B \quad \text{og} \quad \beta_B(b) = 1_B \otimes b, \quad b \in B$$

er approksimativt unitært ækvivalente. Da findes en følge af unitære $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ i $A \otimes A$ og en følge af unitære $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ i $B \otimes B$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_A(a) - u_n\beta_A(a)u_n^*\| = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} \|\alpha_B(b) - v_n\beta_B(b)v_n^*\| = 0$$

for alle $a \in A$ og alle $b \in B$. Et tilsvarende argument som i Lemma 4.2.3 giver, at
$\alpha_A \otimes \alpha_B, \beta_A \otimes \beta_B : (A \otimes B) \mapsto (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$ er approksimativt unitært ækvivalente, idet $(w_n = u_n \otimes v_n)_{n=1}^{\infty}$ er en følge af unitære i $(A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|(\alpha_A \otimes \alpha_B)(c) - w_n(\beta_A \otimes \beta_B)(c)w_n^*\| = 0$$

for alle $c \in A \otimes B$.
Som i Korollar 4.2.4 lader vi $\gamma : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \mapsto (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$ være *-isomorfien givet ved,

$$\gamma((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) = (a_1 \otimes a_2) \otimes (b_1 \otimes b_2), \quad a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B.$$

Jvf. Lemma 4.1.1 er $\gamma^{-1} \circ (\alpha_A \otimes \alpha_B), \gamma^{-1} \circ (\beta_A \otimes \beta_B) : A \otimes B \mapsto (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$ approksimativt unitært ækvivalente, og for $a \in A, b \in B$ er

$$\begin{aligned}
(\gamma^{-1} \circ (\alpha_A \otimes \alpha_B))(a \otimes b) &= \gamma^{-1}(\alpha_A(a) \otimes \alpha_B(b)) \\
&= \gamma^{-1}((a \otimes 1_A) \otimes (b \otimes 1_B)) \\
&= a \otimes b \otimes 1_A \otimes 1_B \\
&= a \otimes b \otimes 1_{A \otimes B} \\
&= (\mathrm{id}_{A \otimes B} \otimes 1_{A \otimes B})(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Så da $\gamma^{-1} \circ (\alpha_A \otimes \alpha_B)$ er en lineær kontraktion, og det algebraiske tensorprodukt $A \odot B$ er en tæt delmængde af $A \otimes B$ fås, at $\gamma^{-1} \circ (\alpha_A \otimes \alpha_B) = \mathrm{id}_{A \otimes B} \otimes 1_{A \otimes B}$. Tilsvarende er $\gamma^{-1} \circ (\beta_A \otimes \beta_B) = 1_{A \otimes B} \otimes \mathrm{id}_{A \otimes B}$.
Dvs. $A \otimes B$ har approksimativt indre halvflip. □

Lemma 4.2.6. *Lad A og B være unitale og separable C^*-algebraer, som er stærkt selv-absorberende. Da er $A \otimes B$ også stærkt selv-absorberende.*

Bevis. Der findes *-isomorfier $\varphi : A \mapsto A \otimes A$ og $\psi : B \mapsto B \otimes B$, så φ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_A \otimes 1_A$, og ψ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_B \otimes 1_B$.
Dvs. $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \mapsto (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$ er en *-isomorfi, og $\varphi \otimes \psi$ er approksimativt unitært ækvivalent med $(\mathrm{id}_A \otimes 1_A) \otimes (\mathrm{id}_B \otimes 1_B)$.
Som i ovenstående lemma er $\gamma^{-1} \circ (\varphi \otimes \psi) : A \otimes B \mapsto (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$ en *-isomorfi, som er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{A \otimes B} \otimes 1_{A \otimes B}$. □

Sætning 4.2.7. *En separabel, unital og stærkt selv-absorberende C^*-algebra D har højst én sportilstand.*

Bevis. Jvf. Sætning 4.2.2 har D approksimativt indre halvflip, og dermed højst én sportilstand jvf. Sætning 2.3.5. □

4.3 Betingelser for at en C^*-algebra er stærkt selv-absorberende

Hvis D er en unital og separabel C^*-algebra, der har approksimativt indre halvflip, så er $\bigotimes_{i=1}^{\infty} D$ stærkt selv-absorberende, som vi skal vise i Sætning 4.3.3. Dette skal benyttes i Sætning 4.3.5, hvor vi viser fire betingelser, der er ækvivalente med, at D er stærkt selv-absorberende.
Til beviset for Sætning 4.3.3 får vi brug for følgende lemmaer:

Lemma 4.3.1. *Lad A være en unital C^*-algebra, og lad $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ være en voksende følge af del-C^*-algebraer i A med $1_A \in A_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$. Lad for $k > l$ $\iota_{k,l} : A_l \mapsto A_k$*

være inklusionsafbildningen. Hvis α er en automorfi på A, så $\alpha(A_n) = A_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$, da er α approksimativt unitært ækvivalent med id_A*, hvis der for ethvert $l \in \mathbb{N}$ findes $k > l$, så*

$$\iota_{k,l} : A_l \mapsto A_k \quad \text{og} \quad \iota_{k,l} \circ \alpha|_{A_l} : A_l \mapsto A_k$$

er approksimativt unitært ækvivalente.

Bevis. Antag at der for $l \in \mathbb{N}$ findes $k \in \mathbb{N}$, så $k > l$ og $\iota_{k,l}$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\iota_{k,l} \circ \alpha|_{A_l}$. Dvs. der for enhver endelig delmængde $F \subseteq A_l$ og for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer en unitær $u \in A_k \subseteq A$, så

$$\|u(\iota_{k,l} \circ \alpha)(x)u^* - \iota_{k,l}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

for alle $x \in F$.

Lad nu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ være en vilkårlig endelig delmængde i A. Da findes $l \in \mathbb{N}$ og $x'_1, \ldots, x'_n \in A_l$, så $\|x_j - x'_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$ for $1 \leq j \leq n$. Pr. antagelse findes $k > l$ og $u \in A_k$, så

$$\|u(\iota_{k,l} \circ \alpha)(x'_j)u^* - \iota_{k,l}(x'_j)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

For $1 \leq j \leq n$ fås,

$$\|u\alpha(x_j)u^* - x_j\| \leq \|u\alpha(x_j)u^* - u\alpha(x'_j)u^*\| + \|u\alpha(x'_j)u^* - x'_j\| + \|x'_j - x_j\| < \varepsilon.$$

□

For at lette notationen i det følgende vil vi for en C^*-algebra D og for hvert $k \in \mathbb{N}$ lade $D^{\otimes k}$ betegne C^*-algebraen $\bigotimes_{i=1}^k D$. Hvis D er unital sættes ligeledes $D^{\otimes\infty} = \bigotimes_{i=1}^\infty D$.

Lemma 4.3.2. *Lad D være en unital C^*-algebra med approksimativt indre halvflip. For $k > l$ defineres en indlejring $\iota_{k,l} : D^{\otimes l} \mapsto D^{\otimes k}$ ved, $\iota_{k,l} = \mathrm{id}_{D^{\otimes l}} \otimes 1_{D^{\otimes k-l}}$. For enhver permutation $\sigma \in S_k$ betragtes automorfien γ_σ på $D^{\otimes k}$, som permuterer faktorerne i henhold til σ, dvs.*

$$\gamma_\sigma(d_1 \otimes d_2 \otimes \cdots \otimes d_k) = d_{\sigma(1)} \otimes d_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes d_{\sigma(k)}.$$

Hvis $k > l$ er $\gamma_\sigma \circ \iota_{k,l}$, $\iota_{k,l} : D^{\otimes l} \mapsto D^{\otimes k}$ approksimativt unitært ækvivalente for enhver permutation $\sigma \in S_k$.

Bevis. Vi skal vise, at undergruppen i H i S_k givet ved

$$H = \{\sigma \in S_k : \gamma_\sigma \circ \iota_{k,l} \approx_{a.u} \iota_{k,l}\}$$

er lig med S_k. Da D har approksimativt indre halvflip, er de to *-homomorfier $\alpha, \beta : D \mapsto D \otimes D$ givet ved,

$$\alpha(d) = d \otimes 1_D \quad \text{og} \quad \beta(d) = 1_D \otimes d,\ d \in D$$

approksimativt unitært ækvivalente. Jvf. Lemma 4.1.1 og Lemma 4.1.2 er de to *-homomorfier

$$D^{\otimes l} = D^{\otimes(l-1)} \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_{D^{\otimes(l-1)}} \otimes \alpha} D^{\otimes(l-1)} \otimes (D \otimes D) \xrightarrow{\iota_{k,l+1}} D^{\otimes k}$$

og

$$D^{\otimes l} = D^{\otimes(l-1)} \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_{D^{\otimes(l-1)}} \otimes \beta} D^{\otimes(l-1)} \otimes (D \otimes D) \xrightarrow{\iota_{k,l+1}} D^{\otimes k}$$

approksimativt unitært ækvivalente.
Lad $\tau \in S_k$ være transpositionen $(l, l+1)$. For vilkårlige $d_1, d_2, \dots, d_l \in D$ gælder

$$\begin{aligned}(\gamma_\tau \circ \iota_{k,l})(d_1 \otimes \cdots \otimes d_l) &= \gamma_{(l,l+1)}(d_1 \otimes \cdots \otimes d_l \otimes 1_{D^{\otimes k-l}}) \\ &= d_1 \otimes \cdots \otimes d_{l-1} \otimes 1_D \otimes d_l \otimes 1_{D^{\otimes k-(l+1)}} \\ &= \iota_{k,l+1}(d_1 \otimes \cdots \otimes d_{l-1} \otimes 1_D \otimes d_l) \\ &= (\iota_{k,l+1} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes(l-1)}} \otimes \beta))(d_1 \otimes \cdots \otimes d_l).\end{aligned}$$

Så da $\gamma_\tau \circ \iota_{k,l}$ og $\iota_{k,l+1} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes(l-1)}} \otimes \beta)$ er lineære kontraktioner, og da $D^{\odot l}$ er en tæt delmængde i $D^{\otimes l}$ fås, at $\gamma_\tau \circ \iota_{k,l} = \iota_{k,l+1} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes(l-1)}} \otimes \beta)$. Tilsvarende er $\iota_{k,l+1} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes(l-1)}} \otimes \alpha) = \iota_{k,l}$. Så af transitiviteten af approksimativ unitær ækvivalens fås,

$$\gamma_\tau \circ \iota_{k,l} \approx_{a.u} \iota_{k,l}.$$

Dvs. $\tau = (l, l+1) \in H$.

Lad T_1 og T_2 være undergrupper af S_k givet ved,

$$T_1 = \{\varphi \in S_k : \varphi(j) = j \text{ for } l < j \leq k\}$$

og

$$T_2 = \{\varphi \in S_k : \varphi(j) = j \text{ for } 1 \leq j \leq l\}.$$

Vi vil nu vise, at T_1 og T_2 ligger i normalisatoren for H:
Lad $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ være den kanoniske indlejring $S_l \mapsto T_1 \subseteq S_k$ givet ved

$$\overline{\varphi}(j) = \begin{cases} \varphi(j), & 1 \leq j \leq l \\ j, & l < j \leq k \end{cases}$$

For $d_1, \dots d_l \in D$ og for $\varphi \in S_l$ er

$$\begin{aligned}(\iota_{k,l} \circ \gamma_\varphi)(d_1 \otimes \cdots \otimes d_l) &= \iota_{k,l}(d_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes d_{\varphi(l)}) \\ &= d_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes d_{\varphi(l)} \otimes 1_{D^{\otimes k-l}} \\ &= d_{\overline{\varphi}(1)} \otimes \cdots \otimes d_{\overline{\varphi}(l)} \otimes 1_{D^{\otimes k-l}} \\ &= (\gamma_{\overline{\varphi}} \circ \iota_{k,l})(d_1 \otimes \cdots \otimes d_l).\end{aligned}$$

Så for alle $\varphi \in S_l$ er $\iota_{k,l} \circ \gamma_\varphi = \gamma_{\overline{\varphi}} \circ \iota_{k,l}$. For $\sigma \in H$ og $\varphi \in S_l$ gælder jvf. Lemma 4.1.1,

$$\gamma_\sigma \circ \gamma_{\overline{\varphi}} \circ \iota_{k,l} = \gamma_\sigma \circ \iota_{k,l} \circ \gamma_\varphi \approx_{a.u} \iota_{k,l} \circ \gamma_\varphi = \gamma_{\overline{\varphi}} \circ \iota_{k,l},$$

hvilket medfører, at $\gamma_{\overline{\varphi}^{-1}} \circ \gamma_\sigma \circ \gamma_{\overline{\varphi}} \circ \iota_{k,l}$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\iota_{k,l}$.
Dvs. $\psi^{-1} \circ \sigma \circ \psi \in H$ for alle $\sigma \in H$ og alle $\psi \in T_1$. Heraf vil T_1 være indeholdt i normalisatoren for H.

For $\varphi \in T_2$ og $\sigma \in H$ gælder ligeledes, at $\gamma_\varphi \circ \iota_{k,l} = \iota_{k,l}$. Dermed følger af Lemma 4.1.1, at

$$\gamma_\sigma \circ \gamma_\varphi \circ \iota_{k,l} = \gamma_\sigma \circ \iota_{k,l} \approx_{a.u} \iota_{k,l} = \gamma_\varphi \circ \iota_{k,l},$$

hvilket giver

$$\gamma_{\varphi^{-1}} \circ \gamma_\sigma \circ \gamma_\varphi \circ \iota_{k,l} \approx_{a.u} \iota_{k,l}.$$

Dvs. $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi \in H$ for alle $\sigma \in H$ og alle $\varphi \in T_2$, hvoraf T_2 er indeholdt i normalisatoren for H.

For $1 \leq i \leq l < j \leq k$ og $\psi \in T_1, \varphi \in T_2$ er

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi \circ (l, l+1) \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} &= \psi \circ (\varphi(l), \varphi(l+1)) \circ \psi^{-1} \\ &= (\psi(\varphi(l)), \psi(\varphi(l+1))) \\ &= (\psi(l), \varphi(l+1)),\end{aligned}$$

så $(i,j) = \psi \circ \varphi \circ (l, l+1) \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ for passende $\psi \in T_1$ og $\varphi \in T_2$. Eftersom T_1 og T_2 er indeholdt i normalisatoren for H vil $(i,j) \in H$.

Enhver transposition τ i S_k er enten lig med (i,j) for passende $1 \leq i \leq l < j \leq k$ eller et produkt af tre sådanne transpositioner, idet

$$(a,b) = (a,c) \circ (b,c) \circ (a,c)$$

for $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Hvis $a, b > l$ vælges $c \leq l$, og hvis $a, b \leq l$ vælges $c > l$.
Da H er en undergruppe af S_k følger, at H indeholder enhver transpositon i S_k, og dermed ethvert element i S_k, da dette kan skrives som et produkt af transpositioner. Så $H = S_k$. □

Vha. ovenstående lemmaer er vi nu i stand til at vise følgende sætning:

Sætning 4.3.3. [7] *Antag D er en separabel og unital C^*-algebra og at D har approksimativt indre halvflip. Da gælder,*

(i) *$D^{\otimes\infty}$ har approksimativt indre flip.*

(ii) *$D^{\otimes\infty}$ er stærkt selv-absorberende.*

(iii) *Der findes en følge af unitale *-homomorfier $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$, $\varphi_n : D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty} \mapsto D^{\otimes\infty}$, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d \otimes 1_{D^{\otimes\infty}}) - d\| = 0$$

for alle $d \in D^{\otimes\infty}$.

Bevis. (i). Vi skal vise, at $\sigma_{D^{\otimes\infty}} : D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty} \mapsto D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty}$, givet ved

$$\sigma_{D^{\otimes\infty}}(x \otimes y) = y \otimes x, \quad x, y \in D^{\otimes\infty}$$

er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty}}$. Men pr. definition af det uendelige tensorprodukt findes for hvert $k \in \mathbb{N}$ en injektiv *-homomorfi $\mu_k : D^{\otimes k} \mapsto D^{\otimes\infty}$, så

$$D^{\otimes\infty} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_k(D^{\otimes k})},$$

[7][TW05, Proposition 1.9]

hvor $D^{\otimes k} \cong \mu_k(D^{\otimes k})$ er en voksende følge af del-C^*-algebraer i $D^{\otimes\infty}$.

Lad for ethvert $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k : D^{\otimes k} \otimes D^{\otimes k} \mapsto D^{\otimes 2k} \otimes D^{\otimes 2k}$ være givet ved,

$$\lambda_k = (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_{D^{\otimes k}}) \otimes (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_{D^{\otimes k}}).$$

Jvf. Lemma 4.3.1 er det altså tilstrækkeligt, at vise, at λ_k er approksimativt unitært ækvivalent med $\lambda_k \circ \sigma_{D^{\otimes k}}$ for ethvert $k \in \mathbb{N}$, hvor $\sigma_{D^{\otimes k}} : D^{\otimes k} \otimes D^{\otimes k} \mapsto D^{\otimes k} \otimes D^{\otimes k}$ er givet ved,

$$\sigma_{D^{\otimes k}}(x \otimes y) = y \otimes x, \quad x, y \in D^{\otimes k}.$$

Men da

$$\lambda_k(x \otimes y) = x \otimes 1_{D^{\otimes k}} \otimes y \otimes 1_{D^{\otimes k}}, \quad x, y \in D^{\otimes k}$$

og

$$(\lambda_k \circ \sigma_{D^{\otimes k}})(x \otimes y) = y \otimes 1_{D^{\otimes k}} \otimes x \otimes 1_{D^{\otimes k}}, \quad x, y \in D^{\otimes k}$$

følger det ønskede af Lemma 4.3.2.

(ii). Pr. definition af det uendelige tensorprodukt antages, at $(D^{\otimes\infty}, \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty})$ er den induktive grænse af den induktive følge $\{D^{\otimes k}, \alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, hvor $\alpha_k : D^{\otimes k} \mapsto D^{\otimes k+1}$ er givet ved, $\alpha_k = \mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_D$. Fra tidligere har vi, at $((D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty}), \{\mu_k \otimes \mu_k\}_{k=1}^{\infty})$ er isomorf med den induktive grænse af den induktive følge $\{D^{\otimes k} \otimes D^{\otimes k}, \alpha_k \otimes \alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Endvidere er $(D^{\otimes\infty}, \{\mu_{2k}\}_{k=1}^{\infty})$ isomorf med den induktive grænse $(C, \{\rho_k\}_{k=1}^{\infty})$ af den induktive følge $\{D^{\otimes 2k}, \alpha_{2k+1} \circ \alpha_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, thi der findes for hvert $k \in \mathbb{N}$ injektive *-homomorfier $\mu_k : D^{\otimes k} \mapsto D^{\otimes\infty}$, så diagrammerne

$$\begin{tikzcd}
D^{\otimes 2k+1} \arrow[rr, "\alpha_{2k+1}"] \arrow[dr, "\mu_{2k+1}"] & & D^{\otimes 2k+2} \arrow[dl, "\mu_{2k+2}"] \\
& D^{\otimes\infty} &
\end{tikzcd}$$

og

$$\begin{tikzcd}
D^{\otimes 2k} \arrow[rr, "\alpha_{2k}"] \arrow[dr, "\mu_{2k}"] & & D^{\otimes 2k+1} \arrow[dl, "\mu_{2k+1}"] \\
& D^{\otimes\infty} &
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Men så vil diagrammet,

$$\begin{tikzcd}
D^{\otimes 2k} \arrow[r, "\alpha_{2k}"] \arrow[dr, "\mu_{2k}"] & D^{\otimes 2k+1} \arrow[r, "\alpha_{2k+1}"] & D^{\otimes 2k+2} \arrow[dl, "\mu_{2k+2}"] \\
& D^{\otimes\infty} &
\end{tikzcd}$$

også kommutere. Så der findes jvf. [KR86b, Proposition 11.4.1] en injektiv *-homomorfi $\theta : C \mapsto D^{\otimes\infty}$, så $\mu_{2k} = \theta \circ \rho_k$. Endvidere er θ surjektiv, idet

$$D^{\otimes\infty} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_k(D^{\otimes k})} \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_{2k}(D^{\otimes 2k})}.$$

Definer nu $\psi_k : D^{\otimes 2k} \mapsto D^{\otimes k} \otimes D^{\otimes k}$, ved

$$\psi_k(a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_k, \quad a_i, b_i \in D, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Da det minimale tensorprodukt er kommutativt og associativt er ψ_k en *-isomorfi, og for $a_i, b_i \in D$ fås

$$\begin{aligned}(\psi_{k+1} \circ \alpha_{2k+1} \circ \alpha_{2k})(a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k) &= (\psi_{k+1} \circ \alpha_{2k+1})(a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k \otimes 1_D) \\ &= \psi_{k+1}(a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k \otimes 1_D \otimes 1_D) \\ &= a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes 1_D \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \otimes 1_D \\ &= (\alpha_k \otimes \alpha_k) \circ \psi_k(a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k).\end{aligned}$$

Heraf er

$$\psi_{k+1} \circ \alpha_{2k+1} \circ \alpha_{2k} = (\alpha_k \otimes \alpha_k) \circ \psi_k$$

eftersom *-homomorfier er lineære kontraktioner. Dvs. der findes *-isomorfier $\psi_k : D^{\otimes 2k} \mapsto D^{\otimes k} \otimes D^{\otimes k}$, så flg. diagram

$$\begin{tikzcd}
D \otimes D \arrow[r, "\alpha_3 \circ \alpha_2"] \arrow[d, equal] & D^{\otimes 4} \arrow[r, "\alpha_5 \circ \alpha_4"] \arrow[d, "\psi_2"] & D^{\otimes 6} \arrow[r, "\alpha_7 \circ \alpha_6"] \arrow[d, "\psi_3"] & \cdots \arrow[r] & D^{\otimes \infty} \\
D \otimes D \arrow[r, "\alpha_1 \otimes \alpha_1"] & D^{\otimes 2} \otimes D^{\otimes 2} \arrow[r, "\alpha_2 \otimes \alpha_2"] & D^{\otimes 3} \otimes D^{\otimes 3} \arrow[r, "\alpha_3 \otimes \alpha_3"] & \cdots \arrow[r] & D^{\otimes \infty} \otimes D^{\otimes \infty}
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Det skal bemærkes, at ψ_1 er identitetsafbildningen på $D \otimes D$. Dermed findes en *-isomorfi $\psi : D^{\otimes \infty} \mapsto D^{\otimes \infty} \otimes D^{\otimes \infty}$.

Vi vil vise, at ψ er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{D^{\otimes \infty}} \otimes 1_{D^{\otimes \infty}}$. Lad $k \in \mathbb{N}$, og lad $\delta_k : D^{\otimes 2k} \mapsto D^{\otimes \infty}$ være *-homomorfien givet ved,

$$D^{\otimes 2k} \xrightarrow{\alpha_{2k+1} \circ \alpha_{2k}} D^{\otimes 2k+2} \xrightarrow{\alpha_{2k+3} \circ \alpha_{2k+2}} D^{\otimes 2k+4} \xrightarrow{\alpha_{2k+5} \circ \alpha_{2k+4}} \cdots \longrightarrow D^{\otimes \infty}.$$

Et lignende argument som i beviset for Lemma 4.3.1 giver, at det er tilstrækkeligt for ethvert $k \in \mathbb{N}$ at vise, at $\psi \circ \delta_k$ er approksimativt unitært ækvivalent med $(\mathrm{id}_{D^{\otimes \infty}} \otimes 1_{D^{\otimes \infty}}) \circ \delta_k$. Men for $a_i, b_i \in D$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ gælder, at

$$(\psi \circ \delta_k)(a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes 1_D \otimes 1_D \otimes \cdots \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \otimes 1_D \otimes 1_D \otimes \ldots$$

og

$$((\mathrm{id}_{D^{\otimes \infty}} \otimes 1_{D^{\otimes \infty}}) \circ \delta_k)(a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k) = a_1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes a_k \otimes b_k \otimes 1_D \otimes 1_D \otimes 1_D \otimes \ldots$$

Det ønskede fås nu af Lemma 4.3.2, idet $D^{\otimes k}$ kan betragtes som en del-C^*-algebra af $D^{\otimes \infty}$.

(iii). Af (ii) fås, at ψ, $\mathrm{id}_{D^{\otimes \infty}} \otimes 1_{D^{\otimes \infty}} : D^{\otimes \infty} \mapsto D^{\otimes \infty} \otimes D^{\otimes \infty}$ er approksimativt unitært ækvivalente. Der findes altså en følge $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i $D^{\otimes \infty} \otimes D^{\otimes \infty} (\cong D^{\otimes \infty})$, så

$$\lim_{n \to \infty} \| u_n^* \psi(d) u_n - d \otimes 1_{D^{\otimes \infty}} \| = 0$$

for alle $d \in D^{\otimes\infty}$.
Heraf fås for ethvert $d \in D^{\otimes\infty}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|d - \psi^{-1}(u_n(d \otimes 1_{D^{\otimes\infty}})u_n^*)\| &= \lim_{n\to\infty} \|\psi^{-1}(\psi(d)) - \psi^{-1}(u_n(d \otimes 1_{D^{\otimes\infty}})u_n^*)\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|u_n u_n^* \psi(d) u_n u_n^* - u_n(d \otimes 1_{D^{\otimes\infty}})u_n^*\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Definer for alle $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty} \mapsto D^{\otimes\infty}$ ved,

$$\varphi_n(x) = \psi^{-1}(u_n x u_n^*), \quad x \in D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty}.$$

Da er φ_n en *-homomorfi, der opfylder, at

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d \otimes 1_{D^{\otimes\infty}}) - d\| = 0$$

for alle $d \in D^{\otimes\infty}$. Endvidere er φ_n unital, da ψ er unital. □

Sætning 4.3.4. *Lad B være en UHF-algebra. Da er $B^{\otimes\infty}$ stærkt selv-absorberende.*

Bevis. Fra Eksempel 3.2.6 har B approksimativt indre halflip. Så Sætning 4.3.3 (ii) giver, at $B^{\otimes\infty}$ er stærkt selv-absorberende. □

Sætning 4.3.5. [8] *Lad D være en separabel unital C^*-algebra med approksimativt indre halvflip. Da er D stærkt selv-absorberende, hvis og kun hvis en af følgende ækvivalente betingelser er opfyldte.*

(i) *Der findes en unital *-homomorfi $\gamma : D \otimes D \mapsto D$ som opfylder, at $\gamma \circ (\mathrm{id}_D \otimes 1_D)$ er approksimativt unitært ækvivalent med id_D.*

(ii) *Der findes en unital *-homomorfi $\gamma : D \otimes D \mapsto D$ og en følge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier, $\varphi_n : D \mapsto D$, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d_1)d_2 - d_2\varphi_n(d_1)\| = 0$$

for alle $d_1, d_2 \in D$.

(iii) *Der findes en følge $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier $\lambda_n : D^{\otimes\infty} \mapsto D$, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n(x)d - d\lambda_n(x)\| = 0$$

for alle $x \in D^{\otimes\infty}$ og alle $d \in D$.

(iv) *Der findes en *-isomorfi $\rho : D \mapsto D^{\otimes\infty}$.*

[8] [TW05, Prop. 1.10]

Bevis. Antag D er stærkt selv-absorberende. Da findes en *-isomorfi $\varphi : D \mapsto D \otimes D$ og en følge af unitære $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ i $D \otimes D$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^* \varphi(d) u_n - d \otimes 1_D\| = 0$$

for alle $d \in D$.
Sæt $\gamma = \varphi^{-1}$. Da er $\gamma : D \otimes D \mapsto D$ en *-isomorfi, og $(\gamma(u_n))_{n=1}^{\infty}$ er en følge af unitære i D. For alle $d \in D$ er

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\gamma(u_n^*) d \gamma(u_n) - \gamma(d \otimes 1_D)\| &= \lim_{n\to\infty} \|\gamma(u_n^* \varphi(d) u_n) - d \otimes 1_D)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|u_n^* \varphi(d) u_n - d \otimes 1_D\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Så $\gamma \circ (\mathrm{id}_D \otimes 1_D)$ er approksimativt unitært ækvivalent med id_D, hvilket betyder, at (i) gælder.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Antag $\gamma : D \otimes D \mapsto D$ er en unital *-homomorfi, så $\gamma \circ (\mathrm{id}_D \otimes 1_D)$ er approksimativt unitært ækvivalent med id_D. Da findes en følge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i D, så

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^* \gamma(d \otimes 1_D) v_n - d\| = 0$$

for alle $d \in D$.
For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres $\varphi_n : D \mapsto D$ ved

$$\varphi_n(d) = v_n^* \gamma(1_D \otimes d) v_n, \quad d \in D.$$

Heraf er φ_n en unital *-homomorfi og for vilkårlige elementer $d_1, d_2 \in D$ kommuterer $\varphi_n(d_1)$ med $v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n$, thi,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(d_1) v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n &= v_n^* \gamma(1_D \otimes d_1) v_n v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n \\
&= v_n^* \gamma((1_D \otimes d_1)(d_2 \otimes 1_D)) v_n \\
&= v_n^* \gamma((d_2 \otimes 1_D)(1_D \otimes d_1)) v_n \\
&= v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n v_n^* \gamma(1_D \otimes d_1) v_n \\
&= v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n \varphi_n(d_1).
\end{aligned}$$

For vilkårlige elementer $d_1, d_2 \in D$ fås heraf, at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d_1) d_2 - d_2 \varphi_n(d_1)\| &\leq \lim_{n\to\infty} (\|\varphi_n(d_1)(d_2 - v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n)\| \\
&\quad + \|\varphi_n(d_1) v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n - v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n \varphi_n(d_1)\| \\
&\quad + \|(v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n - d_2) \varphi_n(d_1)\|) \\
&\leq 2 \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d_1)\| \|d_2 - v_n^* \gamma(d_2 \otimes 1_D) v_n\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$ (iii): Lad $\gamma : D \otimes D \mapsto D$ være en unital *-homomorfi. For $k \in \mathbb{N}$ sættes

$$\gamma_1 = \gamma \quad \text{og} \quad \gamma_k = \mathrm{id}_{D^{\otimes k-1}} \otimes \gamma, \quad k \geq 2$$

og

$$\psi_k = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_{k+1} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_{D \otimes D}).$$

Da er $\gamma_k : D^{\otimes k+1} \mapsto D^{\otimes k}$ og $\psi_k : D^{\otimes k} \mapsto D$ unitale *-homomorfier. Der gælder, at

$$\begin{aligned}\gamma_{k+2} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_{D^{\otimes 3}}) &= (\mathrm{id}_{D^{\otimes k+1}} \otimes \gamma) \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_D \otimes 1_{D\otimes D}) \\ &= (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_D \otimes 1_D) \\ &= (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_{D\otimes D}),\end{aligned}$$

og

$$(\mathrm{id}_{D^{\otimes k+1}} \otimes 1_{D\otimes D}) \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_D) = (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_{D^{\otimes 3}}).$$

Så

$$\psi_k = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_{k+1} \circ \gamma_{k+2} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_{D^{\otimes 3}}) = \psi_{k+1} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_D).$$

Men pr. definition af $(D^{\otimes\infty}, \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty})$ som den induktive grænse af den induktive følge

$$D \xrightarrow{\mathrm{id}_D \otimes 1_D} D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_{D\otimes D} \otimes 1_D} D \otimes D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_{D\otimes D\otimes D} \otimes 1_D} \cdots$$

fås jvf. [KR86b, Proposition 11.4.1] eksistensen af en entydig *-homomorfi $\psi : D^{\otimes\infty} \mapsto D$, så $\psi \circ \mu_k = \psi_k$. Så da ψ_k og μ_k er unitale er ψ en unital *-homomorfi.

Pr. antagelse findes en følge $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitale *-homomorfier, $\varphi_n : D \mapsto D$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d_1)d_2 - d_2\varphi_n(d_1)\| = 0$$

for alle $d_1, d_2 \in D$.
For hvert $n \in \mathbb{N}$ sættes $\lambda_n = \varphi_n \circ \psi$. Dvs. $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ er en følge af unitale *-homomorfier, $\lambda_n : D^{\otimes\infty} \mapsto D$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n(x)d - d\lambda_n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(\psi(x))d - d\varphi_n(\psi(x))\| = 0$$

for alle $x \in D^{\otimes\infty}$ og alle $d \in D$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Da D er en separabel, unital C^*-algebra med approksimativt indre halvflip, følger af Sætning 4.3.3 (ii), at $D^{\otimes\infty}$ er stærkt selv-absorberende. Sætning 4.2.2 giver, at $D^{\otimes\infty}$ har approksimativt indre halvflip, og pr. antagelse findes en følge $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitale *-homomorfier $\lambda_n : D^{\otimes\infty} \mapsto D$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n(x)d - d\lambda_n(x)\| = 0$$

for alle $x \in D^{\otimes\infty}$ og alle $d \in D$. *-homomorfierne λ_n er injektive, da $D^{\otimes\infty}$ er simpel, jvf. Sætning 2.3.5. Så af Sætning 2.4.2 fås, at $D \cong D \otimes D^{\otimes\infty}$.

Lad $(D^{\otimes\infty}, \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty})$ være den induktive grænse af den induktive følge

$$D \xrightarrow{\mathrm{id}_D \otimes 1_D} D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_{D\otimes D} \otimes 1_D} D \otimes D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_{D\otimes D\otimes D} \otimes 1_D} \cdots$$

Da de forbindende *-homomorfier er injektive er $\mu_k : D^{\otimes k} \mapsto D^{\otimes\infty}$ injektiv for ethvert $k \in \mathbb{N}$ og fra tidligere har vi, at $(D \otimes D^{\otimes\infty}, \{\mathrm{id}_D \otimes \mu_k\}_{k=1}^{\infty})$ er isomorf med den induktive grænse af den induktive følge

$$D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_D \otimes \mathrm{id}_D \otimes 1_D} D \otimes D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_D \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D} \otimes 1_D} D \otimes D \otimes D \otimes D \xrightarrow{\qquad} \cdots,$$

idet D betragtes som den induktive grænse af den induktive følge

$$D \xrightarrow{\mathrm{id}_D} D \xrightarrow{\mathrm{id}_D} D \xrightarrow{\mathrm{id}_D} \cdots \longrightarrow D\,.$$

For hvert $k \in \mathbb{N}$ er $\mathrm{id}_D \otimes \mu_k : D^{\otimes k+1} \mapsto D \otimes D^{\otimes \infty}$ en injektiv *-homomorfi og

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_D \otimes \mu_{k+1}) \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k+1}} \otimes 1_D) &= (\mathrm{id}_D \otimes \mu_{k+1}) \circ (\mathrm{id}_D \otimes \mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_D)\\ &= \mathrm{id}_D \otimes (\mu_{k+1} \circ (\mathrm{id}_{D^{\otimes k}} \otimes 1_D))\\ &= \mathrm{id}_D \otimes \mu_k.\end{aligned}$$

[KR86b, Prop. 11.4.1] giver eksistensen af en injektiv *-homomorfi $\theta : D^{\otimes\infty} \mapsto D \otimes D^{\otimes\infty}$, så $\mathrm{id}_D \otimes \mu_k = \theta \circ \mu_{k+1}$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Endvidere er θ surjektiv, idet

$$D \otimes D^{\otimes\infty} = \mathrm{id}_D(D) \otimes \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_k(D^{\otimes k})} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{id}_D(D) \otimes \mu_k(D^{\otimes k})} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathrm{id}_D \otimes \mu_k)(D^{\otimes k+1})}.$$

Da der findes en *-isomorfi $\psi : D \mapsto D \otimes D^{\otimes\infty}$ vil $\rho = \theta^{-1} \circ \psi : D \mapsto D^{\otimes\infty}$ være en *-isomorfi.

Antag omvendt, at (iv) gælder. Sætning 4.3.3 giver, at $D^{\otimes\infty}$ er stærkt selv-absorberende. Men pr. antagelse er $D \cong D^{\otimes\infty}$, så heraf fås også, at D er stærkt selv-absorberende. Dette medfører jvf. ovenstående, at (i) gælder.

Vi har hermed vist, at de fire udsagn er ækvivalente, og er opfyldte hvis og kun hvis D er stærkt selv-absorberende. ☐

Sætning 4.3.6. *Lad B være en UHF-algebra med associeret supernaturligt tal $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$. Da er B stærkt selv-absorberende, hvis og kun hvis $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$ og $n_j \neq 0$ for mindst ét $j \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Jvf. Sætning 3.4.5 findes en *-isomorfi $\varphi : B \mapsto B^{\otimes\infty}$, hvis og kun hvis $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$ med $n_j \neq 0$ for mindst ét $n \in \mathbb{N}$. Sætning 4.3.5 (iv) giver hermed, at B er stærkt selv-absorberende, hvis og kun hvis $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$ og $n_j \neq 0$ for mindst ét $j \in \mathbb{N}$. ☐

4.4 Egenskaber for stærkt selv-absorberende C^*-algebraer

Korollar 4.4.1. [9] *Hvis D er en separabel, unital og stærkt selv-absorberende C^*-algebra, så er $D \cong D^{\otimes k} \cong D^{\otimes\infty}$ for hvert $k \in \mathbb{N}$ og D har approksimativt indre flip.*

Bevis. Da D er stærkt selv-absorberende findes en *-isomorfi $\varphi : D \mapsto D \otimes D$. Så for hvert $k \in \mathbb{N}$ er det oplagt, at $D \cong D^{\otimes k}$.
Jvf. Sætning 4.2.2 har D approksimativt indre halvflip, så Sætning 4.3.5 (iv) giver endvidere, at $D \cong D^{\otimes\infty}$. Af Sætning 4.3.3 (i) fås, at $D^{\otimes\infty}$ og dermed D har approksimativt indre flip. ☐

[9] [TW05, Korollar 1.11]

Korollar 4.4.2. [10] *Lad A og D være separable, unitale C^*-algebraer, så D er stærkt selv-absorberende. Da vil to vilkårlige unitale *-homomorfier $\alpha, \beta : D \mapsto A \otimes D$ være approksimativt unitært ækvivalente. Specielt vil to unitale endomorfier på D være approksimativt unitært ækvivalente.*

Bevis. Af Sætning 4.2.2 har D approksimativt indre halvflip, så der findes jvf. Sætning 4.3.5 (iv) en *-isomorfi $\psi : D \mapsto D^{\otimes\infty}$, og Sætning 4.3.3 (iii) giver en følge $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitale *-homomorfier, $\lambda_n : D^{\otimes\infty} \otimes D^{\otimes\infty} \mapsto D^{\otimes\infty}$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n(d \otimes 1_{D^{\otimes\infty}}) - d\| = 0$$

for alle $d \in D^{\otimes\infty}$.

Lad for $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : D \otimes D \mapsto D$ være defineret ved

$$\varphi_n = \psi^{-1} \circ \lambda_n \circ (\psi \otimes \psi).$$

Da er $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ en følge af unitale *-homomorfier, og for $d \in D$ gælder, at

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d \otimes 1_D) - d\| &= \lim_{n\to\infty} \|(\psi^{-1} \circ \lambda_n \circ (\psi \otimes \psi))(d \otimes 1_D) - d\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(\lambda_n \circ (\psi \otimes \psi))(d \otimes 1_D) - \psi(d)\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\lambda_n((\psi(d) \otimes 1_{D^{\otimes\infty}}) - \psi(d)\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sæt for hvert $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_n &= (\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_D) \circ (\mathrm{id}_D \otimes 1_D) \quad \text{og} \\ \overline{\beta}_n &= (\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n) \circ (\beta \otimes \mathrm{id}_D) \circ (\mathrm{id}_D \otimes 1_D).\end{aligned}$$

Dvs. $\overline{\alpha}_n, \overline{\beta}_n : D \mapsto A \otimes D$ er unitale *-homomorfier. Men af Sætning 4.2.2 har D approksimativt indre halvflip, så $\mathrm{id}_D \otimes 1_D, 1_D \otimes \mathrm{id}_D : D \mapsto D \otimes D$ er approksimativt unitært ækvivalente. Heraf fås af Lemma 4.1.1,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_n &\approx_{a.u} (\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_D) \circ (1_D \otimes \mathrm{id}_D) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n) \circ (\alpha(1_D) \otimes \mathrm{id}_D) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n) \circ (1_A \otimes 1_D \otimes \mathrm{id}_D) \\ &= (\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n) \circ (\beta \otimes \mathrm{id}_D) \circ (1_D \otimes \mathrm{id}_D) \\ &\approx_{a.u} \overline{\beta}_n.\end{aligned}$$

Så af transitiviteten af approksimativ unitær ækvivalens fås, at $\overline{\alpha}_n$ er approksimativ unitært ækvivalent med $\overline{\beta}_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
For ethvert $d \in D$ er $\lim_{n\to\infty} \|\overline{\alpha}_n(d) - \alpha(d)\| = 0$, thi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|(\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n)(a \otimes d \otimes 1_D) - a \otimes d\| &= \lim_{n\to\infty} \|a \otimes \varphi_n(d \otimes 1_D) - a \otimes d\| \\ &= \|a\| \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d \otimes 1_D) - d\| \\ &= 0\end{aligned}$$

[10] [TW05, Korollar 1.12]

for alle $a \in A$ og alle $d \in D$, hvilket medfører, at

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|\overline{\alpha}_n(d) - \alpha(d)\| &= \lim_{n\to\infty} \|((\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_D))(d \otimes 1_D) - \alpha(d)\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(\mathrm{id}_A \otimes \varphi_n)(\alpha(d) \otimes 1_D) - \alpha(d)\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tilsvarende fås, at $\lim_{n\to\infty} \|\overline{\beta}_n(d) - \beta(d)\| = 0$, for alle $d \in D$, så α er approksimativt unitært ækvivalent med β jvf. Lemma 4.1.1.

Lad nu α, β være to unitale endomorfier på D. Da D er stærkt selv-absorberende findes en *-isomorfi $\psi : D \mapsto D \otimes D$. Dvs. $\psi \circ \alpha, \psi \circ \beta : D \mapsto D \otimes D$ er unitale *-homomorfier, som er approksimativt unitært ækvivalente jvf. det lige viste. Så der findes en følge af unitære $(u_n)_{n=1}^\infty$ i $D \otimes D$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^*(\psi \circ \alpha)(d)u_n - (\psi \circ \beta)(d)\| = 0$$

for alle $d \in D$. Dvs. $(\psi^{-1}(u_n))_{n=1}^\infty$ er en følge af unitære i D, så

$$\lim_{n\to\infty} \|(\psi^{-1}(u_n))^*\alpha(d)\psi^{-1}(u_n) - \beta(d)\| = 0$$

for alle $d \in D$. Heraf er α og β approksimativt unitært ækvivalente. $\square$

Kapitel 5

Cuntz algebraerne

Vi skal i dette kapitel give flere eksempler på C^*-algebraer, der er stærkt selv-absorberende. I det første afsnit defineres *Cuntz* algebraerne $\mathcal{O}_n$ for $n \geq 2$, og vi viser deres universelle egenskab. Herefter gennemgås nogle vigtige egenskaber for Cuntz-algebraerne, bl.a. at $\mathcal{O}_n$ er en simpel og purely infinite C^*-algebra. Til sidst skal vi vise, at $\mathcal{O}_2$ og $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende C^*-algebraer, og vi viser også, at hvis A er en separabel, simpel og nukleær C^*-algebra, så er A isomorf med $A \otimes \mathcal{O}_\infty$, hvis og kun hvis A er purely infinite.

5.1 Den universelle egenskab

Definition 5.1.1. Lad H være et uendeligt dimensionalt Hilbertrum og lad $n \geq 2$ være et naturligt tal. Lad $s_1, \dots, s_n$ være isometrier på H, der opfylder, at

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1. \tag{5.1}$$

Da defineres $\mathcal{O}_n$ til at være del-C^*-algebraen af $B(H)$, der er frembragt af $s_1, \dots, s_n$.

Cuntz algebraen $\mathcal{O}_\infty$ defineres til at være C^*-algebraen frembragt af en uendelig følge $(s_i)_{i=1}^\infty$ af isometrier på H, der opfylder,

$$s_i^* s_j = \delta_{ij} 1. \tag{5.2}$$

for alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Bemærk at ifølge definitionen af $\mathcal{O}_n$ gælder også, at $s_i^* s_j = \delta_{ij} 1$ for alle $i, j = 1, \dots, n$.

Vi skal nu retfærdiggøre definitionen af $\mathcal{O}_n$, dvs. vi skal vise, at definitionen er uafhængig af valget af isometrier. I det følgende fastholdes et $n \in \mathbb{N}$ og isometrier $(s_i)_{i=1}^n$, på et uendeligt dimensionalt Hilbertrum H, der opfylder (5.1), hvis n er endelig og (5.2), hvis $n = \infty$.

Beviset for den universelle egenskab er ret langt, så vi vil nedenfor give en skitse af beviset, så strategien bliver mere overskuelig for læseren:
Hvis $(\widehat{s}_i)_{i=1}^n$ er en anden familie af isometrier på et Hilbertrum $\widehat{H}$, der opfylder (5.1) hvis $n < \infty$ og (5.2), hvis $n = \infty$, vil vi vise, at $C^*(s_1, \dots, s_n) \cong C^*(\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_n)$. Idéen er først at vise, at afbildningen $s_i \mapsto \widehat{s}_i$ udvides til en algebraisk *-isomorfi $\varphi : \mathcal{A} \mapsto \widehat{\mathcal{A}}$, hvor $\mathcal{A}$ og

$\widehat{\mathcal{A}}$ er *-algebraerne frembragt af hhv. $(s_i)_{i=1}^n$ og $(\widehat{s}_i)_{i=1}^n$. Til dette bevis benyttes de lineære afbildninger $F_0' : C^*(s_1, \dots, s_n) \mapsto B^n$ og $\widehat{F}_0' : C^*(\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_n) \mapsto \widehat{B}^n$, hvor B^n og $\widehat{B}^n$ er del-C^*-algebraer af hhv. $C^*(s_1, \dots, s_n)$ og $C^*(\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_n)$.
I anden del af beviset fuldstændiggøres $\mathcal{A}$ mht. en maksimal C^*-norm $\|\cdot\|_0$. Dette giver C^*-algebraen $\mathcal{L}$, og vi viser ved hjælp af en lineær kontraktion $\widetilde{F}_0 : \mathcal{L} \mapsto B^n$, at $C^*(s_1 \dots, s_n) \cong \mathcal{L}$. Ved nu at kombinere resultaterne fra første og anden del af beviset fås, at $C^*(s_1, \dots, s_n) \cong C^*(\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_n)$.

5.1.1 Multiindices

Givet $k \in \mathbb{N}$, lad W_k^n være mængden af alle k-tupler $(i_1, \dots i_k)$ med $i_j \in \{1, \dots, n\}$ for $j = 1, \dots, k$, hvis n er endelig, og $i_j \in \mathbb{N}$, hvis n er uendelig. Et element $\mu \in W_k^n$ kaldes et multiindeks af længde $l(\mu) = k$. Lad $W_0^n = \{0\}$ og $W_\infty^n = \bigcup_{k=0}^\infty W_k^n$.
Givet et multiindeks $\mu = (i_1, \dots, i_k) \in W_k^n$ sættes

$$s_\mu = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \quad \text{og} \quad s_0 = 1.$$

Hvis $\mu = (i_1, \dots i_k) \in W_k^n$ og $\nu = (j_1, \dots j_l) \in W_l^n$, defineres $\mu\nu \in W_{k+l}^n$ ved

$$\mu\nu = (i_i, \dots i_k, j_1, \dots, j_l).$$

Lemma 5.1.2. [1]

(i) *Lad $\mu, \nu \in W_\infty^n$ med $l(\mu) = l(\nu)$. Da er $s_\mu^* s_\nu = \delta_{\mu\nu} 1$.*

(ii) *Lad $\mu, \nu \in W_\infty^n$ og antag $s_\mu^* s_\nu \neq 0$.*
Hvis $l(\mu) = l(\nu)$, så er $s_\mu = s_\nu$.
Hvis $l(\mu) < l(\nu)$, så er $s_\nu = s_\mu s_{\mu'}$ med $\mu' \in W_{l(\nu)-l(\mu)}^n$.

Bevis. (i). Da $s_i^* s_j = \delta_{ij} 1$ fås, at $s_\mu^* s_\nu = \delta_{\mu\nu} 1$.
(ii). Hvis $l(\mu) = l(\nu)$ følger af (i), at $\mu = \nu$ og dermed er $s_\mu = s_\nu$.
Hvis $l(\mu) < l(\nu)$ findes multiindices α, μ' med $l(\alpha) = l(\mu)$ og $l(\mu') = l(\nu) - l(\mu)$, så $\nu = \alpha\mu'$. Dvs. $s_\nu = s_\alpha s_{\mu'}$. Der gælder, at

$$0 \neq s_\mu^* s_\nu = s_\mu^* s_\alpha s_{\mu'} = \delta_{\mu\alpha} s_{\mu'},$$

så $\alpha = \mu$. □

Lemma 5.1.3. [2] *Lad $m \neq 0$ være et ord i $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$.*

(i) *Da findes entydigt bestemte elementer $\mu, \nu \in W_\infty^n$, så $m = s_\mu s_\nu^*$.*

(ii) *Hvis m_1 og m_2 er to ord i $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$ og $m_1 = m_2$, så er antallet af bogstaver fra $\{s_i\}_{i=1}^n$ minus antallet af bogstaver fra $\{s_i^*\}_{i=1}^n$ ens for de to ord.*

[1] [Cun77, Lemma 1.2]
[2] [Cun77, Lemma 1.3]

Bevis. (i). Lad $m = x_1 \dots x_r$, hvor $x_j \in \{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$ for $j = 1, \dots, r$. Alle forekomster af $x_j x_{j+1}$, hvor $x_j x_{j+1} = 1$ kan slettes. Efter et endeligt antal skridt af sådanne reduktioner er $m = 1$ eller $m = y_1 \dots y_s$ med $y_j \in \{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$ og $y_j y_{j+1} \neq 1$ for $j = 1, \dots, s-1$.
Hvis $y_j \in \{s_i^*\}_{i=1}^n$ for et $j \in \{1, \dots, s-1\}$, da vil også $y_{j+1} \in \{s_i^*\}_{i=1}^n$, idet $m \neq 0$ og $s_i^* s_j = \delta_{ij} 1$. Så hvis $j_0 \in \{1, \dots, s\}$ er det største heltal, så $y_{j_0} \in \{s_i\}_{i=1}^n$. Da vil $y_j \in \{s_i^*\}_{i=1}^n$ for $j_0 + 1 \leq j \leq s$, og $y_j \in \{s_i\}_{i=1}^n$ for $1 \leq j \leq j_0$.
Dvs. $m = s_\mu s_\nu^*$ for passende multiindices μ, ν. (Evt. kan μ eller ν være $\emptyset$.)

Hvis α, β er et andet par af multiindices, der opfylder, at $m = s_\alpha s_\beta^*$, så er $s_\alpha^* s_\mu \neq 0$, da $m \neq 0$ og

$$0 \neq m^* m = s_\beta s_\alpha^* s_\mu s_\nu^*.$$

Der gælder, at

$$s_\mu s_\mu^* = s_\mu s_\nu^* s_\nu s_\mu^* = m m^* = s_\alpha s_\beta^* s_\beta s_\alpha^* = s_\alpha s_\alpha^*.$$

Antag $\alpha \neq \mu$. Da er $l(\alpha) \neq l(\mu)$, idet $s_\alpha^* s_\mu = \delta_{\alpha\mu} 1$, hvis $l(\alpha) = l(\mu)$. Så vi kan uden tab af generalitet antage, at $l(\alpha) < l(\mu)$.
Af Lemma 5.1.2 fås, at $\mu = \alpha\alpha'$ for $\alpha' \in W^n_{l(\mu)-l(\alpha)}$. Heraf fås,

$$1 - s_{\alpha'} s_{\alpha'}^* = s_\alpha^* s_\alpha (1 - s_{\alpha'} s_{\alpha'}^*) s_\alpha^* s_\alpha = s_\alpha^* (s_\alpha s_\alpha^* - s_\mu s_\mu^*) s_\alpha = 0,$$

hvilket medfører, at $s_{\alpha'} s_{\alpha'}^* = 1$.
Skriv α' på formen $\alpha' = (i_1, i_2, \dots i_k)$, hvor $k = l(\mu) - l(\alpha)$ og $i_j \in \{1, \dots, n\}$ for $1 \leq j \leq k$. Dvs.

$$s_{\alpha'} s_{\alpha'}^* = s_{i_1} (s_{i_2} \dots s_{i_k} s_{i_k}^* \dots s_{i_2}^*) s_{i_1}^* \leq s_{i_1} s_{i_1}^* < 1,$$

hvilket strider mod $s_{\alpha'} s_{\alpha'}^* = 1$.
Hermed er vist, at $\mu = \alpha$, og tilsvarende fås, at $\beta = \nu$.

(ii). Lad $m_1 = x_1 \dots x_r$ og $m_2 = y_1 \dots y_q$, hvor $x_j, y_j \in \{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$, og lad $m_1 = m_2$. Jvf. (i) findes entydige multiindices μ, ν så $m_1 = s_\mu s_\nu^* = m_2$.
Reduktionen foregår som før ved at fjerne led, hvor $x_j x_{j+1} = 1$ for $j = 1, \dots, r-1$ og $y_j y_{j+1} = 1$ for $j = 1, \dots, q-1$. Antag at $x_j x_{j+1} = 1$ for et $j \in \{1, \dots, r-1\}$, og antag at der findes $i \in \{1, \dots, n\}$ så $x_j = s_i$. Da er

$$s_i s_i^* = s_i s_i^* x_j x_{j+1} = s_i s_i^* s_i x_{j+1} = s_i x_{j+1} = x_j x_{j+1} = 1,$$

hvilket strider mod at $\sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1$, hvis n er endelig og $\sum_{i=1}^r s_i s_i^* \leq 1$, hvis $n = \infty$. Så der må gælde, at $x_j \in \{s_i^*\}_{i=1}^n$ og analogt fås, at $x_{j+1} \in \{s_i\}_{i=1}^n$.
Det betyder, at reduktionen af m_1 foregår ved at fjerne det samme antal elementer fra $\{s_i\}_{i=1}^n$ og $\{s_i^*\}_{i=1}^n$. På tilsvarende måde laves reduktionen af m_2.

Antag, at $l(\mu) = k$ og $l(\nu) = h$. Jvf. metoden for reduktionen findes altså $p \in \mathbb{N}$, så antallet af bogstaver i m_1 fra $\{s_i\}_{i=1}^n$ er $k + p$ og antallet af bogstaver fra $\{s_i^*\}_{i=1}^n$ er $h + p$. Tilsvarende er antallet af bogstaver i m_2 fra $\{s_i\}_{i=1}^n$ og $\{s_i^*\}_{i=1}^n$ hhv. $k + z$ og $h + z$ for et $z \in \mathbb{N}$. Dermed er antallet af bogstaver fra $\{s_i\}_{i=1}^n$ minus antallet af bogstaver fra $\{s_i^*\}_{i=1}^n$ ens for m_1 og m_2. □

Definition 5.1.4. For ethvert $n \geq 2$ definerer vi C^*-algebraerne

$$\begin{aligned} B_0^n &= \mathbb{C}1, \quad B_k^n = C^*(\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}), \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{og} \\ B^n &= C^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k^n\right). \end{aligned}$$

Idet vi lader $\mathcal{K}$ betegne C^*-algebraen af kompakte operatorer på et uendeligt dimensionalt, separabelt Hilbertrum K, gælder følgende Proposition.

Proposition 5.1.5. [3] *Hvis n er endelig, er B_k^n *-isomorf med $M_{n^k}(\mathbb{C})$ og $B_k^n \subseteq B_{k+1}^n$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Hvis n er uendelig er B_k^n *-isomorf med $\mathcal{K}$ for alle $k > 0$.*

Bevis. For $\mu, \mu', \nu, \nu' \in W_k^n$ gælder,

$$(s_\mu s_\nu^*)(s_{\mu'} s_{\nu'}^*) = \delta_{\nu\mu'} s_\mu s_{\nu'}^*,$$

idet $s_\nu^* s_{\mu'} = \delta_{\nu\mu'} 1$, og

$$(s_\mu s_\nu^*)^* = s_\nu s_\mu^*.$$

Hvis $n < \infty$ er $\sum_{\mu \in W_k^n} s_\mu s_\mu^* = 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Argumentet følger pr. induktion, thi hvis $k = 1$, så er $\sum_{\mu \in W_k^n} s_\mu s_\mu^* = \sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1$.
Antag nu, at påstanden gælder for $\mu \in W_{k-1}^n$. Da fås,

$$\sum_{\mu \in W_k^n} s_\mu s_\mu^* = \sum_{\nu \in W_{k-1}^n} \sum_{j=1}^n s_\nu s_j s_j^* s_\nu^* = \sum_{\nu \in W_{k-1}^n} s_\nu \sum_{j=1}^n s_j s_j^* s_\nu^* = \sum_{\nu \in W_{k-1}^n} s_\nu s_\nu^* = 1.$$

Dvs. $\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}$ er et selv-adjungeret system af matrixenheder med $n^k \times n^k$ elementer, der genererer B_k^n. Hermed er $B_k^n \cong M_{n^k}(\mathbb{C})$.
For $n < \infty$ og $\mu, \nu \in B_k^n$ gælder,

$$s_\mu s_\nu^* = s_\mu 1 s_\nu^* = s_\mu \sum_{i=1}^n s_i s_i^* s_\nu = \sum_{i=1}^n (s_\mu s_i)(s_\nu s_i)^* \in B_{k+1}^n,$$

så $B_k^n \subseteq B_{k+1}^n$.
Lad $(e_k)_{k=1}^\infty$ være en orthonormal basis for K, og definer for $i, j \in \mathbb{N}$,

$$E_{i,j} e_k = \begin{cases} e_i, & k = j \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Da er $(E_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ et selvadjungeret system af matrixenheder, og $\mathcal{K} = \overline{\mathrm{span}\{E_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}}$. Så B_k^n er isomorf med $\mathcal{K}$ for ethvert $k \in \mathbb{N}$, hvis $n = \infty$. $\square$

Bemærk, at ovenstående Proposition også giver, at elementerne i mængden $\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}$ er et lineært uafhængige.

5.1.2 C^*-algebraen $C^*(s_1, s_2, \ldots, s_n)$

Definition 5.1.6. For $n \geq 2$ defineres

$$\begin{aligned} A &= C^*(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\ \mathcal{A} &= {}^*\mathrm{alg}(s_1, \ldots, s_n). \end{aligned}$$

Vi bruger nu Cuntz's notation og sætter $v = s_1$ og $v^{-1} = s_1^*$, og lader m være et ord i $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$. Dvs. $m = s_\mu s_\nu^*$ for entydigt bestemte $\mu, \nu \in W_\infty^n$. Lad $r = l(\mu), s = l(\nu)$ og $k = r - s$.

[3] [Cun77, Proposition 1.4]

(i) Hvis $k > 0$, sættes $\widehat{m} = s_\mu s_\nu^* s_1^{*k}$. Så vil $\widehat{m} \in B_r^n$ og $m = \widehat{m} v^k$.

(ii) Hvis $k < 0$, sættes $\tilde{m} = s_1^{-k} s_\mu s_\nu^*$. Så vil $\tilde{m} \in B_s^n$ og $m = v^k \tilde{m}$.

(iii) Hvis $k = 0$, da vil $m \in B_r^n = B_s^n$.

Da ethvert $x \in \mathcal{A} = \text{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$ er en linearkombination af ord i $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$, kan x skrives på formen

$$x = \sum_{i=-N}^{-1} v^i x_i + x_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i v^i,$$

hvor $x_i \in B^n$ for $i \in \{-N, \dots, N\}$.

For $x \in \mathcal{A}$ sættes $F_i(x) = x_i$.

Vi skal nu vise Proposition 5.1.7.

Proposition 5.1.7. [4] *Elementerne $x_i = F_i(x)$ er entydigt bestemte af x, og $\|F_i(x)\| \leq \|x\|$.*

Til beviset får vi først brug for et par lemmaer, som kun gælder for $n < \infty$. Så i det følgende - frem til beviset for Proposition 5.1.7 antages $n < \infty$.

Lemma 5.1.8. *Lad $\lambda : A \mapsto A$ være givet ved,*

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} s_j x s_j^*, \quad x \in A.$$

Da er λ en unital og injektiv *-homomorfi, og for alle $k \in \mathbb{N}$ er

$$\lambda^k(x) = \sum_{\nu \in W_k^n} s_\nu x s_\nu^*, \quad x \in A.$$

Bevis. Afbildningen λ er klart lineær, og $\lambda(x^*) = \sum_{j=1}^n s_j x^* s_j^* = \sum_{j=1}^n (s_j x s_j^*)^* = \lambda(x)^*$. Endvidere gælder for $x, y \in A$, at

$$\lambda(xy) = \sum_{j=1}^{n} s_j xy s_j^* = \sum_{j=1}^{n} s_j x s_j^* s_j y s_j = \sum_{j=1}^{n} s_j x s_j^* \sum_{i=1}^{n} s_i y s_i^* = \lambda(x)\lambda(y).$$

Så da $\lambda(1) = \sum_{j=1}^n s_j s_j^* = 1$, er λ en unital *-homomorfi. Endvidere er λ injektiv. For antag $\lambda(x) = 0$. Da $s_i^* s_j = \delta_{ij} 1$ fås,

$$x = s_1^* \left(\sum_{j=1}^{n} s_j x s_j^* \right) s_1 = s_1^* \lambda(x) s_1 = 0.$$

Af induktion og ved at benytte, at $s_i^* s_j = \delta_{ij} 1$ ses, at der for alle $k \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$\lambda^k(x) = \sum_{\nu \in W_k^n} s_\nu x s_\nu^*, \quad x \in A.$$

□

[4] [Cun77, Proposition 1.7]

Lemma 5.1.9. [5] *For ethvert $k \in \mathbb{N}$ gælder, at*

$$\lambda^k(A) = (B_k^n)' \cap A.$$

Bevis. Lad $\mu, \nu \in W_k^n$. Benyt at $s_\mu^* s_\nu = \delta_{\mu\nu} 1$, og få for $x \in A$, at

$$\lambda^k(x) s_\mu = \sum_{\nu \in W_k^n} s_\nu x s_\nu^* s_\mu = s_\mu x \quad \text{og} \quad s_\mu^* \lambda^k(x) = \sum_{\nu \in W_k^n} s_\mu^* s_\nu x s_\nu^* = x s_\mu^*$$

for alle $k \in \mathbb{N}$. Dette giver, at

$$s_\mu s_\nu^* \lambda^k(x) = s_\mu x s_\nu^* = \lambda^k(x) s_\mu s_\nu^*.$$

Så $\lambda^k(A) \subseteq (B_k^n)' \cap A$.

Lad nu $y \in (B_k^n)' \cap A$ og lad $\nu \in W_k^n$. Sæt $x = s_\nu^* y s_\nu$. Så er

$$\lambda^k(x) = \sum_{\mu \in W_k^n} s_\mu x s_\mu^* = \sum_{\mu \in W_k^n} s_\mu s_\nu^* y s_\nu s_\mu^* = \sum_{\mu \in W_k^n} y s_\mu s_\nu^* s_\nu s_\mu^* = \sum_{\mu \in W_k^n} y s_\mu s_\mu^* = y \lambda^k(1) = y.$$

Dvs. $y \in \lambda^k(A)$. □

Lemma 5.1.10. [6] *Lad $m_1, \ldots, m_s$ være ord i $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$, og lad $k \in \mathbb{N}$. Antag, at hvert m_i er på formen $m_i = s_\mu s_\nu^*$, hvor $l(\mu) \neq l(\nu)$. Så findes et $r \in \mathbb{N}$ og en projektion $0 \neq p \in B_r^n$, så*

$$p s_\alpha^* m_i s_\beta p = 0$$

for $i = 1, \ldots s$ og alle $\alpha, \beta \in W_k^n$.

Bevis. Antag $m_i = s_\mu s_\nu^*$ med $l(\mu) \neq l(\nu)$. Lad $\alpha, \beta \in W_k^n$. Da er enten $s_\alpha^* m_i s_\beta = 0$ eller det følger af Lemma 5.1.3, at der findes entydige $\gamma, \delta \in W_\infty^n$, så $s_\alpha^* m_i s_\beta = s_\gamma s_\delta^*$. Af Lemma 5.1.3 følger også, at antallet af bogstaver fra $\{s_i\}_{i=1}^n$ minus antallet af bogstaver fra $\{s_i^*\}_{i=1}^n$ er ens i $s_\alpha^* m_i s_\beta$ og $s_\gamma s_\delta^*$. Dvs.

$$l(\gamma) - l(\delta) = l(\mu) + l(\beta) - (l(\nu) + l(\alpha)) = l(\mu) - l(\nu).$$

Så da W_k^n er endelig, er det tilstrækkeligt for enhver endelig mængde af ord $m_1', \ldots m_s'$ på formen $m_i' = s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*$, hvor $l(\mu_i) \neq l(\nu_i)$, at vise, at der findes et $r \in \mathbb{N}$ og en projektion $p \in B_r^n$, så

$$p m_i' p = 0$$

for alle $i = 1, \ldots, s$.

Lad nu $m = s_\mu s_\nu^*$ med $l(\mu) \neq l(\nu)$. Antag uden tab af generalitet, at $l(\mu) > l(\nu)$. Lad $r > 2l(\mu) - l(\nu)$, og sæt $p = s_\gamma s_\gamma^*$, hvor $l(\gamma) = r$. Da er p en projektion i B_r^n, idet $s_\gamma^* s_\gamma = 1$. Find $t \in \mathbb{N}$, så $\gamma = \nu' \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_t \gamma'$, hvor $l(\nu') = l(\nu)$ og $l(\gamma') \leq l(\gamma_1) = \cdots = l(\gamma_t) = l(\mu) - l(\nu)$. Der gælder, at

$$pmp = s_\gamma s_\gamma^* s_\mu s_\nu^* s_\gamma s_\gamma^*.$$

[5][Hes95, Lemma 2.2.5]
[6][Hes95, Lemma 2.2.6]

Så hvis $pmp \neq 0$ er $s_\nu^* s_\gamma \neq 0$. Dvs. $s_\nu^* s_{\nu'} s_{\gamma_1} \dots s_{\gamma_t} s_{\gamma'} \neq 0$. Eftersom $s_\nu^* s_{\nu'} = \delta_{\nu\nu'} 1$ fås således, at $\nu' = \nu$.

Endvidere giver $pmp \neq 0$, at $s_\gamma^* s_\mu \neq 0$. Dvs. $s_{\gamma'}^* s_{\gamma_t}^* \dots s_{\gamma_1}^* s_\nu^* s_\mu \neq 0$, hvilket medfører at $(s_\nu s_{\gamma_1})^* s_\mu \neq 0$. Da $l(\nu\gamma_1) = l(\mu)$ fås, at $\mu = \nu\gamma_1$.

Hvis $pmp \neq 0$ fås også, idet vi bruger $s_{\gamma_1}^* s_{\gamma_1} = 1 = s_\nu^* s_\nu$,

$$0 \neq s_\gamma^* s_\mu s_\nu^* s_\gamma = s_{\gamma'}^* s_{\gamma_t}^* \dots s_{\gamma_2}^* s_{\gamma_1}^* s_\nu^* s_\nu s_{\gamma_1} s_\nu^* s_\nu s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} \dots s_{\gamma_t} s_{\gamma'} = s_{\gamma'}^* s_{\gamma_t}^* \dots s_{\gamma_2}^* s_{\gamma_1} \dots s_{\gamma_t} s_{\gamma'}.$$

Dvs. $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_t$ og $s_{\gamma'}^* s_{\gamma_t} \neq 0$. Altså er γ' entydigt bestemt ud fra γ_t.

Så givet m og r som ovenfor, findes højst én projektion p på formen $p = s_\gamma s_\gamma^*$ med $\gamma \in W_r^n$, så $pmp \neq 0$, idet γ_1 er bestemt entydigt ud fra μ og ν.

Hvis vi betragter en endelig mængde $m_1', \dots m_s'$ af ord på formen $m_i' = s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*$ med $l(\mu_i) \neq l(\nu_i)$ følger det, at for et tilstrækkeligt stort r og for hvert $i \in \{1, \dots, s\}$ findes højst s projektioner på formen $p = s_\gamma s_\gamma^*$ med $\gamma \in W_r^n$, så $pm_i'p \neq 0$ for $i \in \{1, \dots, s\}$. Så da antallet af elementer i mængden $\{p = s_\gamma s_\gamma^* : \gamma \in W_r^n\}$ er n^r, kan vi ved at gøre r tilstrækkeligt stort finde en projektion $p \in B_r^n$, så $pm_i'p = 0$ for alle $i \in \{1, \dots, s\}$. □

Vi kan nu vise Proposition 5.1.7:

Bevis. For $i \geq 0$ giver konstruktionen, at $F_{i+1}(x) = F_i(xv^*)$ og for $i < 0$ er $F_{i-1}(x) = F_i(vx)$, så det er tilstrækkeligt, at vise påstanden for $F_0(x)$.

Betragt først tilfældet, hvor n er endelig. Find $k \in \mathbb{N}$, så $x_0 \in B_k^n$. For $j \in \{-N, \dots, -1\}$ findes $k_j \in \mathbb{N}$, så $x_j \in B_{k_j}^n$. Dvs. $v^j x_j$ er på formen $s_{\gamma_j} s_{\delta_j}^*$, hvor $l(\gamma_j) \neq l(\delta_j)$ for $j = -N, \dots, -1$, idet antallet af bogstaver fra $\{s_i\}_{i=1}^n$ minus antallet af bogstaver fra $\{s_i^*\}_{i=1}^n$ er ens i $v^j x_j$ og $s_{\gamma_j} s_{\delta_j}^*$. Ligeledes vil $x_j v^j$ være på formen $s_{\gamma_j} s_{\delta_j}^*$, for $j \in \{1, \dots, N\}$, hvor $l(\gamma_j) \neq l(\delta_j)$. Jvf. Lemma 5.1.10 findes $r \in \mathbb{N}, r > k$ og en projektion $0 \neq p \in B_r^n$, så

$$ps_\alpha^* v^j x_j s_\beta p = 0 \quad \text{for } j = -N, \dots, -1 \quad \text{og} \quad ps_\alpha^* x_j v^j s_\beta p = 0 \quad \text{for } j = 1, \dots, N$$

for alle $\alpha, \beta \in W_k^n$.

Sæt $q = \lambda^k(p) = \sum_{\alpha \in W_k^n} s_\alpha p s_\alpha^*$. Dvs. $q \neq 0$, da λ er injektiv, og ifølge Lemma 5.1.9 vil q kommutere med ethvert $x \in B_k^n$. Der gælder at,

$$qv^j x_j q = \sum_{\beta \in W_k^n} \sum_{\alpha \in W_k^n} s_\alpha p s_\alpha^* v^j x_j s_\beta p s_\beta^* = 0$$

for $j = -N, \dots, -1$ og

$$qx_j v^j q = \sum_{\beta \in W_k^n} \sum_{\alpha \in W_k^n} s_\alpha p s_\alpha^* x_j v^j s_\beta p s_\beta^* = 0$$

for $j = 1, \dots, N$.
Så $qxq = qx_0q = qF_0(x)q$ for $x \in \mathcal{A}$.
Lad $\varphi : B_k^n \mapsto qB_k^n q$ være givet ved

$$\varphi(x) = qxq, \quad x \in B_k^n.$$

Afbildningen φ er klart lineær, og da q er en projektion er $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$. Endvidere er φ multiplikativ, da q kommuterer med ethvert element i B_k^n. Da $B_k^n \cong M_{n^k}(\mathbb{C})$, som er simpel er $\ker(\varphi) = \{0\}$, idet $\varphi(1) = q$, så φ er en *-isomorfi, da afbildningen også er surjektiv. Dermed er

$$\|F_0(x)\| = \|\varphi(F_0(x))\| = \|qF_0(x)q\| = \|qxq\| \leq \|x\|.$$

Betragt nu tilfældet med $n = \infty$ og lad $x \in \mathcal{A}$.
Da findes en endelig delmængde $\mathbb{I}$ af $\mathbb{N}$, så x er en linearkombination af ord i s_i, s_i^* for $i \in \mathbb{I}$.

Vælg en isometri $\widehat{s} \in B(H)$, så $\widehat{s}^*\widehat{s} = 1$ og $\widehat{s}\widehat{s}^* = 1 - \sum_{i\in\mathbb{I}} s_i s_i^*$. Bemærk, at dette kan lade sig gøre, hvis og kun hvis projektionen $p_0 = 1 - \sum_{i\in\mathbb{I}} s_i s_i^*$ er Murray von Neumann ækvivalent med 1, hvilket gælder hvis og kun hvis $\dim(p_0) = \dim(1)$. For $j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{I}$ er $s_j s_j^* \leq p_0$, så $\dim(p_0) \geq \dim(s_j s_j^*) = \dim(s_j^* s_j) = \dim(1)(= \infty)$. Dvs. der findes et element $\widehat{s} \in B(H)$, så $\widehat{s}^*\widehat{s} = 1$ og $\widehat{s}\widehat{s}^* = p_0$.

Mængden $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{N}$ kan vælges så $1 \in \mathbb{I}$. Lad $\widetilde{\mathcal{A}}$ være *-algebraen frembragt af $\{s_i\}_{i\in\mathbb{I}} \cup \{\widehat{s}\}$. For $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$ definerer vi $\widehat{F}_i(a)$ mht. $v = s_1$ på samme måde som vi definerede $F_i(x)$. Da er $\widehat{F}_0(x) = F_0(x)$, idet x kun er givet ved et udtryk i s_i, s_i^*, hvor $i \in \mathbb{I}$. Fra tilfældet med $n < \infty$ fås eksistensen af en projektion $q \in \widetilde{\mathcal{A}}$, så

$$qxq = q\widehat{F}_0(x)q \quad \text{og} \quad \|q\widehat{F}_0(x)q\| = \|\widehat{F}_0(x)\|.$$

Dvs.

$$\|F_0(x)\| = \|\widehat{F}_0(x)\| = \|q\widehat{F}_0(x)q\| = \|qxq\| \leq \|x\|.$$

Antag nu, at $x = \sum_{i=-M}^{-1} v^i x_i' + x_0' + \sum_{i=1}^{M} x_i' v^i$ er en anden repræsentation af x. Da er $F_0(0) = F_0(x - x) = x_0 - x_0'$. Så jvf. det lige viste er $\|x_0 - x_0'\| \leq \|x - x\| = 0$, hvilket betyder, at $x_0 = x_0'$. □

Lemma 5.1.11. *Afbildningen $F_0 : \mathcal{A} \mapsto B^n$ kan udvides til en positiv lineær kontraktion $F_0' : A \mapsto B^n$.*

Bevis. Afbildningen $F_0 : \mathcal{A} \mapsto B^n$ givet ved $F_0(x) = x_0$, $x \in \mathcal{A}$ er en positiv lineær afbildning. Thi, skriv $x \in \mathcal{A}$ på formen,

$$x = \sum_{i=-N}^{-1} v^i x_i + x_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i v^i$$

med $v = s_1$ og $x_i \in B^n$. Ved udregning fås, at

$$F_0(x^*x) = \sum_{i=-N}^{-1} x_i^* x_i + x_0^* x_0 + \sum_{i=1}^{N} (v^i)^* x_i^* x_i v^i = \sum_{i=-N}^{-1} x_i^* x_i + x_0^* x_0 + \sum_{i=1}^{N} (x_i v^i)^* (x_i v^i).$$

Da hvert led i summen er positivt er $F_0(x^*x)$ positiv. At afbildningen er lineær følger klart. Proposition 5.1.7 giver endvidere, at F_0 er normaftagende, så F_0 kan udvides ved uniform kontinuitet til en normaftagende lineær afbildning $F_0' : A \mapsto B^n$. Afbildningen F_0' er positiv. For hvis $x \in A$ er positivt, findes en følge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, så $\lim_{n\to\infty} \left\| x^{\frac{1}{2}} - a_n \right\| = 0$. Dvs. $\lim_{n\to\infty} \|x - a_n^* a_n\| = 0$. Heraf fås,

$$F_0'(x) = F_0'\left(\lim_{n\to\infty} a_n^* a_n\right) = \lim_{n\to\infty} F_0'(a_n^* a_n).$$

Da $F_0 : \mathcal{A} \mapsto B^n$ er positiv, er $F_0'(a_n^* a_n)$ positiv for alle $n \in \mathbb{N}$. Lad φ være en vilkårlig tilstand på A. Da er $\varphi(\lim_{n\to\infty} F_0'(a_n^* a_n)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(F_0'(a_n^* a_n)) \geq 0$, hvilket medfører, at $F_0'(x) = \lim_{n\to\infty} F_0'(a_n^* a_n) \geq 0$. Så F_0' er en positiv afbildning. $\square$

Proposition 5.1.12. [7] *Hvis $F_0'(x^*x) = 0$ eller $F_0'(xx^*) = 0$ for $x \in \mathcal{A}$, da er $x = 0$.*

Bevis. Skriv x på formen $x = \sum_{i=-N}^{-1} v^i x_i + x_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i v^i$ med $v = s_1$ og $x_i \in B^n$. Dvs.

$$F_0'(x^*x) = \sum_{i=-N}^{-1} x_i^* x_i + x_0^* x_0 + \sum_{i=1}^{N} (x_i v^i)^*(x_i v^i).$$

Hvis $F_0'(x^*x) = 0$, da er hvert led i summen 0. For hvis φ er en vilkårlig tilstand på A, så er

$$0 = \varphi(F_0'(x^*x)) = \sum_{i=-N}^{-1} \varphi(x_i^* x_i) + \varphi(x_0^* x_0) + \sum_{i=1}^{N} \varphi((x_i v^i)^*(x_i v^i)).$$

Men da φ er positiv, vil $\varphi(x_i^* x_i) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ for $i = -N, \dots, 0$ og $\varphi((x_i v^i)^*(x_i v^i)) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ for $i = 1, \dots, N$. Så $\varphi(x_i^* x_i) = 0$ for $i = -N, \dots, 0$ og $\varphi((x_i v^i)^*(x_i v^i)) = 0$ for $i = 1, \dots, N$. Eftersom φ er en vilkårlig tilstand, giver dette specielt, at $x_i^* x_i = 0$ for $i = -N, \dots, 0$ og $(x_i v^i)^*(x_i v^i) = 0$ for $i = 1, \dots, N$. Dvs. $x_i = 0$ for $i = -N, \dots, 0$ og $x_i v^i = 0$ for $i = 1, \dots, N$. Heraf er $x = 0$. Hvis $F_0'(xx^*) = 0$, fås tilsvarende, at $x = 0$. $\square$

Antag $(\widehat{s}_i)_{i=1}^n$ er en anden familie af isometrier på et uendeligt dimensionalt Hilbertrum $\widehat{H}$, der opfylder, at $\sum_{i=1}^n \widehat{s}_i \widehat{s}_i^* = 1$ (eller $\widehat{s}_i^* \widehat{s}_j = \delta_{ij} 1_{\widehat{H}}$, hvis $n = \infty$.)
Lad $\widehat{\mathcal{A}}$ være *-algebraen frembragt af $(\widehat{s}_i)_{i=1}^n$ og lad $\widehat{A}$ være C^*-algebraen frembragt af $(\widehat{s}_i)_{i=1}^n$. For ethvert $k \in \mathbb{N}$ sættes $\widehat{B}_k^n = C^*(\{\widehat{s}_\mu \widehat{s}_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\})$ og som før lader vi $\widehat{B}^n$ være C^*-algebraen frembragt af foreningen alle $\widehat{B}_k^n$ for $k = 0, 1, \dots$.
Målet er at vise, at $A \cong \widehat{A}$, og som det første skal vi vise, at $\mathcal{A} \cong \widehat{\mathcal{A}}$.

Proposition 5.1.13. [8]

(i) *For $\mu, \nu \in W_k^n, k \in \mathbb{N}$ kan afbildningen $s_\mu s_\nu^* \mapsto \widehat{s}_\mu \widehat{s}_\nu^*$ udvides til en *-isomorfi $\psi^n : B^n \mapsto \widehat{B}^n$.*

(ii) *Afbildingen $s_i \mapsto \widehat{s}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ kan udvides til en isomorfi af *-algebraer $\varphi : \mathcal{A} \mapsto \widehat{\mathcal{A}}$.*

Bevis. (i). Antag først, at $n < \infty$. For $k \in \mathbb{N}$ er

$$B_k^n = C^*(\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}) = \operatorname{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}.$$

Tilsvarende er $\widehat{B}_k^n = \operatorname{span}\{\widehat{s}_\mu \widehat{s}_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}$. Et $x \in B_k^n$ kan entydigt skrives på formen

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*, \; m \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C}, \mu_i, \nu_i \in W_k^n, \tag{5.3}$$

[7] Inspiration fra [Hes95, Prop. 2.2.9]
[8] [Hes95, Proposition 2.2.11]

da $\{s_\mu s_\nu^*\}_{\{\mu,\nu\in W_k^n\}}$ er lineært uafhængige. Definer $\psi_k^n : B_k^n \mapsto \widehat{B}_k^n$ ved

$$\psi_k^n\left(\sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*\right) = \sum_{i=1}^m c_i \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^*.$$

Afbildningen er klart lineær, og også veldefineret pga. entydigheden i (5.3).
Der gælder, at

$$\psi_k^n(x^*) = \psi_k^n\left(\sum_{i=1}^m \overline{c_i} s_{\nu_i} s_{\mu_i}^*\right) = \sum_{i=1}^m \overline{c_i} \widehat{s}_{\nu_i} \widehat{s}_{\mu_i}^* = \psi_k^n(x)^*,$$

og for $\mu, \nu, \gamma, \delta \in W_k^n$ fås,

$$\psi_k^n(s_\mu s_\nu^* s_\gamma s_\delta^*) = \psi_k^n(\delta_{\nu\gamma} s_\mu s_\delta^*) = \delta_{\nu\gamma} \widehat{s}_\mu \widehat{s}_\delta^* = \widehat{s}_\mu \widehat{s}_\nu^* \widehat{s}_\gamma \widehat{s}_\delta^* = \psi_k^n(s_\mu s_\nu^*)\psi_k^n(s_\gamma s_\delta^*).$$

Så da ψ_k^n er lineær, er ψ_k^n også multiplikativ. Det følger heraf, at ψ_k^n er en surjektiv *-homomorfi, og da $B_k^n \cong M_{n^k}(\mathbb{C})$, som er simpel, er ψ_k^n endvidere injektiv.

Der gælder, at $B^n = \overline{\bigcup_{k=1}^\infty B_k^n}$, hvor $B_k^n \subseteq B_{k+1}^n$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Definer $\psi^n : \bigcup_{k=1}^\infty B_k^n \mapsto \bigcup_{k=1}^\infty \widehat{B}_k^n$ ved

$$\psi^n(x) = \psi_k^n(x), \; x \in \bigcup_{k=1}^\infty B_k^n,$$

hvor k er det mindste positive heltal, så $x \in B_k^n$. Da ψ_k^n er veldefineret for alle $k \in \mathbb{N}$ er ψ^n veldefineret. For $x \in \bigcup_{k=1}^\infty B_k^n$ findes et mindste $k \in \mathbb{N}$, så $x \in B_k^n \subseteq B_{k+l}^n$ for ethvert $l \in \mathbb{N}$. Skriv x på formen $x = \sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*$ for $m \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{C}$, $s_{\mu_i}, s_{\nu_i} \in W_k^n$. Dvs.

$$x = \sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} \sum_{j=1}^n s_j s_j^* s_{\nu_i}^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i (s_{\mu_i} s_j)(s_{\nu_i} s_j)^*,$$

så

$$\psi_{k+1}^n(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i (\widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_j)(\widehat{s}_{\nu_i} \widehat{s}_j)^* = \sum_{i=1}^m c_i \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^* = \psi_k^n(x).$$

Pga. entydig fremstilling af $x \in B_k^n$ som en endelig linearkombination af elementer i $s_\mu s_\nu^*$ og jvf. definitionen af ψ_k^n fås altså,

$$\psi_k^n(x) = \psi_{k+l}^n(x)$$

for ethvert $l \in \mathbb{N}$. Så da ψ_k^n er en algebraisk *-isomorfi for alle $k \in \mathbb{N}$, er ψ^n en algebraisk *-isomorfi. For lad $x, y \in \bigcup_{k=1}^\infty B_k^n$. Da findes mindste $k, l \in \mathbb{N}$, så $x \in B_k^n$ og $y \in B_l^n$. Hvis $k \le l$ er $x \in B_l^n$ og $\psi_k^n(x) = \psi_l^n(x)$. Så

$$\psi^n(xy) = \psi_l^n(xy) = \psi_l^n(x)\psi_l^n(y) = \psi_k^n(x)\psi_l^n(y) = \psi^n(x)\psi^n(y).$$

Tilsvarende fås, at ψ^n er lineær, og det følger klart at $\psi(x^*) = \psi(x)^*$ for $x \in \bigcup_{k=1}^\infty B_k^n$.
Antag $\psi^n(x) = \psi^n(y)$ for $x, y \in \bigcup_{k=1}^\infty B_k^n$. Antag, at $k \le l \in \mathbb{N}$ er mindst mulige, så $x \in B_k^n$ og $y \in B_l^n$. Da er

$$\psi_l^n(x) = \psi_k^n(x) = \psi^n(x) = \psi^n(y) = \psi_l^n(y).$$

Heraf er $x = y$, da ψ_l^n er injektiv. Eftersom ψ_k^n er surjektiv for ethvert $k \in \mathbb{N}$, er $\psi^n(\bigcup_{k=1}^\infty B_k^n) = \bigcup_{k=1}^\infty \widehat{B}_k^n$.

Vi kan dermed udvide ψ^n til en surjektiv *-homomorfi $\widetilde{\psi}^n : B^n \mapsto \widehat{B}^n$. Endvidere bliver $\widetilde{\psi}^n$ isometrisk, idet $\widetilde{\psi}^n|_{B_k^n}$ er isometrisk for alle $k \in \mathbb{N}$. Så B^n er isomorf med $\widehat{B}^n$, når n er endelig.

Lad nu $n = \infty$. Antag at $\{s_i\}_{i=1}^\infty, \{\widehat{s}_i\}_{i=1}^\infty$ er familier af isometrier på uendeligt dimensionale Hilbertrum H hhv. $\widehat{H}$, der opfylder (5.2) og sæt

$$s_i' = s_i \oplus \widehat{s}_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Da er $\{s_i'\}_{i=1}^\infty$ en familie af isometrier på Hilbertrummet $H \oplus \widehat{H}$, der opfylder, at $(s_i')^* s_j' = \delta_{ij} 1_{H \oplus \widehat{H}}$. Sæt $\mathcal{A}' = {}^*\mathrm{alg}(s_1', s_2', \ldots)$, dvs.

$$\mathcal{A}' = \mathrm{span}\{s_\mu' {s_\nu'}^* : \mu, \nu \in W_\infty^\infty\} = \mathrm{span}\{s_\mu s_\nu^* \oplus \widehat{s}_\mu \widehat{s}_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^\infty\}.$$

Ethvert $x \in \mathcal{A}'$ kan repræsenteres på formen,

$$x = \sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^*,\ m \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C}, \mu_i, \nu_i \in W_\infty^\infty,$$

så vi kan definere $\varphi : \mathcal{A}' \mapsto \mathcal{A}$ ved

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^*\right) = \sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*.$$

Det følger, at φ er lineær, og hvis $\sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^* = 0$, da er $\sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* = 0$, så φ er veldefineret. Endvidere er $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ for $x \in \mathcal{A}'$. For $i, j \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$\begin{aligned}
\varphi((s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^*)(s_{\mu_j} s_{\nu_j}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_j} \widehat{s}_{\nu_j}^*)) &= \varphi(s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* s_{\mu_j} s_{\nu_j}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^* \widehat{s}_{\mu_j} \widehat{s}_{\nu_j}^*) \\
&= s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* s_{\mu_j} s_{\nu_j}^* \\
&= \varphi(s_{\mu_i} s_{\nu_i}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^*) \varphi(s_{\mu_j} s_{\nu_j}^* \oplus \widehat{s}_{\mu_j} \widehat{s}_{\nu_j}^*).
\end{aligned}$$

Så φ er multiplikativ. Dermed er φ en surjektiv *-homomorfi, som entydigt kan udvides til en surjektiv *-homomorfi $\widetilde{\varphi} : A' \mapsto A$.

Definer B'^∞ på tilsvarende måde som vi definerede B^∞ og $\widehat{B}^\infty$. Dvs.

$$B'^\infty = C^*\left(\bigcup_{k=0}^\infty {B_k'}^\infty\right),$$

hvor ${B_0'}^\infty = \mathbb{C}1_{H \oplus \widehat{H}}$. Lad $\varphi_0 : B'^\infty \mapsto B^\infty$ være restriktionen af $\widetilde{\varphi}$ til B'^∞. Jvf. konstruktionen af φ er φ_0 surjektiv, og vi vil nu vise, at φ_0 også er injektiv.

Sæt $G_k' = C^*({B_0'}^\infty, {B_1'}^\infty, {B_2'}^\infty, \ldots, {B_k'}^\infty) \subseteq B'^\infty$. Da $(G_k')_{k=0}^\infty$ er en voksende følge af del-C^*-algebraer i B'^∞, så $B'^\infty = \overline{\bigcup_{k=1}^\infty G_k'}$, er det tilstrækkeligt at vise, at $\varphi_0|_{G_k'}$ er isometrisk.

Til beviset får vi brug for følgende påstand, som først vises senere:

Påstand 1. *${B_k}^\infty$ er et lukket to-sidet essentielt ideal i $G_k = C^*(B_0^\infty, B_1^\infty, \ldots, B_k^\infty)$.*

Antag nu til modstrid, at $\varphi_0|_{G_k'}$ ikke er injektiv, og lad I være kernen for $\varphi_0|_{G_k'}$. Da er I et lukket to-sidet ideal i G_k', og for $0 \neq x \in I$ findes mindst ét $y \in B_k'^\infty$ så $xy \neq 0$, eftersom $B_k'^\infty$

er et essentielt ideal i G'_k. Dvs. $I \cap {B'_k}^{\infty} \neq \{0\}$. Men ${B'_k}^{\infty}$ er simpel, da ${B'_k}^{\infty} \cong \mathcal{K}$, som er simpel. Så da $I \cap B'^{\infty}_k$ er et lukket to-sidet ideal i ${B'_k}^{\infty}$, fås at $I \cap {B'_k}^{\infty} = {B'_k}^{\infty}$.

Men for $\mu, \nu \in W_k^{\infty}$ er $s'_\mu {s'_\nu}^* \in {B'_k}^{\infty}$ og

$$\varphi_0(s'_\mu {s'_\nu}^*) = \varphi_0(s_\mu s_\nu^* \oplus \widehat{s}_\mu \widehat{s}_\nu^*) = s_\mu s_\nu^* \neq 0.$$

Heraf fås en modstrid med ${B'_k}^{\infty} \subseteq I$.
Dvs. $\varphi_0|G'_k$ er injektiv og dermed isometrisk, hvilket betyder, at $\varphi_0 : B'^{\infty} \mapsto B^{\infty}$ er en *-isomorfi. Tilsvarende findes en *-isomorfi $\widehat{\varphi}_0 : B'^{\infty} \mapsto \widehat{B}^{\infty}$. Dermed er $\Phi : B^{\infty} \mapsto \widehat{B}^{\infty}$ givet ved,

$$\Phi = \widehat{\varphi}_0 \circ {\varphi_0}^{-1}$$

en *-isomorfi.

Vi mangler nu bare, at vise Påstand 1:

Bevis. Da ${B_k}^{\infty}$ er en del-C^*-algebra af G_k er ${B_k}^{\infty}$ lukket. Antag $0 \leq m \leq k$. Lad $x = s_\mu {s_\nu}^*$, hvor $\mu, \nu \in W_m^{\infty}$ og lad $y = s_\gamma {s_\delta}^*$, hvor $\gamma, \delta \in W_k^{\infty}$. Da findes $\gamma' \in W_m^{\infty}$ og $\gamma'' \in W_{k-m}^{\infty}$, så $\gamma = \gamma'\gamma''$, og

$$xy = s_\mu {s_\nu}^* s_{\gamma'} s_{\gamma''} {s_\delta}^* = \delta_{\nu\gamma'} s_\mu s_{\gamma''} {s_\delta}^* \in {B_k}^{\infty}.$$

Dette medfører, at $xy \in {B_k}^{\infty}$ for alle $x \in G_k$ og alle $y \in B_k^{\infty}$. Tilsvarende fås, $yx \in {B_k}^{\infty}$, så ${B_k}^{\infty}$ er et lukket to-sidet ideal i G_k.

Vi skal herefter ved hjælp af Lemma 1-4 vise, at B_k^{∞} er et essentielt ideal.

Lemma 1. *For ethvert $k \in \mathbb{N}$ er $B_k^{\infty} + G_{k-1} = G_k$.*

Bevis. Det er oplagt, at $B_k^{\infty} + G_{k-1} \subseteq G_k$. Omvendt er G_{k-1} en del-C^*-algebra af G_k og B_k^{∞} er et lukket to-sidet ideal i G_k, så $B_k^{\infty} + G_{k-1}$ er en C^*-algebra. Lad $\psi : G_k \mapsto G_k/B_k^{\infty}$ være kvotientafbildningen. Da er $\psi(B_k^{\infty} + G_{k-1}) = \psi(G_{k-1}) = \psi(G_k)$. Så hvis $x \in G_k$, findes $y \in B_k^{\infty} + G_{k-1}$, så $\psi(x) = \psi(y)$. Dvs. $\psi(x - y) = 0$, hvilket betyder, at $x - y \in B_k^{\infty} \subseteq B_k^{\infty} + G_{k-1}$. Heraf følger, at $x \in B_k^{\infty} + G_{k-1}$. □

Lemma 2. *For alle $k \in \mathbb{N}$ findes en split-eksakt følge,*

$$0 \longrightarrow B_k^{\infty} \xrightarrow{\iota} G_k \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} G_{k-1} \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

Bevis. Lad $\iota : B_k^{\infty} \mapsto G_k$ være inklusionsafbildningen, og lad $\psi : G_k \mapsto G_k/B_k^{\infty}$ være kvotientafbildningen. Sæt $\psi_0 = \psi|_{G_{k-1}} : G_{k-1} \mapsto G_k/B_k^{\infty}$. Af Lemma 1 fås, at ψ_0 er surjektiv, og $G_{k-1} \cap B_k^{\infty} = \{0\}$ giver, at ψ_0 er injektiv. Dvs. ψ_0 er en *-isomorfi.
Sæt $\pi = \psi_0^{-1} \circ \psi$ og lad $\lambda : G_{k-1} \mapsto G_k$ være inklusionsafbildningen. Da er $\ker(\pi) = B_k^{\infty} = \mathrm{Im}(\iota)$ og for $x \in G_{k-1}$ er $(\pi \circ \lambda)(x) = \pi(x) = x$. □

Lemma 3. *Lad $k \in \mathbb{N}$ og lad $x \in G_k$. Antag $xs_i = 0$ for alle $i \in \mathbb{N}$. Da er $x = 0$.*

Bevis. For $k = 0$ er påstanden oplagt. Antag, at påstanden gælder for $n = k - 1$, og lad $x \in G_k$. Da er $0 = \pi(xs_i s_i^*) = \pi(x)s_i s_i^*$, så

$$\pi(x)s_i = \pi(x)s_i s_i^* s_i = 0.$$

Induktionsantagelsen giver, at $\pi(x) = 0$, så $x \in B_k^\infty$.

Lad $(\mu_i)_{i=1}^\infty$ være familien af alle multiindices i W_k^∞. Da er $\left(\sum_{i=1}^n s_{\mu_i} s_{\mu_i}^*\right)_{n=1}^\infty$ en approksimativ enhed for B_k^∞.

Antag $x \neq 0$. Så findes $\mu \in W_k^\infty$, så $xs_\mu s_\mu^* \neq 0$. Skriv $\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, hvor $i_j \in \mathbb{N}$ for $j = 1, \ldots, k$. Da er

$$0 \neq xs_\mu s_\mu^* = xs_{i_1}(s_{i_2} \ldots s_{i_k})s_\mu^*,$$

hvilket strider mod, at $xs_i = 0$ for alle $i \in \mathbb{N}$. □

Lemma 4. *Lad $k, l \in \mathbb{N}$ og lad $x \in G_k$. Antag at $xs_\mu = 0$ for alle $\mu \in W_l^\infty$. Da er $x = 0$.*

Bevis. Hvis $l = 1$ gælder påstanden jvf. Lemma 3. Antag $l \geq 2$ og at påstanden gælder for alle $l - 1$ og antag nu, at $xs_\mu = 0$ for alle $\mu \in W_l^\infty$. Lad $i \in \mathbb{N}$, og sæt $y = (xs_i)^*(xs_i) \in G_{k+1}$. Da er $ys_\nu = 0$ for alle $\nu \in W_{l-1}^\infty$, idet $i\nu \in W_l^\infty$ og $xs_i s_\nu = 0$ pr. antagelse. Induktionsantagelsen giver hermed, at $y = 0$. Dvs. $xs_i = 0$ for alle $i \in \mathbb{N}$. Af Lemma 3 følger nu, at $x = 0$. □

Vi ser nu, at B_k^∞ er et essentielt ideal i G_k. For antag $x \in G_k$ og $xy = 0$ for alle $y \in B_k^\infty$. Da er $xs_\mu s_\mu^* = 0$ for alle $\mu \in W_k^\infty$ og dermed er

$$xs_\mu = xs_\mu s_\mu^* s_\mu = 0.$$

Derfor er $x = 0$ jvf. Lemma 4. □

(ii). Da $\mathcal{A} = \text{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$, kan ethvert $x \in \mathcal{A}$ skrives på formen

$$x = \sum_{i=1}^m c_i s_{\mu_i} s_{\nu_i}^*,\ m \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C}, \mu_i, \nu_i \in W_\infty^n.$$

Lad $\varphi : \mathcal{A} \mapsto \widehat{\mathcal{A}}$ være givet ved

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m c_i \widehat{s}_{\mu_i} \widehat{s}_{\nu_i}^*.$$

Af konstruktionen ses, at φ er en *-homomorfi, hvis φ er veldefineret. Hvis $x = 0$ er $x^*x = xx^* = 0$, og dermed er $F_0'(x^*x) = F_0'(xx^*) = 0$. For $a \in \widehat{\mathcal{A}}$ defineres $\widehat{F_0}(a)$ mht. $\widehat{v} = \widehat{s_1}$ på samme måde som vi definerede $F_0(x)$. Med $\widehat{F_0'}$ betegner vi den entydige udvidelse af $\widehat{F_0}$ til en lineær positiv kontraktion fra $\widehat{A}$ ind i $\widehat{B}^n$.

Jvf. Definition 5.1.6 er $F_0'(x) \in \text{span}\left(\bigcup_{k=1}^\infty \{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}\right) \subseteq B^n$, så konstruktionen af φ giver dermed, at $\varphi(F_0'(x)) = \widehat{F_0'}(\varphi(x))$. Af (i) fås, at $\varphi(F_0'(x^*x)) = 0 = \varphi(F_0'(xx^*))$, så $\widehat{F_0'}(\varphi(x)^*\varphi(x)) = \widehat{F_0'}(\varphi(x^*x)) = \varphi(F_0'(x^*x)) = 0$, og tilsvarende er $\widehat{F_0'}(\varphi(x)\varphi(x)^*) = 0$.

Proposition 5.1.12 giver hermed, at $\varphi(x) = 0$, så φ er veldefineret. Et lignende argument giver, at $\varphi(x) = 0$ medfører, at $x = 0$. Så φ er injektiv. Eftersom φ også er surjektiv, er $\mathcal{A} \cong \widehat{\mathcal{A}}$. □

5.1.3 C^*-algebraen $\mathcal{L}$

Inden vi kan bevise, at A er isomorf med $\widehat{A}$, skal vi først vise, at A er isomorf med $\mathcal{L}$, der er fuldstændiggørelsen af $\mathcal{A}$ mht. $\|\cdot\|_0$, som er en C^*-norm på $\mathcal{A}$, der defineres nedenfor. Til beviset for vi brug for definitionen og egenskaber for integraler af kontinuerte funktioner med værdier i en vilkårlig C^*-algebra. De resultater vi får brug for er gennemgået i Appendix A.2.

Vi udstyrer nu $\mathcal{A}$ med den største C^*-norm,

$$\|x\|_0 = \sup\{\|\rho(x)\| : \rho \text{ er en } {}^*\text{-repræsentation af } \mathcal{A} \text{ på et separabelt Hilbertrum}\}.$$

Vi skal vise, at $\|\cdot\|_0$ er en C^*-norm. Da s_i er en isometri, gælder for en vilkårlig repræsentation ρ, at $\|\rho(s_i)\|^2 = \|\rho(s_i)^*\rho(s_i)\| = \|\rho(s_i^* s_i)\| = 1$, så $\|\rho(s_i)\| = 1$ for $i = 1, \ldots, n$. Dvs. for ethvert ord m i $\{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$ er $\|\rho(m)\| \leq 1$.
For ethvert $x \in \mathcal{A}$ findes et $N \in \mathbb{N}$, så $x = \sum_{i=1}^N a_i m_i$ for $a_i \in \mathbb{C}$ og $m_i \in \{s_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i^*\}_{i=1}^n$. Heraf er $\|\rho(x)\| \leq \sum_{i=1}^N \|a_i \rho(m_i)\| \leq \sum_{i=1}^N |a_i| < \infty$ for enhver repræsentation ρ. Altså er $\|x\|_0 \leq \sum_{n=1}^N |a_i| < \infty$.

For $a \in \mathbb{C}$ og $x \in \mathcal{A}$ er

$$\begin{aligned}
\|ax\|_0 &= \sup\{\|\rho(ax)\| : \rho \text{ er en } {}^*\text{-repræsentation af } \mathcal{A} \text{ på et separabelt Hilbertrum}\} \\
&= \sup\{|a|\|\rho(x)\| : \rho \text{ er en } {}^*\text{-repræsentation af } \mathcal{A} \text{ på et separabelt Hilbertrum}\} \\
&= |a| \sup\{\|\rho(x)\| : \rho \text{ er en } {}^*\text{-repræsentation af } \mathcal{A} \text{ på et separabelt Hilbertrum}\} \\
&= |a|\|x\|_0.
\end{aligned}$$

Trekantsuligheden er også opfyldt, thi for $x, y \in \mathcal{A}$ og for enhver repræsentation ρ er,

$$\|\rho(x+y)\| = \|\rho(x) + \rho(y)\| \leq \|\rho(x)\| + \|\rho(y)\| \leq \|x\|_0 + \|y\|_0.$$

Dvs. $\|x + y\|_0 \leq \|x\|_0 + \|y\|_0$. Tilsvarende ses, at $\|xy\|_0 \leq \|x\|_0 \|y\|_0$.

Vi skal også vise, at $\|x^*x\|_0 = \|x\|_0^2$ for alle $x \in \mathcal{A}$. For enhver repræsentation ρ og alle $x \in \mathcal{A}$ er

$$\|x^*x\|_0 \geq \|\rho(x^*x)\| = \|\rho(x)^*\rho(x)\| = \|\rho(x)\|^2,$$

så $\|x^*x\|_0 \geq \|x\|_0^2$ og

$$\|\rho(x^*x)\| = \|\rho(x)^*\rho(x)\| \leq \|\rho(x)^*\|\|\rho(x)\| = \|\rho(x)\|^2,$$

så $\|x^*x\|_0 \leq \|x\|_0^2$.

Da $\|\rho(x)\| \geq 0$ for alle repræsentationer ρ og alle $x \in \mathcal{A}$, er $\|x\|_0 \geq 0$ for alle $x \in \mathcal{A}$. Hvis $\|x\|_0 = 0$, da er $\|x\| \leq \|x\|_0 = 0$, hvilket betyder, at $x = 0$. Omvendt, hvis $x = 0$ er $\rho(x) = 0$ for enhver repræsentation ρ, så $\|x\|_0 = 0$.

Hermed er vist, at $\|\cdot\|_0$ er en C^*-norm på $\mathcal{A}$.

Lemma 5.1.14. *Lad $\mathcal{L}$ være fuldstændiggørelsen af $\mathcal{A}$ mht. $\|\cdot\|_0$. Den positive lineære kontraktion $F_0 : \mathcal{A} \mapsto B^n$ kan udvides til en positiv lineær kontraktion $\widetilde{F_0} : \mathcal{L} \mapsto B^n$.*

Bevis. Jvf. Proposition 5.1.7, fås at $\|F_0(x)\| \leq \|x\| \leq \|x\|_0$ for $x \in \mathcal{A}$. Så F_0 er også normaftagende mht. $\|\cdot\|_0$, og kan dermed udvides ved uniform kontinuitet til en lineær, normaftagende, afbildning $\widetilde{F_0} : \mathcal{L} \mapsto B^n$. At afbildningen er positiv fås på tilsvarende måde som i beviset for Lemma 5.1.11. □

Lad $t \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, og sæt $\widehat{s_i} = ts_i$ for $i = 1, \ldots, n$. For alle i gælder, at

$$\widehat{s_i}^* \widehat{s_i} = \bar{t}s_i^* ts_i = |t|^2 s_i^* s_i = 1.$$

Så $\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_n$ er en følge af isometrier i $\mathcal{A}$, der opfylder, at

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{s_i}\widehat{s_i}^* = \sum_{i=1}^{n} ts_i\bar{t}s_i^* = |t|^2 \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1$$

for $n < \infty$, og at $\widehat{s_i}^* \widehat{s_j} = \delta_{ij}1$, hvis $n = \infty$.
Af Proposition 5.1.13 kan afbildningen $s_i \mapsto ts_i$ for ethvert $t \in \mathbb{T}$ udvides til en *-homomorfi $\lambda_t : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$. Hvis ρ er en vilkårlig *-repræsentation af $\mathcal{A}$ på et separabelt Hilbertrum, så er $\rho \circ \lambda_t$ det også. Dvs.

$$\|\rho(\lambda_t(x))\| \leq \|x\|_0, \text{ for alle } x \in \mathcal{A}.$$

Dette medfører, at $\|\lambda_t(x)\|_0 \leq \|x\|_0$ for alle $x \in \mathcal{A}$. Heraf kan λ_t udvides ved uniform kontinuitet til en *-homomorfi $\widetilde{\lambda_t} : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$. For $i = 1, \ldots, n$ er

$$\lambda_t\lambda_{\bar{t}}(s_i) = \lambda_t(\bar{t}s_i) = \bar{t}\lambda_t(s_i) = \bar{t}ts_i = s_i = \lambda_{\bar{t}}\lambda_t(s_i).$$

Da $\mathcal{A} = {}^*\mathrm{alg}(s_1, \ldots, s_n)$, og λ_t er en *-homomorfi, fås heraf at $\lambda_t\lambda_{\bar{t}} = \lambda_{\bar{t}}\lambda_t = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Et grænseværdiargument giver nu, at $\widetilde{\lambda}_t\widetilde{\lambda}_{\bar{t}} = \widetilde{\lambda}_{\bar{t}}\widetilde{\lambda}_t = \mathrm{id}_{\mathcal{L}}$, hvilket betyder, at $\widetilde{\lambda}_t$ er en automorfi.

Proposition 5.1.15. [9] *For $x \in \mathcal{L}$ gælder, at*

$$\widetilde{F_0}(x) = \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(x)dt,$$

hvor dt er Haarmålet på $\mathbb{T}$. Specielt er $\widetilde{F_0} : \mathcal{L} \mapsto B^n$ tro, dvs. $x = 0$, hvis $x \geq 0$ og $\widetilde{F_0}(x) = 0$.

Bevis. Vi skal for $x \in \mathcal{L}$ først vise, at afbildningen $t \mapsto \widetilde{\lambda}_t(x)$, $(\mathbb{T} \mapsto \mathcal{L})$ er kontinuert. For $\mu, \nu \in W_\infty^n$ sæt $y = s_\mu s_\nu^*$, og sæt $r = l(\mu) - l(\nu)$. Da $\widetilde{\lambda}_t : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$ er multiplikativ, er

$$\widetilde{\lambda}_t(y) = \lambda_t(y) = t^{l(\mu)} s_\mu (\bar{t})^{l(\nu)} s_\nu^* = t^{l(\mu)} (\bar{t})^{l(\nu)} y.$$

Hvis $l(\mu) \geq l(\nu)$ er $\widetilde{\lambda}_t(y) = t^r y$, og hvis $l(\mu) < l(\nu)$ er $\widetilde{\lambda}_t(y) = (\bar{t})^{-r} y = t^r y$.
Da $\mathcal{A} = \mathrm{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$ er $\widetilde{\lambda}_t(x)$ et polynomium i t for $x \in \mathcal{A}$, og dermed er $t \mapsto \widetilde{\lambda}_t(x)$ kontinuert for $x \in \mathcal{A}$. Lad nu $x \in \mathcal{L}$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes et $x' \in \mathcal{A}$, så $\|x - x'\|_0 < \varepsilon$, og da $t \mapsto \widetilde{\lambda}_t(x')$ er kontinuert findes $\delta > 0$ for alle $s \in \mathbb{T}$, så $\left\|\widetilde{\lambda}_t(x') - \widetilde{\lambda}_s(x')\right\|_0 < \varepsilon$ for $|t - s| < \delta$. Heraf fås, at

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\lambda}_t(x) - \widetilde{\lambda}_s(x)\right\|_0 &\leq \left\|\widetilde{\lambda}_t(x) - \widetilde{\lambda}_t(x')\right\|_0 + \left\|\widetilde{\lambda}_t(x') - \widetilde{\lambda}_s(x')\right\|_0 + \left\|\widetilde{\lambda}_s(x') - \widetilde{\lambda}_s(x)\right\|_0 \\
&\leq 2\left\|x - x'\right\|_0 + \left\|\widetilde{\lambda}_t(x') - \widetilde{\lambda}_s(x')\right\|_0 \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

[9] [Hes95, Proposition 2.2.14]

for $|t-s|<\delta$.
Dvs. $t \mapsto \widetilde{\lambda}_t(x)$ er kontinuert for alle $x \in \mathcal{L}$.

Betragt igen $y = s_\mu s_\nu^*$. Hvis $r = l(\mu) - l(\nu) \neq 0$ findes $s \in \mathbb{T}$, så $s^r = -1$. Da er

$$\int_{\mathbb{T}} t^r dt = \int_{\mathbb{T}} (st)^r dt = \int_{\mathbb{T}} -t^r dt = -\int_{\mathbb{T}} t^r dt,$$

hvilket medfører, at $\int_{\mathbb{T}} t^r dt = 0$.
Der findes et entydigt $z \in \mathcal{L}$, så der for alle $\varphi \in \mathcal{L}^*$ gælder, at $\varphi(z) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(\widetilde{\lambda}_t(y))dt$. Endvidere er

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(\widetilde{\lambda}_t(y))dt = \int_{\mathbb{T}} \varphi(t^r y)dt = \varphi(y) \int_{\mathbb{T}} t^r dt = \begin{cases} 0 & \text{for } r \neq 0 \\ \varphi(y) & \text{for } r = 0. \end{cases}$$

Men da $\widetilde{F}_0(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } r \neq 0 \\ y & \text{for } r = 0 \end{cases}$, er $\varphi\left(\widetilde{F}_0(y)\right) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(\widetilde{\lambda}_t(y))dt$, hvilket betyder, at $\widetilde{F}_0(y) = \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(y)dt$.
Dvs. $\int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(x)dt = \widetilde{F}_0(x)$ for alle $x \in \mathcal{A} = \operatorname{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$, idet $x \mapsto \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(x)dt$ og $\widetilde{F}_0$ er lineære afbildninger.

Der gælder, at

$$\left\| \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(x)dt \right\|_0 \leq \int_{\mathbb{T}} \|\widetilde{\lambda}_t(x)\|_0 dt \leq \int_{\mathbb{T}} \|x\|_0 dt = \|x\|_0 \int_{\mathbb{T}} dt = \|x\|_0$$

for alle $x \in \mathcal{L}$. Så da afbildningen $x \mapsto \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(x)dt$ også er normformindskende, er den kontinuert. Et grænseværdiargument giver derfor, $\int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(x)dt = \widetilde{F}_0(x)$ for alle $x \in \mathcal{L}$.

Antag nu, at $x \in \mathcal{L}$ er positiv. For at vise, at $\widetilde{F}_0(x) = 0$ medfører, at $x = 0$ vil vi vise det kontrapositive, dvs. $x \neq 0$ medfører at $\widetilde{F}_0(x) \neq 0$. Hvis x er positiv og $x \neq 0$ er $\widetilde{\lambda}_t(x)$ positiv og $\widetilde{\lambda}_t(x) \neq 0$ for alle $t \in \mathbb{T}$, idet $\widetilde{\lambda}_t$ er en automorfi. Der findes altså en tilstand φ på $\mathcal{L}$, der opfylder, at $\varphi\left(\widetilde{\lambda}_t(x)\right) > 0$ for alle $t \in \mathbb{T}$. Det følger, at

$$\varphi\left(\widetilde{F}_0(x)\right) = \varphi\left(\int_{\mathbb{T}} \widetilde{\lambda}_t(x)dt\right) = \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\widetilde{\lambda}_t(x)\right) dt > 0.$$

Så da $\varphi\left(\widetilde{F}_0(x)\right) \neq 0$ for en tilstand φ på $\mathcal{L}$, er $\widetilde{F}_0(x) \neq 0$. □

Proposition 5.1.16. [10] *$\mathcal{L}$ er kanonisk isomorf med A.*

Bevis. Da identitetsafbildningen $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ er en surjektiv, lineær afbildning, og da $\|\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(x)\| = \|x\| \leq \|x\|_0$ kan $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ udvides til en surjektiv lineær, normaftagende afbildning $\pi : \mathcal{L} \mapsto A$, idet $\mathcal{A}$ er en tæt delmængde i hhv. $\mathcal{L}$ og A. Vi mangler at vise, at π er injektiv. Så lad x være et positivt element i $\mathcal{L}$ og antag $\pi(x) = 0$. Da er $F_0'(\pi(x)) = 0$, hvilket medfører,

[10] [Cun77, Proposition 1.11]

at $\widetilde{F}_0(x) = 0$. Thi, find $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, så $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_0 = 0$. Dvs.

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_0(x) &= \widetilde{F}_0\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \widetilde{F}_0(x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} F_0(\pi(x_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} F_0'(\pi(x_n)) \\
&= F_0'\left(\pi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right) \\
&= F_0'(\pi(x)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposition 5.1.15 giver således, at $x = 0$. Da π er kontinuert er π endvidere en *-homomorfi, da $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ er det. Så hvis $\pi(x) = 0$ for et vilkårligt element $x \in \mathcal{L}$, er $\pi(x^*x) = \pi(x)^*\pi(x) = 0$. Det lige viste giver således, at $x^*x = 0$, og dermed er $x = 0$. □

Sætning 5.1.17. [11] *Hvis $\{\widehat{s}_i\}_{i=1}^n$ er en anden familie af isometrier, der opfylder at $\sum_{i=1}^n \widehat{s}_i\widehat{s}_i^* = 1$ (eller $\widehat{s}_i^*\widehat{s}_j = \delta_{ij}1$, hvis $n = \infty$), da er $\widehat{A}$ kanonisk isomorf med A. (Dvs. afbildningen $s_i \mapsto \widehat{s}_i$ udvides til en isomorfi fra $C^*(s_1, \dots, s_n)$ på $C^*(\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_n)$.)*

Bevis. Proposition 5.1.13 og Proposition 5.1.16 giver eksistensen af *-isomorfier $\pi : \mathcal{L} \mapsto A$, og $\widehat{\pi} : \mathcal{L} \mapsto \widehat{A}$. Så $\widehat{\pi} \circ \pi^{-1} : A \mapsto \widehat{A}$ er en *-isomorfi. □

Sætning 5.1.17 retfærdiggør hermed definitionen af $\mathcal{O}_n = C^*(s_1, \dots, s_n)$, eftersom $C^*(s_1, \dots, s_n)$ er uafhængig af valget af isometrier, der opfylder at $\sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1$, hvis n er endelig og $s_i^* s_j = \delta_{ij}1$, hvis $n = \infty$.

5.2 Egenskaber for $\mathcal{O}_n$

I dette afsnit skal vi vise, at $\mathcal{O}_n$, er en purely infinite og simpel C^*-algebra for alle $n \geq 2$. Som det første skal vi vise en stærk egenskab for $\mathcal{O}_n$, når n er endelig, der medfører at $\mathcal{O}_n$ er simpel. Resultater, der omhandler purely infinite C^*-algebraer er gennemgået i Appendix A.3.

Sætning 5.2.1. [12] *Lad n være endelig og lad $x \neq 0$ være et vilkårligt element i $\mathcal{O}_n$. Da findes elementer $a, b \in \mathcal{O}_n$, så $axb = 1$.*

Bevis. Da $x^*x \neq 0$ giver Proposition 5.1.15, at $\widetilde{F}_0(x^*x) \neq 0$. Antag uden tab af generalitet, at $\left\|\widetilde{F}_0(x^*x)\right\| = 1$. Som før kan vi da $\mathcal{A}$ er tæt i $\mathcal{O}_n$ finde et positivt element $y \in \mathcal{A}$, så der for ethvert $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ gælder, at $\|x^*x - y\| < \varepsilon$. Dvs.

$$\left\|\widetilde{F}_0(x^*x) - \widetilde{F}_0(y)\right\| = \left\|\widetilde{F}_0(x^*x - y)\right\| \leq \|x^*x - y\| < \varepsilon,$$

[11] [Cun77, Theorem 1.12]
[12] [Cun77, Theorem 1.13]

så $\left\|\widetilde{F}_0(x^*x)\right\| + \varepsilon \geq \left\|\widetilde{F}_0(y)\right\| \geq \left\|\widetilde{F}_0(x^*x)\right\| - \varepsilon$. Heraf fås,

$$1 + \varepsilon \geq \left\|\widetilde{F}_0(y)\right\| \geq 1 - \varepsilon.$$

Som i beviset for Proposition 5.1.7 findes $r \in \mathbb{N}$ og en projektion $q \in B_r^n$, så $\left\|\widetilde{F}_0(y)\right\| = \left\|q\widetilde{F}_0(y)q\right\|$ og $qyq = q\widetilde{F}_0(y)q$. Da $\widetilde{F}_0(y) \in B_{k'}^n$ for et $k' \in \mathbb{N}$ og $q \in B_r^n$, findes et $k \in \mathbb{N}$, så $q\widetilde{F}_0(y)q \in B_k^n$, idet $B_1^n \subseteq B_2^n \subseteq B_3^n \subseteq \dots$.

Eftersom $B_k^n \cong M_{n^k}(\mathbb{C})$ og qyq er positiv, findes én-dimensionale orthogonale projektioner $r_1, \dots, r_{n^k} \in B_k^n$ og $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^k} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, så

$$qyq = \sum_{i=1}^{n^k} \lambda_i r_i.$$

Lad $1 \leq i_0 \leq n^k$ være givet, så $\lambda_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq n^k}\{\lambda_i\}$. Der gælder, at $\lambda_{i_0} = \|qyq\|$, da $\sigma(qyq) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$, og spektralradius af qyq er lig med normen af qyq. Så $1 - \varepsilon \leq \lambda_{i_0} \leq 1 + \varepsilon$.
Da $s_1^k s_1^{*k}$ er en én-dimensional projektion i B_k^n er $s_1^k s_1^{*k} \sim r_{i_0}$. Så der findes en partiel isometri $u \in B_k^n$, så $u^*u = r_{i_0}$ og $uu^* = s_1^k s_1^{*k}$. Sæt $a' = s_1^{*k}uq$. Dvs.

$$\begin{aligned}
a'ya'^* &= s_1^{*k}uqyqu^*s_1^k \\
&= s_1^{*k}u\sum_{i=1}^{n^k}\lambda_i r_i u^* s_1^k \\
&= s_1^{*k}ur_{i_0}\sum_{i=1}^{n^k}\lambda_i r_i u^* s_1^k \\
&= s_1^{*k}\lambda_{i_0}ur_{i_0}u^*s_1^k \\
&= \lambda_{i_0}s_1^{*k}uu^*uu^*s_1^k \\
&= \lambda_{i_0}s_1^{*k}s_1^k s_1^{*k}s_1^k \\
&= \lambda_{i_0}1.
\end{aligned}$$

Heraf fås, at

$$\begin{aligned}
\|a'x^*xa'^* - 1\| &\leq \|a'x^*xa'^* - a'ya'^*\| + \|a'ya'^* - 1\| \\
&\leq \|a'\|^2\|x^*x - y\| + \|a'ya'^* - 1\| \\
&\leq \varepsilon + |1 - \lambda_{i_0}| \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Så $1 \notin \sigma(a'x^*xa'^* - 1)$, hvilket betyder, at $0 \notin \sigma(a'x^*xa'^*)$. Altså findes et $b' \in \mathcal{O}_n$, så $a'x^*xa'^*b' = 1$. Sæt nu $a = a'x^*$ og $b = a'^*b'$ og det ønskede er vist. □

Korollar 5.2.2. *For $2 \leq n < \infty$ er $\mathcal{O}_n$ en simpel C^*-algebra.*

Bevis. Antag $I \neq \{0\}$ er et lukket to-sidet ideal i $\mathcal{O}_n$. Lad $x \neq 0$ være et element i I. Jvf. Sætning 5.2.1, findes $a, b \in \mathcal{O}_n$, så $axb = 1$. Hermed vil $1 \in I$, så $I = \mathcal{O}_n$. □

Sætning 5.2.3. *For $2 \leq n < \infty$ er $\mathcal{O}_n$ en purely infinite C^*-algebra.*

Bevis. Lad $x \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}$. Da giver Sætning 5.2.1 eksistensen af $a, b \in \mathcal{O}_n$, så $axb = 1$. Hvis $y \in \mathcal{O}_n$ fås, at $y = (ya)xb$. Så Sætning A.3.3 giver, at $\mathcal{O}_n$ er purely infinite. $\square$

Der gælder analoge resultater for $\mathcal{O}_\infty$, som vi skal vise, i det følgende. Men først får vi brug for en indledende proposition.

Proposition 5.2.4. [13] *Lad $n < \infty$ og lad $v_1, \ldots, v_n$ være isometrier på et uendeligt dimensionalt Hilbertrum H, så $\sum_{i=1}^n v_i v_i^* \leq 1$. Da genererer projektionen $p = 1 - \sum_{i=1}^n v_i v_i^*$ et lukket to-sidet ideal I i $C^*(v_1, \ldots, v_n)$, som er isomorf med $\mathcal{K}$.*
Kvotienten $C^*(v_1, \ldots, v_n)/I$ er isomorf med $\mathcal{O}_n$.

Bevis. Lad $\mu \in W_\infty^n$ være givet, og definer v_μ på samme måde, som vi tidligere definerede s_μ. Sæt

$$J = \operatorname{span}\{v_\mu p v_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}.$$

Da er $I = \overline{J}$ klart et afsluttet to-sidet ideal i $C^*(v_1, \ldots, v_n)$, og endvidere er I indeholdt i ethvert afsluttet to-sidet ideal M i $C^*(v_1, \ldots, v_n)$, der indeholder p. Thi, $v_\mu p v_\nu^* \in M$ for alle $\mu, \nu \in W_\infty^n$ og dermed er $J \subseteq M$. Så da M er afsluttet er $I \subseteq M$.

Betragt nu produktet $x = (v_\mu p v_\nu^*)(v_\alpha p v_\beta^*)$ for $\mu, \nu, \alpha, \beta \in W_\infty^n$. Jvf. Lemma 5.1.3 findes entydigt bestemte $\gamma, \delta \in W_\infty^n$, så $v_\nu^* v_\alpha = v_\gamma v_\delta^*$. Da $pv_i = 0$ for $i = 1, \ldots, n$ er $pv_\gamma v_\delta^* p \neq 0$, hvis og kun hvis $v_\gamma v_\delta^* = 1$, hvilket gælder hvis og kun hvis $\nu = \alpha$. Dermed er

$$(v_\mu p v_\nu^*)(v_\alpha p v_\beta^*) = \delta_{\nu\alpha} v_\mu p v_\beta^* \quad \text{og} \quad (v_\mu p v_\nu^*)^* = v_\nu p v_\mu^*.$$

Mængden $\{v_\mu p v_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$ er hermed et selv-adjungeret system af matrixenheder, der genererer J.

Lad $\{E_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu \in W_\infty^n}$ være et selv-adjungeret system af matrixenheder, der frembringer $\mathcal{K}$, og definer en afbildning $v_\mu p v_\nu^* \mapsto E_{\mu\nu}$.
Ethvert $x \in J$ kan entydigt skrives på formen

$$x = \sum_{i=1}^m c_i v_{\mu_i} p v_{\nu_i}^* \quad c_i \in \mathbb{C}, \mu_i, \nu_i \in W_\infty^n, \tag{5.5}$$

idet $\{v_\mu p v_\nu^*\}_{\{\mu,\nu \in W_\infty^n\}}$ er lineært uafhængige. Så vi kan definere en afbildning $\alpha : J \mapsto \operatorname{span}\{E_{\mu\nu} : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$ ved

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^m c_i v_{\mu_i} p v_{\nu_i}^*\right) = \sum_{i=1}^m c_i E_{\mu_i \nu_i}.$$

Pga. entydigheden i (5.5) fås, at α er veldefineret, og da $\{E_{\mu,\nu}\}_{\{\mu,\nu \in W_\infty^n\}}$ er lineært uafhængige, fås også at α er injektiv og dermed isometrisk. Endvidere er α en *-homomorfi, så α kan ved uniform kontinuitet udvides til en isometrisk *-homomorfi $\widetilde{\alpha} : I \mapsto \mathcal{K}$.
Da $\widetilde{\alpha}(I) = \overline{\alpha(J)} = \overline{\operatorname{span}\{E_{\mu\nu} : \mu, \nu \in W_\infty^n\}} = \mathcal{K}$, fås, at $I \cong \mathcal{K}$.

[13] [Cun77, Proposition 3.1]

Vi mangler nu at vise, at $C^*(v_1 \dots, v_n)/I \cong \mathcal{O}_n$. Lad $\pi : C^*(v_1, \dots, v_n) \mapsto C^*(v_1, \dots, v_n)/I$ være kvotientafbildningen. Da er π en surjektiv *-homomorfi, så

$$C^*(v_1, \dots, v_n)/I = \pi(C^*(v_1, \dots, v_n)) = C^*(\pi(v_1), \dots, \pi(v_n)).$$

Familien $\pi(v_1), \dots, \pi(v_n)$ er også en familie af isometrier, og da $\pi(p) = 0$ fås,

$$0 = \pi(1) - \sum_{i=1}^{n} \pi(v_i v_i^*) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \pi(v_i)\pi(v_i)^*.$$

Så $\sum_{i=1}^{n} \pi(v_i)\pi(v_i)^* = 1$. Heraf følger af Sætning 5.1.17, at $C^*(v_1, \dots, v_n)/I \cong \mathcal{O}_n$. □

Bemærk, med de samme antagelser som i Proposition 5.2.4, at for givet $i \in \{1, \dots, n\}$ og $\mu, \nu \in W_\infty^n$, findes et $k \in \mathbb{N}$, så $v_i^{*k} v_\mu p v_\nu^* v_i^k = 0$. Thi, der findes entydige $\gamma, \delta \in W_\infty^n$, så $v_\nu^* v_i^k = v_\gamma v_\delta^*$. Som før er $p v_\nu^* v_i^k \neq 0$, hvis og kun hvis $v_\nu = v_i^k$.
Så da $I = \overline{\text{span}\{v_\mu p v_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}}$ fås altså, $v_i^{*k} a v_i^k \to 0$ for $k \to \infty$ for alle $a \in I$.

Vi kan nu vise en version af Sætning 5.2.1 for $\mathcal{O}_\infty$, hvilket også medfører, at $\mathcal{O}_\infty$ er simpel.

Sætning 5.2.5. [14] *Lad $x \neq 0$ være et vilkårligt element i $\mathcal{O}_\infty$. Da findes $a, b \in \mathcal{O}_\infty$, så $axb = 1$.*

Bevis. Antag x er et positivt element i $\mathcal{O}_\infty$ og $\left\|\widetilde{F}_0(x)\right\| = 1$. For ethvert $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ findes et positivt element $y \in \mathcal{A} = {}^*\text{alg}(s_1, s_2, \dots)$, så $\|x - y\| < \varepsilon$. Antag uden tab af generalitet at $\left\|\widetilde{F}_0(y)\right\| = 1$.
Da y er en endelig linearkombination af ord i $\{s_i\}_{i=1}^\infty \cup \{s_i^*\}_{i=1}^\infty$ findes en endelig delmængde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{N}$, så y er en linearkombination af ord i $\{s_i\}_{i \in \mathbb{I}} \cup \{s_i^*\}_{i \in \mathbb{I}}$.
Antag at $\mathcal{O}_\infty$ er repræsenteret på et Hilbertrummet H og find som før en isometri $\widehat{s}$ på H, så $\widehat{s}\widehat{s}^* = 1 - \sum_{i \in \mathbb{I}} s_i s_i^*$. Vælg nu et $i_0 \in \mathbb{N}$, så $i_0 \notin \mathbb{I}$, og sæt

$$A_1 = C^*(\{s_i\}_{i \in \mathbb{I}}, \widehat{s}) \quad \text{og} \quad A_2 = C^*(\{s_i\}_{i \in \mathbb{I}}, s_{i_0}).$$

Ifølge Proposition 5.2.4 genererer projektionen $p = 1 - \sum_{i \in \mathbb{I}} s_i s_i^* - s_{i_0} s_{i_0}^*$ et ikke-trivielt tosidet ideal I i A_2. Af Proposition 5.2.4 følger også, at $A_2/I \cong \mathcal{O}_n$, hvor $n = |\mathbb{I}| + 1$. Men da $\sum_{i \in \mathbb{I}} s_i s_i^* + \widehat{s}\widehat{s}^* = 1$ følger af Sætning 5.1.17, at $A_2/I \cong A_1$.

Lad $\rho : A_2 \mapsto A_2/I$ være kvotientafbildningen. Dvs. $\{\rho(s_i)\}_{i \in \mathbb{I}} \cup \rho(s_{i_0})$ er en mængde af isometrier i A_2/I, der opfylder, $\sum_{i \in \mathbb{I}} \rho(s_i)\rho(s_i)^* + \rho(s_{i_0})\rho(s_{i_0})^* = 1$.
Vi kan vælge $\mathbb{I}$, så $1 \in \mathbb{I}$, og definer $\widehat{F}_0$ i A_1 mht. s_1 og F_0' i A_2/I mht. $\rho(s_1)$, som vi definerede $\widetilde{F}_0$ i $\mathcal{O}_n$. Dermed er $\widehat{F}_0(y) = \widetilde{F}_0(y)$, da y kun er givet ved et udtryk i s_i, s_i^* for $i \in \mathbb{I}$. Så $\|F_0'(\rho(y))\| = \left\|\widehat{F}_0(y)\right\| = \left\|\widetilde{F}_0(y)\right\| = 1$.

Dette medfører, at $\|\rho(y)\| \geq 1$, og $\rho(y)$ er altså et positivt element i $(A_2/I) \setminus \{0\}$. Så da $A_2/I \cong \mathcal{O}_n$, der er en unital, purely infinite C^*-algebra, findes jvf. Proposition A.3.4 $a, b \in A_2/I$, så $1 = a\rho(y)b$ med $\|a\| = \|b\| \leq \left(\frac{\|1\|}{\|\rho(y)\|}\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$. Da ρ er surjektiv findes elementer $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in A_2$, så $\rho(\widetilde{a}) = a$, $\rho(\widetilde{b}) = b$ og $\|\widetilde{a}\| = \|a\|$, $\|\widetilde{b}\| = \|b\|$.

[14] [Cun77, Theorem 3.4]

Elementet $\widetilde{a}y\widetilde{b} \in A_2$, og $\rho(\widetilde{a}y\widetilde{b}) = \rho(\widetilde{a})\rho(y)\rho(\widetilde{b}) = a\rho(y)b = 1$, så $\widetilde{a}y\widetilde{b}-1 \in I$. Af bemærkningen efter Proposition 5.2.4 fås hermed, $s_i^{*k}(\widetilde{a}y\widetilde{b})s_i^k \to 1$ for $k \to \infty$ for alle $i \in \mathbb{I}$. Der gælder, at

$$\|s_i^{*k}(\widetilde{a}x\widetilde{b})s_i^k - s_i^{*k}(\widetilde{a}y\widetilde{b})s_i^k\| \leq \|\widetilde{a}\|\|x-y\|\|\widetilde{b}\| \leq (1+\varepsilon)^2\varepsilon < 1.$$

Som i Sætning 5.2.1 viser det, at $s_i^{*k}(\widetilde{a}x\widetilde{b})s_i^k$ er invertibel for et tilstrækkeligt stort k. Samme argument som i beviset for Sætning 5.2.1 giver nu det ønskede for $x \geq 0$. For et vikårligt $0 \neq x \in \mathcal{O}_\infty$ er $x^*x \neq 0$ positiv. Så der findes altså $a', b' \in \mathcal{O}_\infty$, så $a'x^*xb' = 1$. Sæt nu $a = a'x^*$ og $b = b'$ og det ønskede er vist. $\square$

Af Sætning 5.2.5 fås følgende korollar, som bevises på tilsvarende måde som i tilfældet med $n < \infty$.

Korollar 5.2.6. *C^*-algebraen $\mathcal{O}_\infty$ er simpel og purely infinite.*

5.3 C^*-algebraen $\mathcal{O}_2$

Vi skal i dette afsnit vise, at $\mathcal{O}_2$ er stærkt selv-absorberende. Første skridt på vejen er at vise, at to vilkårlige *-homomorfier $\varphi, \psi : \mathcal{O}_2 \mapsto A$, er approksimativt unitært ækvivalente når A er en unital, simpel og purely infinite C^*-algebra. Til beviset får vi brug for følgende lemma.

Lemma 5.3.1. [15] *Lad A være en unital C^*-algebra.*

(i) *Lad u være et unitært element i A og lad s være en isometri i A. Da er $sus^* + (1-ss^*)$ unitær og $[u]_1 = [sus^* + (1-ss^*)]_1$.*

(ii) *Lad $u_1, \ldots, u_n$ være unitære elementer i A og lad $s_1, \ldots, s_n$ være isometrier i A, så rangeprojektionerne $s_1s_1^*, \ldots, s_ns_n^*$ er parvis orthogonale. Da er*

$$u = s_1u_1s_1^* + s_2u_2s_2^* + \cdots + s_nu_ns_n^* + (1 - s_1s_1^* - \cdots - s_ns_n^*)$$

unitær, og $[u]_1 = [u_1]_1 + [u_2]_1 + \cdots + [u_n]_1$.

Bevis. (i). Det gælder, at

$$\begin{aligned}
&(sus^* + (1-ss^*))(sus^* + (1-ss^*))^* \\
&= (sus^* + (1-ss^*))(su^*s^* + (1-ss^*)) \\
&= sus^*su^*s^* + sus^* - sus^*ss^* + su^*s^* - ss^*su^*s^* + 1 - ss^* - ss^* + ss^*ss^* \\
&= ss^* + sus^* - sus^* + su^*s^* - su^*s^* + 1 - ss^* - ss^* + ss^* \\
&= 1,
\end{aligned}$$

og tilsvarende er $(sus^* + (1-ss^*))^*(sus^* + (1-ss^*)) = 1$. Sæt nu

$$v = \begin{pmatrix} s & 1-ss^* \\ 0 & s^* \end{pmatrix}.$$

[15] [MRL, Exercise 8.9]

Da er v unitær i $M_2(A)$ og

$$v\mathrm{diag}(u,1)v^* = \begin{pmatrix} sus^* + (1-ss^*) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dvs.

$$[u]_1 = [\mathrm{diag}(u,1)]_1 = [v\mathrm{diag}(u,1)v^*]_1 = [\mathrm{diag}(su^*s + (1-ss^*),1)]_1 = [sus^* + (1-ss^*)]_1.$$

(ii). Det gælder, at

$$\begin{aligned} u^*u &= \left(\sum_{i=1}^n (s_iu_i^*s_i^* - s_is_i^*) + 1\right)\left(\sum_{j=1}^n (s_ju_js_j^* - s_js_j^*) + 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^n s_is_i^* - \sum_{i=1}^n s_iu_i^*s_i^* + \sum_{i=1}^n s_iu_i^*s_i^* - \sum_{i=1}^n s_iu_is_i^* + \sum_{i=1}^n s_is_i^* - \sum_{i=1}^n s_is_i^* + \sum_{j=1}^n s_ju_js_j^* \\ &\quad - \sum_{j=1}^n s_js_j^* + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tilsvarende er $uu^* = 1$, så u er unitær. Ved at benytte, at $s_i^*s_j = \delta_{ij}1$ fås,

$$u = \prod_{i=1}^n (s_iu_is_i^* + (1 - s_is_i^*)),$$

så

$$[u]_1 = \sum_{i=1}^n [s_iu_is_i^* + (1-s_is_i^*)]_1 = [u_1]_1 + [u_2]_1 + \cdots + [u_n]_1$$

jvf. (i). □

Lad A være en unital C^*-algebra, og lad $2 \leq n < \infty$. Af den universelle egenskab af Cuntz-algebraen $\mathcal{O}_n$, og da $\mathcal{O}_n$ er simpel findes en unital *-homomorfi $\varphi : \mathcal{O}_n \mapsto A$, hvis og kun hvis A indeholder isometrier $t_1, \ldots, t_n$, der opfylder, at $\sum_{i=1}^n t_it_i^* = 1_A$.
For lad $(s_i)_{i=1}^n$ være de kanoniske frembringere for $\mathcal{O}_n$. Hvis A indeholder n isometrier, der opfylder, $\sum_{i=1}^n t_it_i^* = 1_A$, følger af den universelle egenskab (Sætning 5.1.17), at afbildningen $s_i \mapsto t_i$ udvides til en *-isomorfi $\varphi : \mathcal{O}_n \mapsto C^*(t_1, \ldots, t_n) \subseteq A$. Omvendt, hvis der findes en unital *-homomorfi $\varphi : \mathcal{O}_n \mapsto A$, er φ injektiv, da $\mathcal{O}_n$ er simpel, og

$$1_A = \varphi\left(\sum_{i=1}^n s_is_i^*\right) = \sum_{i=1}^n \varphi(s_i)\varphi(s_i)^*.$$

Idet vi sætter $t_i = \varphi(s_i)$ ses, at A indeholder n isometrier $t_1, \ldots, t_n$, så $\sum_{i=1}^n t_it_i^* = 1_A$.

Antag at A indeholder sådanne isometrier $t_1, \ldots, t_n$ og at $\varphi(s_i) = t_i$. For enhver unitær $u \in A$ gælder,

$$\sum_{i=1}^n (ut_i)(ut_i)^* = \sum_{i=1}^n ut_it_i^*u^* = u\sum_{i=1}^n t_it_i^*u = uu^* = 1_A.$$

Heraf findes en unital *-homomorfi $\psi : \mathcal{O}_n \mapsto A$ med $\psi(s_i) = ut_i$, hvilket betyder at $u = \sum_{i=1}^n \psi(s_i)\varphi(s_i)^*$.
Omvendt, hvis $\varphi, \psi : \mathcal{O}_n \mapsto A$ er to unitale *-homomorfier, da er

$$u = \sum_{i=1}^n \psi(s_i)\varphi(s_i)^*$$

unitær. Thi,

$$\begin{aligned}
uu^* &= \sum_{i=1}^n \psi(s_i)\varphi(s_i)^* \sum_{j=1}^n \varphi(s_j)\psi(s_j)^* \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(s_i)\varphi(s_i^* s_j)\psi(s_i^*) = \sum_{i=1}^n \psi(s_i s_i^*) \\
&= \psi\left(\sum_{i=1}^n s_i s_i^*\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ligeledes er $uu^* = 1$. Endvidere fås,

$$u\varphi(s_i) = \sum_{j=1}^n \psi(s_j)\varphi(s_j)^*\varphi(s_i) = \psi(s_i)\varphi(s_i^* s_i) = \psi(s_i)$$

for alle $i = 1, \dots, n$.

Med $t_1, \dots, t_n \in A$ givet som ovenfor defineres som tidligere $\mu : A \mapsto A$ og $\lambda : \mathcal{O}_n \mapsto \mathcal{O}_n$ ved hhv.

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^n t_i x t_i^*,\ x \in A \quad \text{og} \quad \lambda(x) = \sum_{i=1}^n s_i x s_i^*,\ x \in \mathcal{O}_n.$$

Som tidligere vist, er μ, λ unitale, injektive *-homomorfier. Bemærk, at

$$(\varphi \circ \lambda)(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(s_i)\varphi(x)\varphi(s_i)^* = \sum_{i=1}^n t_i\varphi(x)t_i^* = (\mu \circ \varphi)(x)$$

for $x \in \mathcal{O}_n$.

Lemma 5.3.1 kan benyttes til at bevise dele af nedenstående sætning. Beviset laves kun for (i) $\Rightarrow$ (ii) og (iii) $\Leftrightarrow$ (i). Disse implikationer gælder for alle heltal $n \geq 2$, hvorimod beviset for (ii) $\Rightarrow$ (i) kun gælder for lige heltal.

Sætning 5.3.2. [16] *Lad A være en unital og K_1-injektiv C^*-algebra. Antag der eksisterer en konstant L, så der for enhver unitær $v \in \mathcal{U}_0(A)$ findes selv-adjungerede elementer $h_1, \dots, h_m$, der opfylder, at*

$$v = \exp(ih_1)\exp(ih_2)\cdots\exp(ih_m)$$

[16] [Rør93, Theorem 3.6]

og

$$\sum_{i=1}^{m} \|h_i\| \leq L.$$

Lad $n \geq 2$ være et lige heltal, og antag A indeholder isometrier $t_1, \ldots, t_n$ med

$$\sum_{i=1}^{n} t_i t_i^* = 1.$$

Lad u være et unitært element i A, og lad $\mu : A \mapsto A$ og $\varphi, \psi : \mathcal{O}_n \mapsto A$ være som ovenfor. Da er følgende ækvivalente

(i) *u tilhører afslutningen af mængden $\{v\mu(v)^* : v \in \mathcal{U}(A)\}$.*

(ii) *$[u]_1 \in (n-1)K_1(A)$.*

(iii) *φ og ψ er approksimativt unitært ækvivalente.*

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Lemma 5.3.1 giver, at $[\mu(v)]_1 = [\sum_{i=1}^{n} t_i v t_i^*]_1 = n[v]_1$, for alle $v \in \mathcal{U}(A)$. Så

$$[v\mu(v)^*]_1 = [v]_1 + [\mu(v)^*]_1 = [v]_1 + n[v^*]_1 = -[v^*]_1 + n[v^*]_1 = (n-1)[v^*]_1 \in (n-1)K_1(A).$$

Hvis $u \in \overline{\{v\mu(v)^* : v \in \mathcal{U}(A)\}}$, findes for ethvert $\varepsilon > 0$ et $v \in \mathcal{U}(A)$, så $\|u - v\| < \varepsilon$. Af [MRL, Lemma 2.1.3] fås hermed, at $[u]_1 \in (n-1)K_1(A)$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (i). *-homomorfierne φ, ψ er approksimativt unitært ækvivalente, hvis og kun hvis, der for enhver endelig delmængde $F \subseteq \mathcal{O}_n$ og for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en unitær $w \in A$, så

$$\|w\varphi(x)w^* - \psi(x)\| < \varepsilon$$

for alle $x \in F$. Men da $s_1, \ldots, s_n$ er generatorer for $\mathcal{O}_n$, er det ækvivalent med, at der findes en følge $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i A, så

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\varphi(s_i)w_n^* - \psi(s_i)\| = 0$$

for $i = 1, \ldots, n$.
Thi, hvis φ og ψ er approksimativt unitært ækvivalente, findes for ethvert $n \in \mathbb{N}$ en unitær $w_n \in A$, så $\|w_n\varphi(s_i)w_n^* - \psi(s_i)\| < \frac{1}{n}$ for $i = 1, \ldots, n$. Dvs.

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\varphi(s_i)w_n^* - \psi(s_i)\| = 0.$$

Hvis der findes en følge af unitære $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, så $\lim_{n\to\infty} \|w_n\varphi(s_i)w_n^* - \psi(s_i)\| = 0$ for $i = 1, \ldots, n$, da er $\lim_{n\to\infty} \|w_n\varphi(s_i)^*w_n^* - \psi(s_i)^*\| = 0$ for $i = 1, \ldots, n$.

Heraf fås, at

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\varphi(x)w_n^* - \psi(x)\| = 0$$

for alle x i *-algebraen frembragt af $(s_1, \ldots, s_n)$. Dermed gælder lighedstegnet også for alle $x \in \mathcal{O}_n$, idet φ og ψ er kontraktioner. Så for enhver endelig delmængde $F \subseteq \mathcal{O}_n$ og for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en unitær $w \in A$, så $\|w\varphi(x)w^* - \psi(x)\| < \varepsilon$ for alle $x \in F$.

For unitære elementer $w_n \in A$ gælder, at

$$\begin{aligned} w_n\mu(w_n)^* - u &= w_n \sum_{i=1}^{n} t_i w_n^* t_i^* - u \\ &= \sum_{i=1}^{n} (w_n\varphi(s_i)w_n^*\varphi(s_i)^* - \psi(s_i)\varphi(s_i)^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(w_n\varphi(s_i)w_n^* - \psi(s_i))\varphi(s_i)^*, \end{aligned}$$

og

$$(w_n\mu(w_n)^* - u)\varphi(s_i) = \sum_{j=1}^{n}(w_n\varphi(s_j)w_n^* - \psi(s_j))\varphi(s_j^*s_i) = w_n\varphi(s_i)w_n^* - \psi(s_i),$$

for alle $i = 1, \ldots, n$.
Heraf fås, at $u \in \overline{\{v\mu(v)^* : v \in \mathcal{U}(A)\}}$, hvis og kun hvis der findes en følge $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i A, så $\lim_{n\to\infty} \|w_n\varphi(s_i)w_n^* - \psi(s_i)\| = 0$ for alle $i = 1, \ldots, n$, hvilket er ækvivalent med at φ og ψ er approksimativt unitært ækvivalente. □

Bemærk, at hvis A er en unital og K_1-injektiv C^*-algebra med endelig eksponentiel længde, så er to vilkårlige unitale *-homomorfier $\varphi, \psi : \mathcal{O}_2 \mapsto A$ approksimativt unitært ækvivalente. Dette følger af Sætning 5.3.2, idet udsagn (ii) er trivielt opfyldt for $n = 2$. Specielt giver bemærkningen efter [Rør02, Theorem 5.1.1], at en unital purely infinite C^*-algebra A er K_1-injektiv og har endelig eksponentiel længde.

Sætning 5.3.3. *C^*-algebraen $\mathcal{O}_2$ har approksimativt indre halvflip.*

Bevis. Jvf. ovenstående bemærkning er de to unitale *-homomorfier $\alpha, \beta : \mathcal{O}_2 \mapsto \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$ givet ved

$$\alpha(x) = x \otimes 1,\ x \in \mathcal{O}_2 \quad \text{og} \quad \beta(x) = 1 \otimes x,\ x \in \mathcal{O}_2$$

approksimativt unitært ækvivalente. Hermed har $\mathcal{O}_2$ approksimativt indre halvflip. □

Til at bevise at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$, skal vi benytte, at $\mathcal{O}_2$ har approksimativt indre halvflip. Endvidere får vi brug for følgende lemma.

Lemma 5.3.4. [17] *Der findes en følge $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitale endomorfier i $\mathcal{O}_2$, som opfylder, at*

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(x)y - y\rho_n(x)\| = 0$$

for alle $x, y \in \mathcal{O}_2$.

Bevis. En følge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i $\mathcal{O}_2$ opfylder, at $\lim_{n\to\infty} \|a_n x - x a_n\| = 0$ for alle $x \in \mathcal{O}_2$, hvis $\lim_{n\to\infty} \|\lambda(a_n) - a_n\| = 0$, hvor $\lambda : \mathcal{O}_2 \mapsto \mathcal{O}_2$ er defineret som før. Dette gælder, idet

$$\|\lambda(a_n) - a_n\| = \left\|\sum_{i=1}^{2} s_i a_n s_i^* - a_n\right\| \geq \left\|\left(\sum_{i=1}^{2} s_i a_n s_i^* - a_n\right) s_j\right\| = \|s_j a_n - a_n s_j\|$$

[17] [Rør02, Lemma 5.2.3]

for $j = 1, 2$.
Så hvis $\lim_{n\to\infty} \|\lambda(a_n) - a_n\| = 0$, er $\lim_{n\to\infty} \|s_j a_n - a_n s_j\| = 0$ for $j = 1, 2$. Et lignende argument som ovenfor i beviset for (iii) $\Leftrightarrow$ (i) giver, at $\lim_{n\to\infty} \|xa_n - a_n x\| = 0$ for alle $x \in \mathcal{O}_2$.

Hvis $(v_n)_{n=1}^\infty$ er en følge af unitære i $\mathcal{O}_2$, da vil $(v_n s_1)(v_n s_1)^* + (v_n s_2)(v_n s_2)^* = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så der findes jvf. den universelle egenskab for $\mathcal{O}_2$ unitale endomorfier $\rho_n : \mathcal{O}_2 \mapsto \mathcal{O}_2$, så $\rho_n(s_i) = v_n s_i$ for $i = 1, 2$. Heraf følger, at

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(x)y - y\rho_n(x)\| = 0$$

for alle $x, y \in \mathcal{O}_2$, hvis $\lim_{n\to\infty} \|\lambda(\rho_n(x)) - \rho_n(x)\| = 0$ for alle $x \in \mathcal{O}_2$. Som før er dette opfyldt, hvis $\lim_{n\to\infty} \|\lambda(\rho_n(s_i)) - \rho_n(s_i)\| = 0$ for $i = 1, 2$.

Der gælder, at

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\rho_n(s_i)) - \rho_n(s_i)\| &= \|\lambda(v_n s_i) - v_n s_i\| \\
&= \|\lambda(v_n)\lambda(s_i) - v_n s_i\| \\
&= \|\lambda(v_n)(\lambda(s_i) - \lambda(v_n)^* v_n s_i)\| \\
&\leq \|\lambda(s_i) - \lambda(v_n)^* v_n s_i\|.
\end{aligned}$$

Samme udregninger som tidligere giver, at $u = \sum_{i=1}^2 \lambda(s_i)s_i^*$ er unitær i $\mathcal{O}_2$, og $\lambda(s_i) = us_i$. Så

$$\|\lambda(\rho_n(s_i)) - \rho_n(s_i)\| \leq \|us_i - \lambda(v_n)^* v_n s_i\| \leq \|u - \lambda(v_n)^* v_n\|.$$

Det er altså tilstrækkeligt, at finde en følge $(v_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $\mathcal{O}_2$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|u - \lambda(v_n)^* v_n\| = 0.$$

Men af Sætning 5.3.2 findes en følge af unitære $(w_n)_{n=1}^\infty$ i $\mathcal{O}_2$, så $\lim_{n\to\infty} \|u^* - w_n\lambda(w_n)^*\| = 0$, hvilket medfører, at $\lim_{n\to\infty} \|u - \lambda(w_n)w_n^*\| = 0$. Det ønskede fås nu, hvis vi for hvert n sætter $v_n = w_n^*$. □

Sætning 5.3.5. [18] *C^*-algebraerne $\mathcal{O}_2$ og $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$ er isomorfe.*

Bevis. Jvf. Lemma 5.3.4 findes en følge af unitale *-homomorfier $\rho_n : \mathcal{O}_2 \mapsto \mathcal{O}_2$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(x)y - y\rho_n(x)\| = 0$$

for alle $x, y \in \mathcal{O}_2$. Da $\mathcal{O}_2$ er simpel, er ρ_n injektiv for alle n. Eftersom $\mathcal{O}_2$ er separabel og har approksimativt indre halvflip, følger af Sætning 2.4.2, at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$. □

Sætning 5.3.6. *C^*-algebraen $\mathcal{O}_2$ er stærkt selv-absorberende, og for ethvert $k \in \mathbb{N}$ er $\mathcal{O}_2 \cong \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{O}_2 \cong \bigotimes_{i=1}^\infty \mathcal{O}_2$. Endvidere har $\mathcal{O}_2$ approksimativt indre flip.*

Bevis. Der findes jvf. Sætning 5.3.5 en *-isomorfi $\varphi : \mathcal{O}_2 \mapsto \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$. Af Sætning 5.3.2 er φ approksimativt unitært ækvivalent med $\psi : \mathcal{O}_2 \mapsto \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2$, givet ved

$$\psi(x) = x \otimes 1, \; x \in \mathcal{O}_2.$$

Dvs. $\mathcal{O}_2$ er stærkt selv-absorberende. Korollar 4.4.1 giver hermed, at $\mathcal{O}_2$ har approksimativt indre flip, og at $\mathcal{O}_2 \cong \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{O}_2 \cong \bigotimes_{i=1}^\infty \mathcal{O}_2$ for ethvert $k \in \mathbb{N}$. □

[18] [Rør02, Thm. 5.2.1]

Eksempel 5.3.7. Lad B være en UHF-algebra med associeret supernaturligt tal $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$, hvor $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$, og $n_j \neq 0$ for mindst ét $j \in \mathbb{N}$. Da er $B \otimes \mathcal{O}_2$ stærkt selv-absorberende.

Bevis. Sætning 5.3.6 og Sætning 4.3.6 giver, at hhv. $\mathcal{O}_2$ og B er stærkt selv-absorberende. Så af Lemma 4.2.6 er $B \otimes \mathcal{O}_2$ stærkt selv-absorberende. □

Som vi senere skal se (Sætning 9.1.2), gælder dog at $B \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2$ for enhver UHF-algebra B.

5.4 C^*-algebraen $\mathcal{O}_\infty$

Vi skal også vise, at $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende. I beviset benyttes bl.a. at $\mathcal{O}_\infty$ har approksimativt indre halvflip, hvilket fås af Sætning 5.4.1. Sætningen giver, at to vilkårlige *-homomorfier $\varphi, \psi : \mathcal{O}_\infty \mapsto A$ er approksimativt unitært ækvivalente, hvis A er en unital, separabel, nukleær, purely infinite og separabel C^*-algebra. Til beviset af dette resultat får vi brug for Lemma A.1.15 og Lemma A.1.16 fra Appendix.

Sætning 5.4.1. [19] *Lad A være en unital, separabel, nukleær, purely infinite og simpel C^*-algebra. Da er to vilkårlige unitale *-homomorfier $\varphi, \psi : \mathcal{O}_\infty \mapsto A$ approksimativt unitært ækvivalente.*

Bevis. Antag først, at $[1_A]_0 = 0$ i $K_0(A)$. Lad $s_1, s_2, \ldots$ være generatorerne for $\mathcal{O}_\infty$. For ethvert $n \geq 2$ er

$$1_{\mathcal{O}_\infty} - \sum_{i=1}^{n-1} s_i s_i^*$$

en projektion i $\mathcal{O}_\infty$, der er forskellig fra 0, hvilket medfører, at projektionerne

$$p_0 = 1_A - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(s_i s_i^*) \quad \text{og} \quad q_0 = 1_A - \sum_{i=1}^{n-1} \psi(s_i s_i^*)$$

er forskellig fra 0 i A, idet φ og ψ er injektive, da $\mathcal{O}_\infty$ er simpel.

Endvidere er projektionerne p_0, q_0 og 1_A indbyrdes ækvivalente projektioner, eftersom de repræsenterer det samme element i $K_0(A)$, nemlig 0. Dette ses, idet

$$\varphi(s_i s_i^*) \sim \varphi(s_i^* s_i) = 1_A = \psi(s_i^* s_i) \sim \psi(s_i s_i^*)$$

for alle $i = 1, \ldots, n-1$, så $[\varphi(s_i s_i^*)]_0 = [\psi(s_i s_i^*)]_0 = [1_A]_0 = 0$ for $i = 1, \ldots, n-1$. Da $\varphi(s_i s_i^*), \varphi(s_j s_j^*)$ er orthogonale for $i \neq j$ fås, $[\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(s_i s_i^*)]_0 = \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi(s_i s_i^*)]_0 = 0$. Idet $[1_A]_0 = [p_0]_0 + [\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(s_i s_i^*)]_0$, fås

$$[p_0]_0 = [1_A]_0 - \left[\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(s_i s_i^*)\right]_0 = 0.$$

Tilsvarende er $[q_0]_0 = 0$.
Projektionerne p_0, q_0 og 1_A er properly infinite jvf. Lemma A.3.7, da A er en purely infinite

[19] [Rør02, Proposition 7.2.5]

C^*-algebra. Endvidere er p_0, q_0 og 1_A også fulde, da A er simpel. Så Lemma A.3.9 giver, at $p_0 \sim 1_A \sim q_0$. Så der findes isometrier $t_n, r_n \in A$, så

$$p_0 = t_n t_n^*,\ t_n^* t_n = 1_A = r_n^* r_n \text{ og } q_0 = r_n r_n^*.$$

Dvs.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(s_i s_i^*) + t_n t_n^* = 1_A = \sum_{i=1}^{n-1} \psi(s_i s_i^*) + r_n r_n^*.$$

Lad $\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_n}$ være generatorerne for $\mathcal{O}_n$. Afbildningerne $\lambda_\varphi^{(n)}, \lambda_\psi^{(n)} : \mathcal{O}_n \mapsto A$ givet ved,

$$\lambda_\varphi^{(n)}(\widetilde{s_i}) = \begin{cases} \varphi(s_i), & i = 1, \dots, n-1 \\ t_n, & i = n \end{cases} \quad \text{og} \quad \lambda_\psi^{(n)}(\widetilde{s_i}) = \begin{cases} \psi(s_i), & i = 1, \dots, n-1 \\ r_n, & i = n \end{cases}$$

kan jvf. den universelle egenskab for $\mathcal{O}_n$ udvides til unitale *-homomorfier $\varphi_n, \psi_n : \mathcal{O}_n \mapsto A$ hhv.

Lad nu v være det unitære element i A givet ved

$$v = \sum_{i=1}^{n} \psi_n(\widetilde{s_i})\varphi_n(\widetilde{s_i})^* = \sum_{i=1}^{n-1} \psi(s_i)\varphi(s_i)^* + r_n t_n^*,$$

og sæt $w = r_n v^* r_n^*$. Da er w et unitært element i $(r_n r_n^*)A(r_n r_n^*)$, der opfylder, at $[1_A - r_n r_n^* + w]_1 = [v^*]_1 = -[v]_1$ jvf. Lemma 5.3.1.

Sæt $u = \sum_{i=1}^{n-1} \psi(s_i)\varphi(s_i)^* + w r_n t_n^*$, og definer jvf. den universelle egenskab for $\mathcal{O}_n$ en unital *-homomorfi $\psi_n' : \mathcal{O}_n \mapsto A$ ved

$$\psi_n'(\widetilde{s_i}) = \begin{cases} \psi_n(\widetilde{s_i}) & i = 1, \dots, n-1 \\ w r_n, & i = n \end{cases}$$

Dvs. $u = \sum_{i=1}^{n} \psi_n'(\widetilde{s_i})\varphi_n(\widetilde{s_i})^*$ er en unitær i A, og $[u]_1 = 0$, da

$$u = (1_A - r_n r_n^* + w)v$$

og $[1 - r_n r_n^* + w]_1 = -[v]_1$. Så $[u]_1 \in (n-1)K_1(A)$, hvilket betyder, at $\psi_n', \varphi_n : \mathcal{O}_n \mapsto A$ er approksimativt unitært ækvivalente, hvis n er lige jvf. Sætning 5.3.2.

Der findes altså en følge $(v_k)_{k=1}^\infty$ af unitære i A, så $\lim_{k\to\infty} \|v_k \varphi_n(x) v_k^* - \psi_n'(x)\| = 0$ for alle $x \in \mathcal{O}_n$. Specielt er $\lim_{k\to\infty} \|v_k \varphi(s_i) v_k^* - \psi(s_i)\| = \lim_{k\to\infty} \|v_k \varphi_n(\widetilde{s_i}) v_k^* - \psi_n'(\widetilde{s_i})\| = 0$ for $i = 1, \dots, n-1$. Som før er det en tilstrækkelig betingelse for, at

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k \varphi(x) v_k^* - \psi(x)\| = 0$$

for alle $x \in \mathcal{O}_\infty$. Thi, for ethvert lige $n \in \mathbb{N}$ findes en unitær $z_n \in A$, så $\|z_n \varphi(s_i) z_n^* - \psi(s_i)\| < \frac{1}{n}$ for $i = 1, \dots, n-1$. Dvs. $\lim_{n\to\infty} \|z_n \varphi(s_i) z_n^* - \psi(s_i)\| = 0$ for alle i. Hermed er det ønskede vist for $[1_A]_0 = 0$. Vi skal nu vise sætningen i det generelle tilfælde.

Lad ω være et frit ultrafilter på $\mathbb{N}$, lad $\pi_\omega : l^\infty(A) \mapsto A_\omega$ være kvotientafbildningen og lad $\delta_A : A \mapsto l^\infty(A)$ være givet ved,

$$\delta_A(a) = (a, a, a, \dots), \quad a \in A.$$

Når A er en unital Kirchberg-algebra (separabel, nukleær, simpel og purely infinite C^*-algebra) er $A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))'$ en purely infinite, unital og simpel C^*-algebra jvf. [Rør02, Prop. 7.1.1]. Dvs. $(\pi_\omega \circ \delta_A)(1_A)$ er en properly infinite projektion i $A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))'$, så der findes tre indbyrdes orthogonale projektioner $p, q, e \in A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))'$, så $(\pi_\omega \circ \delta_A)(1_A) \sim p \sim q \sim e$ og $p, q, e \leq (\pi_\omega \circ \delta_A)(1_A)$.
Da $p \perp q$ er $r = (\pi_\omega \circ \delta_A)(1_A) - p - q$ en projektion, der opfylder, at

$$(\pi_\omega \circ \delta_A)(1_A) = p + q + r.$$

Da $p \perp r$ og $q \perp r$ er $p + r$ og $q + r$ projektioner, for hvilke der gælder, at $p + r \sim q + r$. Eftersom $p \perp (q + r)$ er $[(\pi_\omega \circ \delta_A)(1_A)]_0 = [p]_0 + [q + r]_0$, hvilket medfører, at

$$[p + r]_0 = [q + r]_0 = [(\pi_\omega \circ \delta_A)(1_A)]_0 - [p]_0 = 0$$

i $K_0(A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A(A))')$.

For enhver *-homomorfi $\rho : \mathcal{O}_\infty \mapsto A$ og enhver projektion e i $A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))'$ definerer vi $\rho_e : \mathcal{O}_\infty \mapsto eA_\omega e$, ved

$$\rho_e(x) = (\pi_\omega \circ \delta_A \circ \rho)(x)e, \; x \in \mathcal{O}_\infty.$$

Afbildingen ρ_e er klart lineær, $\rho_e(x^*) = \rho_e(x)^*, x \in \mathcal{O}_\infty$ og $\rho_e(xy) = \rho_e(x)\rho_e(y), \; x, y \in \mathcal{O}_\infty$, da e er en projektion, som kommuterer med ethvert element i $(\pi_\omega \circ \delta_A)(A)$. Så ρ_e er en *-homomorfi.

Eftersom $[p + r]_0 = 0$ i $K_0(A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))')$ og da $\varphi_{p+r}, \psi_{p+r} : \mathcal{O}_\infty \mapsto (p + r)A_\omega(p + r)$ er unitale *-homomorfier, følger af første del af beviset, at φ_{p+r} er approksimativt unitært ækvivalent med ψ_{p+r} i $(p + r)A_\omega(p + r)$.

Afbildningen $\varphi_q + \psi_r : \mathcal{O}_\infty \mapsto (p+r)A_\omega(p+r)$ er en unital *-homomorfi, da afbildningen klart er lineær, og $(\varphi_q + \psi_r)(x^*) = (\varphi_q + \psi_r)(x)^*$ for $x \in \mathcal{O}_\infty$.
Ved at benytte, at q og r er indbyrdes orthogonale projektioner, der kommuterer med ethvert element i $(\pi_\omega \circ \delta_A)(A)$, fås for $x, y \in \mathcal{O}_\infty$,

$$\begin{aligned}
(\varphi_q + \psi_r)(x)(\varphi_q + \psi_r)(y) &= (\varphi_q(x) + \psi_r(x))(\varphi_q(y) + \psi_r(y)) \\
&= (q(\pi_\omega \circ \delta_A)(\varphi(x)) + r(\pi_\omega \circ \delta_A)(\psi(x))) \\
&\quad \cdot (q(\pi_\omega \circ \delta_A)(\varphi(y)) + r(\pi_\omega \circ \delta_A)(\psi(y))) \\
&= q^2(\pi_\omega \circ \delta_A)(\varphi(xy)) + qr(\pi_\omega \circ \delta_A)(\varphi(xy)) + rq(\pi_\omega \circ \delta_A)(\psi(xy)) \\
&\quad + r^2(\pi_\omega \circ \delta_A)((\psi(xy)) \\
&= \varphi_q(xy) + \psi_r(xy) \\
&= (\varphi_q + \psi_r)(xy).
\end{aligned}$$

Endvidere er $(\varphi_q + \psi_r)(1_{\mathcal{O}_\infty}) = q + r$, så da $[q + r]_0 = 0$ i $K_0(A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))')$ er de unitale *-homomorfier $\varphi_q + \psi_r, \psi_{q+r} : \mathcal{O}_\infty \mapsto (q + r)A_\omega(q + r)$ approksimativt unitært ækvivalente i $(q + r)A_\omega(q + r)$.

Heraf fås,

$$\pi_\omega \circ \delta_A \circ \varphi = \varphi_{p+r} + \varphi_q \approx_{a.u} \psi_{p+r} + \varphi_q = (\varphi_q + \psi_r) + \psi_p \approx_{a.u} \psi_{q+r} + \psi_p = \pi_\omega \circ \delta_A \circ \psi$$

i A_ω. Lemma A.1.16 giver nu, at φ er approksimativt unitært ækvivalent med ψ i A. $\square$

Ved hjælp af ovenstående sætning kan vi nu vise følgende:

Sætning 5.4.2. *C^*-algebraen $\mathcal{O}_\infty$ har approksimativt indre halvflip.*

Bevis. Da $\mathcal{O}_\infty$ er en unital, separabel, purely infinite og simpel C^*-algebra, gælder disse betingelser også for $\mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty$ jvf. [Rør02, Theorem 4.1.10] og Sætning 2.1.3 hhv. Så sætning 5.4.1 giver, at $\mathcal{O}_\infty$ har approksimativt indre halvflip, da $\mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty$ også er nukleær, idet $\mathcal{O}_\infty$ er nukleær. □

Vi skal nu vise Sætning 5.4.4, der bl.a. giver, at $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende, samt betingelser for hvornår A er isomorf med $A \otimes \mathcal{O}_\infty$ for en simpel, separabel og nukleær C^*-algebra A. I beviset for (ii) får vi dog brug nedenstående Lemma samt en sætning vedr. semiprojektivitet af en C^*-algebra, som er angivet i Appendix. Beviset for (iii) er ændret i forhold til det, der er givet i [Rør02], idet vi benytter Korollar 4.4.1.

Lemma 5.4.3. *Lad A være en unital og properly infinite C^*-algebra. Da findes en unital, injektiv *-homomorfi $\varphi : \mathcal{O}_\infty \mapsto A$.*

Bevis. Da 1_A er properly infinite findes parvis orthogonale projektioner $p_1, p_2 \in A$, så $p_1 \le 1_A$, $p_2 \le 1_A$ og $p_1 \sim 1_A \sim p_2$. Find partielle isometrier $t_1, t_2 \in A$, så $t_1^* t_1 = 1_A$, $t_1 t_1^* = p_1$ og $t_2^* t_2 = 1_A$, $t_2 t_2^* = p_2$.
Sæt for hvert $i \in \mathbb{N}$, $s_i = t_2^{i-1} t_1$. Da er

$$s_i^* s_i = t_1^* (t_2^*)^{i-1} t_2^{i-1} t_1 = t_1^* t_1 = 1_A.$$

Hvis $i > j$ fås

$$s_i^* s_j = t_1^* (t_2^*)^{i-1} t_2^{j-1} t_1 = t_1^* (t_2^*)^{i-j} t_1.$$

Men

$$t_2^* t_1 = t_2^* t_2 t_2^* t_1 t_1^* t_1 = t_2^* p_2 p_1 t_1 = 0,$$

så $s_i^* s_j = 0$ for $i > j$.
Hvis $i < j$ er $s_i^* s_j = t_1^* (t_2)^{j-i} t_1 = 0$, da

$$t_1^* t_2 = t_1^* t_1 t_1^* t_2 t_2^* t_2 = t_1^* p_1 p_2 t_2 = 0.$$

Heraf er $s_i^* s_j = 0$ for $i \ne j$. Dvs. $(s_i s_i^*)_{i=1}^\infty$ er en følge af parvis orthogonale projektioner i A. Pga. den universelle egenskab af $\mathcal{O}_\infty$ findes en *-isomorfi $\varphi : \mathcal{O}_\infty \mapsto C^*(s_1, s_2, s_3, \dots) \subseteq A$, og det ønskede er vist. □

Sætning 5.4.4. [20]

(i) *Lad A være en separabel C^*-algebra. Da er A isomorf med $A \otimes \mathcal{O}_\infty$, hvis og kun hvis der findes en følge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ af unitale, injektive *-homomorfier, $\varphi_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{M}(A)$, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x) a - a \varphi_n(x)\| = 0$$

for alle $a \in A$ og alle $x \in \mathcal{O}_\infty$.

[20] [Rør02, Theorem 7.2.6]

(ii) *Lad A være en simpel, separabel og nukleær C^*-algebra. Da er A isomorf med $A \otimes \mathcal{O}_\infty$, hvis og kun hvis A er purely infinite.*

(iii) *C^*-algebraen $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende, og for ethvert $k \in \mathbb{N}$ er*

$$\mathcal{O}_\infty \cong \bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{O}_\infty \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_\infty.$$

Endvidere har $\mathcal{O}_\infty$ approksimativt indre flip.

Bevis. (i). „Hvis“: Antag, at der findes en følge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ af unitale, injektive *-homomorfier $\varphi_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{M}(A)$, så $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\| = 0$ for alle $a \in A$ og alle $x \in \mathcal{O}_\infty$. Da $\mathcal{O}_\infty$ har approksimativt indre halvflip, følger hermed af Sætning 2.4.2 at $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty$.

(ii) „Hvis“: Antag, at A er purely infinite, dvs. A er simpel, separabel, nukleær og purely infinite og dermed en Kirchberg algebra. Zhangs Dichotomy [Rør02, Proposition 4.1.3] giver, at A er unital eller $A \cong A \otimes \mathcal{K}$. Da A er simpel og separabel gælder jvf. Browns Sætning, at $A \otimes \mathcal{K} \cong pAp \otimes \mathcal{K}$ for en projektion $p \neq 0$, $p \in A$. Hvis A er purely infinite er pAp også purely infinite. For lad a og b være positive elementer i pAp. Da findes $x \in A$, så $b = x^*ax$, idet A er purely infinite. Så da $b = pbp$ og $a = pap$ fås,

$$b = pbp = px^*axp = px^*papxp = (pxp)^*a(pxp),$$

hvilket betyder, at pAp er purely infinite. Endvidere er pAp separabel og også simpel. Thi, lad I være et lukket to-sidet ideal i pAp, og lad $a \neq 0$ være et element i I. Da A er simpel findes for ethvert $\varepsilon > 0$ elementer $x_1, \ldots, x_n$, $y_1 \ldots, y_n \in A$ så $\|p - \sum_{i=1}^n x_i a y_i\| < \varepsilon$. Dvs. $\|p - \sum_{i=1}^n p x_i p a p y_i p\| < \varepsilon$. Hermed vil $p \in I$, så $I = pAp$.
Vi vil nu vise, at pAp også er nukleær:
Lad $\gamma : A \mapsto pAp$ være givet ved,

$$\gamma(x) = pxp, \quad x \in A.$$

Da er γ en fuldstændigt positiv kontraktion, og $\mathrm{id}_{pAp} = \gamma \circ \mathrm{id}_{pAp}$. Lad $F \subseteq pAp$ være en vilkårlig endelig delmængde i pAp, og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da $\mathrm{id}_A : A \mapsto A$ er nukleær jvf. Sætning 2.3.2 findes $n \in \mathbb{N}$ og fuldstændigt positive kontraktioner $\sigma : A \mapsto M_n(\mathbb{C})$ og $\eta : M_n(\mathbb{C}) \mapsto A$ så

$$\|x - (\eta \circ \sigma)(x)\| \leq \varepsilon$$

for alle $x \in F$. Dvs. $\gamma \circ \eta : M_n(\mathbb{C}) \mapsto pAp$ er en fuldstændigt positiv kontraktion, der opfylder,

$$\|\mathrm{id}_{pAp}(x) - ((\gamma \circ \eta) \circ \sigma)(x)\| = \|\gamma(x) - \gamma((\eta \circ \sigma)(x))\| \leq \|x - (\eta \circ \sigma)(x)\| \leq \varepsilon$$

for alle $x \in F$. Så id_{pAp} er nukleær, hvilket er ækvivalent med at pAp er nukleær jvf. Sætning 2.3.2.
Dvs. A er enten unital eller $A \cong A \otimes \mathcal{K} \cong A_0 \otimes \mathcal{K}$ for en unital Kirchberg algebra A_0. Det er hermed tilstrækkeligt, at vise påstanden når A er unital. For hvis $A_0 \otimes \mathcal{O}_\infty \cong A_0$, da er $A \otimes \mathcal{O}_\infty \cong A_0 \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}_\infty \cong \mathcal{K} \otimes A_0 \otimes \mathcal{O}_\infty \cong \mathcal{K} \otimes A_0 \cong A$.

Lad ω være et frit ultrafilter på $\mathbb{N}$. Da giver [Rør02, Proposition 7.11], at $A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))'$ er en purely infinite, unital og simpel C^*-algebra. Så jvf. Lemma 5.4.3 findes en unital indlejring

$\varphi : \mathcal{O}_\infty \mapsto A_\omega \cap ((\pi_\omega \circ \delta_A)(A))'$. Da $\mathcal{O}_\infty$ er separabel og semiprojektiv (jvf. [Bla04]) findes jvf. Sætning A.4.5 en unital *-homomorfi $\overline{\varphi} : \mathcal{O}_\infty \mapsto l^\infty(A)$, så

$$\varphi(x) = (\pi_\omega \circ \overline{\varphi})(x), \quad x \in \mathcal{O}_\infty.$$

Sæt nu $\varphi_n = \pi_n \circ \overline{\varphi}$, hvor $\pi_n : l^\infty(A) \mapsto A$ er givet ved,

$$\pi_n((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = a_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A).$$

Da er $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge af unitale *-homomorfier, $\varphi_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto A$, så

$$\varphi(x) = \pi_\omega((\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}), \quad x \in \mathcal{O}_\infty.$$

Endvidere er φ_n injektiv, da $\mathcal{O}_\infty$ er simpel. For hvert $x \in \mathcal{O}_\infty$ og hvert $a \in A$ gælder, at

$$0 = \|\varphi(x)(\pi_\omega \circ \delta_A)(a) - (\pi_\omega \circ \delta_A)(a)\varphi(x)\| = \limsup_\omega \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\|.$$

Lad $\{a_1, a_2, \dots\}$ være en tæt delmængde i A og lad $\{x_1, x_2, \dots\}$ være en tæt delmængde i $\mathcal{O}_\infty$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ findes $X_n \in \omega$ så

$$\|\varphi_j(x_k)a_l - a_l\varphi_j(x_k)\| < \frac{1}{n}$$

for alle $j \in X_n$ og alle $l, k = 1, \dots, n$.
Vælg induktivt $n_1 \in X_1$ og $n_{j+1} \in X_{j+1} \setminus \{1, 2, \dots, n_j\}$. Ved at erstatte j med n_j fås dermed en følge af unitale, injektive *-homomorfier $\varphi_j : \mathcal{O}_\infty \mapsto A$, så

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j(x)a - a\varphi_j(x)\| = 0$$

for alle $a \in A$ og alle $x \in \mathcal{O}_\infty$. Af (i) følger heraf, at $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty$.

(iii). C^*-algebraen $\mathcal{O}_\infty$ er simpel, separabel, nukleær og purely infinite. Heraf følger af (ii), at $\mathcal{O}_\infty \cong \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty$. Lad $\varphi : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty$ være en *-isomorfi. Sætning 5.4.1 giver, at φ er approksimativt unitært ækvivalent med $\psi : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty$ givet ved,

$$\psi(x) = x \otimes 1, \ x \in \mathcal{O}_\infty,$$

da $\mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty$ er separabel, unital, simpel, nukleær og purely infinite. Så $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende. Korollar 4.4.1 giver, at $\mathcal{O}_\infty$ har approksimativt indre flip, og $\mathcal{O}_\infty \cong \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{O}_\infty \cong \bigotimes_{i=1}^\infty \mathcal{O}_\infty$ for ethvert $k \in \mathbb{N}$.

(ii) „Hvis“: Antag $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty$, og lad a, b være positive elementer i A forskellig fra 0. Da A er simpel findes jvf. [MRL, Exercise 4.8] et $n \in \mathbb{N}$ og $x_1, \dots, x_n \in A$ så

$$\left\| a - \sum_{j=1}^n x_j^* b x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Af (iii) fås at $\mathcal{O}_\infty \cong \bigotimes_{i=1}^\infty \mathcal{O}_\infty$, så vi kan definere en følge af unitale *-homomorfier $(\psi_n)_{n=1}^\infty$, $\psi_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{O}_\infty$ ved

$$\psi_n(x) = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots, \quad x \in \mathcal{O}_\infty$$

hvor x afbildes i den $(n+1)'$te faktor, og 1 er enheden i $\mathcal{O}_\infty$.

Lad

$$D_n = \mathcal{O}_\infty \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes \ldots$$

med $\mathbb{C}$ på de $(n+1)'$te, $(n+2)'$te, $\ldots$ faktorer. Da er $D_n \cong \mathcal{O}_\infty$ og $\mathcal{O}_\infty \cong \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$. Endvidere kommuterer billedet af ψ_n med D_n for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lad $\psi : A \otimes \mathcal{O}_\infty \mapsto A$ være en *-isomorfi og lad $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ og ι_4 være inklusionsafbildninger. Da kan ψ løftes til en *-isomorfi $\widetilde{\psi} : \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{O}_\infty) \mapsto \mathcal{M}(A)$, så følgende diagram kommuterer.

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes \mathcal{O}_\infty \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dl, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\iota_2"] & & A \arrow[d, "\iota_4"] \\
\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{O}_\infty \arrow[rr, "\iota_3"] & & \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{O}_\infty) \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] & \mathcal{M}(A)
\end{tikzcd}$$

Definer unitale *-homomorfier $\widetilde{\varphi}_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{O}_\infty)$ ved,

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \iota_3 \circ (1_{\mathcal{M}(A)} \otimes \psi_n(x)), \quad x \in \mathcal{O}_\infty.$$

Da er $A \otimes D_n \subseteq \widetilde{\varphi}_n(\mathcal{O}_\infty)'$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Sæt $\varphi_n = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{M}(A)$. Dvs. $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en følge af unitale *-homomorfier, der opfylder, at $\widetilde{\psi}(A \otimes D_n) \subseteq \varphi_n(\mathcal{O}_\infty)'$.

Da b er et positivt element i A findes et positivt element $\widetilde{b} \in A \otimes \mathcal{O}_\infty$, så $\psi(\widetilde{b}) = b$. Eftersom $\mathcal{O}_\infty = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$ og $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots$ findes $m \in \mathbb{N}$ og et positivt $\widetilde{b}' \in A \otimes D_m \subseteq (A \otimes \mathcal{O}_\infty) \cap \widetilde{\varphi}_m(\mathcal{O}_\infty)'$, så

$$\left\|\widetilde{b}' - \widetilde{b}\right\| < \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2\right)^{-1} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sæt nu $b' = \psi(\widetilde{b}') \in A \cap \varphi_m(\mathcal{O}_\infty)'$. Da er b' positivt og

$$\|b - b'\| = \left\|\psi(\widetilde{b}) - \psi(\widetilde{b}')\right\| = \left\|\widetilde{b} - \widetilde{b}'\right\| < \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2\right)^{-1} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dvs.

$$\begin{aligned}
\left\| a - \sum_{j=1}^{n} x_j^* b' x_j \right\| &\leq \left\| a - \sum_{j=1}^{n} x_j^* b x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j^* b x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j^* b' x_j \right\| \\
&\leq \left\| a - \sum_{j=1}^{n} x_j^* b x_j \right\| + \sum_{j=1}^{n} \|x_j^*(b - b')x_j\| \\
&\leq \left\| a - \sum_{j=1}^{n} x_j^* b x_j \right\| + \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \|b - b'\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2\right)^{-1} \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \frac{2\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Lad $s_1, s_2, \ldots$ være isometrier, der frembringer $\mathcal{O}_\infty$, og sæt $y = \sum_{j=1}^n \varphi_m(s_j)x_j$. Da A er et lukket to-sidet ideal i $\mathcal{M}(A)$ er $y \in A$ og $\|y\| \leq \sum_{j=1}^n \|x_j\|$.
Da $b' \in \varphi_m(\mathcal{O}_\infty)'$ gælder,

$$y^*b'y = \left(\sum_{j=1}^n x_j^*\varphi_m(s_j)^*\right) b' \left(\sum_{i=1}^n \varphi_m(s_i)x_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j^* b' \varphi_m(s_j^* s_i)x_i = \sum_{j=1}^n x_j^* b' x_j$$

og

$$\|y^*by - y^*b'y\| = \|y^*(b-b')y\| \leq \|y\|^2\|b-b'\| < \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\right)^{-1}\frac{\varepsilon}{3}.$$

Heraf fås,

$$\|y^*by - a\| \leq \|y^*by - y^*b'y\| + \|y^*b'y - a\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

For alle $a, b \in A^+ \setminus \{0\}$ findes altså en følge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, så $y_n^* b y_n \to a$ for $n \to \infty$, hvilket betyder, at A er purely infinite jvf. [Rør02, Proposition 4.1.1].

(i). "Kun hvis": Da $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende fås af Sætning 4.3.5 eksistensen af en følge $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier, $\psi_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{O}_\infty$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(x)y - y\psi_n(x)\| = 0$$

for alle $x, y \in \mathcal{O}_\infty$. Endvidere er ψ_n injektiv for alle $n \in \mathbb{N}$, da $\mathcal{O}_\infty$ er simpel.
Lad nu A være en separabel C^*-algebra, så $A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty$. C^*-algebraen $\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{O}_\infty$ er en unital del-C^*-algebra af $\mathcal{M}(A \otimes \mathcal{O}_\infty)$. Definer, $\varphi_n : \mathcal{O}_\infty \mapsto \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{O}_\infty)$ ved

$$\varphi_n(x) = 1_{\mathcal{M}(A)} \otimes \psi_n(x),\ x \in \mathcal{O}_\infty.$$

Da er $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ er en følge af unitale injektive *-homomorfier.

Et element a i det algebraiske tensorprodukt $A \odot \mathcal{O}_\infty$ kan entydigt skrives på formen
$a = \sum_{i=1}^m c_i(x_i \otimes y_i)$ for $m \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{C}, x_i \in A$ og $y_i \in \mathcal{O}_\infty$. Heraf fås for alle $x \in \mathcal{O}_\infty$, at

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes \psi_n(x))\sum_{i=1}^m c_i(x_i \otimes y_i) - \sum_{i=1}^m c_i(x_i \otimes y_i)(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes \psi_n(x))\right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |c_i|\|(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes \psi_n(x))(x_i \otimes y_i) - (x_i \otimes y_i)(1_{\mathcal{M}(A)} \otimes \psi_n(x))\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |c_i|\|x_i \otimes (\psi_n(x)y_i - y_i\psi_n(x))\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |c_i|\|x_i\|\|\psi_n(x)y_i - y_i\psi_n(x)\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Heraf er $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\| = 0$ for alle $x \in \mathcal{O}_\infty$ og alle $a \in A \otimes \mathcal{O}_\infty$, da $A \odot \mathcal{O}_\infty$ er en tæt delmængde i $A \otimes \mathcal{O}_\infty$. Det ønskede er dermed vist, idet $A \otimes \mathcal{O}_\infty \cong A$. $\square$

Det samme argument som i eksempel 5.3.7 giver følgende:

Eksempel 5.4.5. Lad B være en UHF-algebra med associeret supernaturligt tal $n = (n_j)_{j=1}^{\infty}$, hvor $n_j \in \{0, \infty\}$ for alle $j \in \mathbb{N}$, og $n_j \neq 0$ for mindst ét $j \in \mathbb{N}$. Da er $B \otimes \mathcal{O}_\infty$ stærkt selvabsorberende.

Kapitel 6

D-stabile C^*-algebraer

De foregående kapitler har omhandlet stærkt selv-absorberende C^*-algebraer, og vi har set eksempler på konkrete C^*-algebraer, der har denne egenskab. Nu fortsættes med en gennemgang af teorien for C^*-algebraer A, som for en given stærkt selv-absorberende C^*-algebra D opfylder, at $A \cong A \otimes D$. I dette tilfælde siges A at være D-stabil. I det følgende afsnit stiler vi således mod at vise Sætning 6.1.10, der giver en ækvivalent betingelse for D-stabilitet af A, når D er en separabel, unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv C^*-algebra. Denne sætning bruges i Kapitel 7 til at vise permanens egenskaber for D-stabilitet, og i Kapitel 8 vil sætningen ligeledes blive benyttet til at bevise, at en ekstension E af A ved J er D-stabil, for en unital, stærkt selv-absorberende, separabel og K_1-injektiv C^*-algebra D, hvis J og A er separable og D-stabile C^*-algebraer.

Definition 6.1.1. Lad D være en unital C^*-algebra. Af første homomorfisætning findes en gruppehomomorfi $\omega : \mathcal{U}(D)/\mathcal{U}_0(D) \mapsto K_1(D)$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(D) \arrow[d] \arrow[dr, "{[\cdot]_1}"] & \\ \mathcal{U}(D)/\mathcal{U}_0(D) \arrow[r, dashed, "\omega"] & K_1(D). \end{tikzcd}$$

Hvis ω er injektiv kaldes D K_1-injektiv.

Beviset for Sætning 6.1.10 bygger på Lemma 6.1.7 og Proposition 6.1.8. For at vise disse to resultater får vi brug for nogle indledende resultater. Vi skal som det første vigtige resultat vise Proposition 6.1.4, hvortil vi skal benytte følgende lemma.

Lemma 6.1.2. *Lad A og B være separable unitale C^*-algebraer, og lad $\varphi, \psi : A \mapsto B$ være approksimativt unitært ækvivalente *-homomorfier. Da er $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.*

Bevis. Antag først, at φ, ψ er unitært ækvivalente. Hermed findes en unitær $u \in \mathcal{U}(A)$, så

$$\varphi(a) = u\psi(a)u^*$$

for alle $a \in A$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ udvides φ, ψ til *-homomorfier $\varphi^{(n)}, \psi^{(n)} : M_n(A) \mapsto M_n(B)$, så

$$\varphi^{(n)}(a) = \mathrm{diag}(u, u, \ldots, u)\psi^{(n)}(a)\mathrm{diag}(u^*, u^*, \ldots, u^*) = u_n\psi^{(n)}(a)u_n^*,$$

for $a \in M_n(A)$, hvor $u_n = \mathrm{diag}(u, u, \dots, u) \in \mathcal{U}_n(A)$.
For $v \in \mathcal{U}_n(A)$ gælder,

$$K_1(\varphi)([v]_1) = [\varphi^{(n)}(v)]_1 = [u_n\psi^{(n)}(v)u_n^*]_1 = [\psi^{(n)}(v)]_1 = K_1(\psi)([v]_1).$$

Antag nu, at $\varphi, \psi : A \mapsto B$ er approksimativt unitært ækvivalente. Da findes en følge $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ af *-homomorfier, $\psi_k : A \mapsto B$, som er unitært ækvivalente med ψ, således

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(a) = \varphi(a)$$

for alle $a \in A$. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ udvides ψ_k, φ som ovenfor til *-homomorfier $\psi_k^{(n)}, \varphi^{(n)} : M_n(A) \mapsto M_n(B)$, så

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(a)$$

for alle $a \in M_n(A)$.
Lad $v \in \mathcal{U}_n(A)$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes $k \in \mathbb{N}$, så $\|\varphi^{(n)}(v) - \psi_k^{(n)}(v)\| < \varepsilon$. Så

$$K_1(\varphi)([v]_1) = [\varphi^{(n)}(v)]_1 = [\psi_k^{(n)}(v)]_1 = K_1(\psi)([v]_1),$$

da ψ_k er unitært ækvivalent med ψ. □

Som korollar til Sætning 4.3.5 og Korollar 4.4.2 fås følgende resultat, som vi skal benytte i beviset for Proposition 6.1.4, der er ændret i forhold til det bevis, der er givet i [TW05].

Korollar 6.1.3. *Lad D være en separabel, unital og stærkt selv-absorberende C^*-algebra, og lad $\varphi : D \mapsto D$ være en unital *-homomorfi, som er approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_D : D \mapsto D$. Da findes en følge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i D med $[v_n]_1 = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi(d) - v_n^* d v_n\| = 0$$

for alle $d \in D$.

Bevis. Pr. antagelse findes en følge $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i D, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi(d) - u_n^* d u_n\| = 0$$

for alle $d \in D$. Sætning 4.3.5 samt Korollar 4.4.2 giver eksistensen af unitale *-homomorfier $\varphi_n : D \mapsto D$, som er approksimativt unitært ækvivalente med $\mathrm{id}_D : D \mapsto D$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d_1)d_2 - d_2\varphi_n(d_1)\| = 0$$

for alle d_1, $d_2 \in D$. Sæt $v_n = u_n\varphi_n(u_n^*)$. Da er $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ en følge af unitære i D, og jvf. Lemma 6.1.2 er $[v_n]_1 = [u_n u_n^*]_1 = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Endvidere gælder, at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\varphi(d) - v_n^* d v_n\| &\le \lim_{n\to\infty} (\|\varphi(d) - u_n^* d u_n\| + \|u_n^* d u_n - v_n^* d v_n\|) \\
&= \lim_{n\to\infty} \|u_n^* d u_n - v_n^* d v_n\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|u_n^* d u_n - \varphi_n(u_n) u_n^* d u_n \varphi_n(u_n^*)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|u_n^* d u_n - u_n^* \varphi_n(u_n) \varphi(u_n^*) d u_n\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $d \in D$. □

Proposition 6.1.4. [1] *Lad D være en separabel, unital og stærkt selv-absorberende C^*-algebra. Da kan de unitære i $D \otimes D$, som implementerer det approksimative indre flip på $D \otimes D$ vælges til at repræsentere 0 i $K_1(D \otimes D) \cong K_1(D)$.*
Hvis D er K_1-injektiv gælder specielt, at de unitære kan vælges til at være homotope med 1_D.

Bevis. Da D har approksimativt indre flip, er automorfien $\sigma_D : D \otimes D \mapsto D \otimes D$ givet ved,

$$\sigma_D(d_1 \otimes d_2) = d_2 \otimes d_1, \quad d_1, d_2 \in D$$

approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_{D \otimes D} : D \otimes D \mapsto D \otimes D$. Korollar 6.1.3 giver, at der findes en følge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ af unitære i $D \otimes D$, så

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_D(x) - v_n^* x v_n\| = 0$$

for alle $x \in D \otimes D$ og $[v_n]_1 = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

For hvert $n \in \mathbb{N}$ er $v_n \in \mathcal{U}(D)$, idet $D \otimes D \cong D$. Lad $\langle v_n \rangle$ være ækvivalensklassen i $\mathcal{U}(D)/\mathcal{U}_0(D)$ af v_n. Hvis $\omega : \mathcal{U}(D)/\mathcal{U}_0(D) \mapsto K_1(D)$ er injektiv fås, at $\langle v_n \rangle = 0$. Dvs. $v_n \in \mathcal{U}_0(D)$, så $v_n \sim_h 1_D$. $\square$

I beviset for Lemma 6.1.6 får vi brug for, at en separabel C^*-algebra A har en approksimativ enhed, der opfylder nedenstående betingelser:

Lemma 6.1.5. *Lad A være en separabel C^*-algebra. Da findes en approksimativ enhed $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ for A, hvor e_n er et positivt, normaliseret element i A, som opfylder,*

$$e_n e_{n+1} = e_n = e_{n+1} e_n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. Da A er separabel findes et positivt element $e \in A$, så $A = \overline{eAe}$ jvf. [Ped79, Theorem 3.10.5 og dets bevis]. Lad $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge af kontinuerte funktioner, $f_n : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \mapsto [0,1]$ defineret ved,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{1}{n+1} \\ n(n+1)t - n, & \frac{1}{n+1} \le t < \frac{1}{n} \\ 1, & t \ge \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Dvs. $f_n \in C(\sigma(e))$, så for ethvert $n \in \mathbb{N}$ defineres $e_n = f_n(e)$. Af kontinuert funktionskalkyle fås, at e_n er et positivt element i $\widetilde{A}$, men da $f_n(0) = 0$ er $e_n \in A$. Endvidere fås, at

$$\|e_n\| = \sup\{|f_n(t)| : t \in \sigma(e)\} \le 1,$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.
Da $f_n(t) f_{n+1}(t) = f_n(t) = f_{n+1}(t) f_n(t)$ for alle $t \in [0,1]$, er $e_{n+1} e_n = e_n = e_n e_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi skal nu vise, at $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er en approksimativ enhed for A. Definer en følge $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ af kontinuerte funktioner, $h_n : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ved,

$$h_n(t) = (f_n(t) - 1)t = \begin{cases} -t, & 0 \le t < \frac{1}{n+1} \\ n(n+1)t(t - \frac{1}{n}), & \frac{1}{n+1} \le t < \frac{1}{n} \\ 0, & t \ge \frac{1}{n}. \end{cases}$$

[1][TW05, Proposition 1.13]

Dvs. $h_n \in C(\sigma(e))$ og $\|h_n\|_\infty = \frac{1}{n+1}$.
Så $h_n(e) = e_n e - e, n \in \mathbb{N}$, og kontinuert funktionskalkyle giver, at

$$\|h_n(e)\| = \|h_n\|_\infty = \frac{1}{n+1},$$

hvilket medfører, at

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n e - e\| = 0.$$

Tilsvarende er $\lim_{n\to\infty} \|ee_n - e\| = 0$.

Lad nu $x \in eAe$. Da findes $x' \in A$, så $x = ex'e$, og

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n x - x\| = \lim_{n\to\infty} \|(e_n e - e)x'e\| \leq \lim_{n\to\infty} \|e_n e - e\|\|x'e\| = 0.$$

Analogt fås, $\lim_{n\to\infty} \|xe_n - x\| = 0$.
Lad $x \in A$ og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da $A = \overline{eAe}$ findes en følge $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq eAe$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Der gælder, at

$$\|e_n x - x\| \leq \|e_n x - e_n x_m\| + \|e_n x_m - x_m\| + \|x_m - x\| \leq \|x - x_m\| + \|e_n x_m - x_m\| + \|x_m - x\|.$$

Ved at vælge $m \in \mathbb{N}$, så $\|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$ og $n \in \mathbb{N}$, så $\|e_n x_m - x_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$ fås, at $\|e_n x - x\| < \varepsilon$. Tilsvarende vises, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $\|xe_n - x\| < \varepsilon$. □

Vi skal bruge ovenstående lemma til at vise følgende resultat, som både bruges i beviset for Lemma 6.1.6 og også senere i kapitlet, der omhandler ekstensioner.

Lemma 6.1.6. [2] *Lad A være en separabel C^*-algebra, så A er et ideal i en separabel, unital C^*-algebra B. Da findes en følge $(\beta_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier*

$$\beta_n : C([0,1]) \mapsto \widetilde{A} \subseteq B,$$

så følgende er opfyldt:

(i) $\beta_n(C_0([0,1[)) \subseteq A$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(h)a - h(0)a\| = 0$ *for alle* $h \in C([0,1])$ *og alle* $a \in A$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(h)b - b\beta_n(h)\| = 0$ *for alle* $h \in C([0,1])$ *og alle* $b \in B$.

Bevis. Da A er separabel findes en approksimativ enhed $(f_j)_{j=1}^\infty$ for A af positive elementer, som opfylder, at $\|f_j\| = 1$, $f_j f_{j+1} = f_j = f_{j+1} f_j$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Af [Ped79, Theorem 3.12.16] findes naturlige tal $j_1 < j_2 < j_3, \ldots$ og en approksimativ enhed $(e_n)_{n=1}^\infty$ for A, som opfylder, at $e_n \in \mathrm{co}\{f_j : j_n \leq j < j_{n+1}\}$ og $(e_n)_{n=1}^\infty$ er quasicentral mht. B. (Dvs. $\lim_{n\to\infty} \|e_n b - be_n\| = 0$ for alle $b \in B$.)

[2] [TW05, Lemma 2.4]

Heraf ses, at $e_n \geq 0$ og $\|e_n\| \leq 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Endvidere er $e_n e_{n+1} = e_n = e_{n+1} e_n$, thi der findes $m_0, m, s_0, s \in \mathbb{N}$ og $a_i, b_r \in \mathbb{R}$, så

$$0 < a_i < 1, m_0 \geq j_n, m < j_{n+1}, \quad \text{så} \quad \sum_{i=m_0}^{m} a_i = 1 \text{ og } e_n = \sum_{i=m_0}^{m} a_i f_i,$$

og

$$0 < b_r < 1, s_0 \geq j_{n+1}, s < j_{n+2}, \quad \text{så} \quad \sum_{r=s_0}^{s} b_r = 1 \text{ og } e_{n+1} = \sum_{i=s_0}^{s} b_r f_r.$$

Dvs.

$$e_n e_{n+1} = \sum_{i=m_0}^{m} \sum_{r=s_0}^{s} a_i b_r f_i f_r = \sum_{i=m_0}^{m} \sum_{r=s_0}^{s} a_i b_r f_i = \sum_{i=m_0}^{m} a_i f_i \sum_{r=s_0}^{s} b_r = e_n.$$

Definer for ethvert naturligt tal $n \geq 2$ kontinuerte funktioner $g_n, h_n \in C([0,1])$ ved,

$$g_n(t) = \begin{cases} -nt + 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

og

$$h_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -\frac{n}{n-1} t + \frac{n}{n-1}, & \frac{1}{n} < t \leq 1. \end{cases}$$

Vi vil for hvert $n \geq 2$ finde en unital *-homomorfi $\beta_n : C([0,1]) \mapsto \widetilde{A}$, så

$$\beta_n(g_n) = e_n \quad \text{og} \quad \beta_n(h_n) = e_{n+1}.$$

Dvs. vi skal finde et positivt element $a_n \in \widetilde{A}$ med $\|a_n\| \leq 1$, så $\beta_n(\mathrm{id}_{[0,1]}) = a_n$, $g_n(a_n) = \beta_n(g_n) = e_n$ og $h_n(a_n) = \beta_n(h_n) = e_{n+1}$. Men

$$\mathrm{id}_{[0,1]} = \frac{1}{n}(1 - g_n) + \frac{n-1}{n}(1 - h_n),$$

så hvis der findes et a_n som ønsket, må a_n være på formen,

$$a_n = \frac{1}{n}(1_B - e_n) + \frac{n-1}{n}(1_B - e_{n+1}).$$

Dvs. $a_n \in \widetilde{A}$ er et selvadjungeret element og $\sigma(a_n) \subseteq [0,1]$, så a_n er positivt med $\|a_n\| \leq 1$.
Vi skal nu tjekke, at $g_n(a_n) = e_n$ og at $h_n(a_n) = e_{n+1}$:
Lad γ være en karakter på $C^*(1_B, e_n, e_{n+1}, \dots)$. Da γ skiller punkter i $C^*(1_B, e_n, e_{n+1}, \dots)$, er det nok at vise, at $\gamma(g_n(a_n)) = \gamma(e_n)$ og at $\gamma(h_n(a_n)) = \gamma(e_{n+1})$.
Det gælder, at $0 \leq \gamma(e_n) \leq 1$, og hvis $\gamma(e_n) > 0$, da er $\gamma(e_{n+1}) = 1$, idet $e_n e_{n+1} = e_n$. Så $\gamma(a_n) = \frac{1}{n}(1 - \gamma(e_n))$. Men $g_n(t) = -nt + 1$ for $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$, så $\gamma(g_n(a_n)) = g_n(\gamma(a_n)) = \gamma(e_n)$, og $h_n(t) = 1$ for $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$, hvilket betyder, at $\gamma(h_n(a_n)) = h_n(\gamma(a_n)) = 1 = \gamma(e_{n+1})$.
Hvis $\gamma(e_n) = 0$, da er $\gamma(a_n) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(1 - \gamma(e_{n+1})) = 1 - \frac{n-1}{n}\gamma(e_{n+1}) \geq \frac{1}{n}$. Dvs.

$$\gamma(g_n(a_n)) = g_n(\gamma(a_n)) = 0 = \gamma(e_n)$$

og

$$\gamma(h_n(a_n)) = h_n(\gamma(a_n)) = -\frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\gamma(e_{n+1})\right) + \frac{n}{n-1} = \gamma(e_{n+1}).$$

Så der findes unitale *-homomorfier, der giver det ønskede.
Endvidere er $a_n \equiv 1_B \pmod{A}$, idet

$$a_n = 1_B - \left(\frac{1}{n}e_n + \frac{n-1}{n}e_{n+1}\right).$$

Hvis $f \in C_0([0,1[)$ (dvs. $f(1) = 0$), da er $\beta_n(f) \in A$. Dette ses, idet vi lader $\pi : \widetilde{A} \mapsto \mathbb{C}$ være kvotientafbildningen. Da fås, at

$$\pi(\beta_n(f)) = \pi(f(a_n)) = f(\pi(a_n)) = f(1) = 0.$$

Så $\beta_n(f) \in \ker(\pi) = A$.

Da $g_n(0) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og da der for $0 < t \leq 1$ gælder, at $g_n(t) \to 0$ for $n \to \infty$, er

$$\lim_{n\to\infty} \|hg_n - h(0)g_n\| = 0$$

for enhver funktion $h \in C([0,1])$. Dvs.

$$\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(h)e_n - h(0)e_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\beta_n(h)\beta_n(g_n) - \beta_n(h(0)g_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|\beta_n(hg_n - h(0)g_n)\| = 0.$$

Heraf fås, at

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(h)a - h(0)a\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} (\|\beta_n(h)a - \beta_n(h)e_na\| + \|\beta_n(h)e_na - h(0)e_na\| + \|h(0)e_na - h(0)a\|) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} (\|\beta_n(h)\|\|a - e_na\| + \|\beta_n(h)e_n - h(0)e_n\|\|a\| + |h(0)|\|e_na - a\|) \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$ og alle $h \in C([0,1])$.

Lad nu h være en vikårlig funktion i $C([0,1])$. Af Stone-Weierstrass Sætning findes en følge af polynomier $(p_k)_{k=1}^{\infty}$, så $\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |p_k(t) - h(1-t)| = 0$, hvilket er ækvivalent med $\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |p_k(1-t) - h(t)| = 0$. Men $\lim_{n\to\infty} \|h_n - (1 - \mathrm{id}_{[0,1]})\|_\infty = 0$, så $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|p_k(h_n) - h\|_\infty = 0$.

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$\begin{aligned}
\|p_k(e_{n+1}) - \beta_n(h)\| &= \|p_k(\beta_n(h_n)) - \beta_n(h)\| \\
&= \|\beta_n(p_k(h_n)) - \beta_n(h)\| \\
&= \|\beta_n(p_k(h_n) - h)\| \\
&\leq \|p_k(h_n) - h\|_\infty.
\end{aligned}$$

Dvs. $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|p_k(e_{n+1}) - \beta_n(h)\| = 0$.
For alle $b \in B$ gælder, at $\lim_{n\to\infty} \|e_{n+1}b - be_{n+1}\| = 0$, idet $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er quasicentral mht. B. Ved at bruge trekantsuligheden et endeligt antal gange fås heraf for alle $k \in \mathbb{N}$, at

$$\lim_{n\to\infty} \|p_k(e_{n+1})b - bp_k(e_{n+1})\| = 0$$

for alle $b \in B$.
For ethvert $k \in \mathbb{N}$ og alle $n \in \mathbb{N}$ gælder,

$$\beta_n(h)b - b\beta_n(h) = p_k(e_{n+1})b - bp_k(e_{n+1}) - p_k(e_{n+1})b + \beta_n(h)b + bp_k(e_{n+1}) - b\beta_n(h).$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|\beta_n(h)b-b\beta_n(h)\| &\le \limsup_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\|p_k(e_{n+1})b-bp_k(e_{n+1})\|+\|\beta_n(h)b-p_k(e_{n+1})b\| \\ &\quad+\|bp_k(e_{n+1})-b\beta_n(h)\|) \\ &\le \limsup_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\|p_k(e_{n+1})b-bp_k(e_{n+1})\|+2\|b\|\|\beta_n(h)-p_k(e_{n+1})\|) \\ &\le \limsup_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|p_k(e_{n+1})b-bp_k(e_{n+1})\| \\ &\quad+\limsup_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}2\|b\|\|\beta_n(h)-p_k(e_{n+1})\| \\ &=0\end{aligned}$$

for alle $h\in C([0,1])$ og alle $b\in B$. □

Proposition 6.1.4 og Lemma 6.1.6 skal nu benyttes til at bevise nedenstående resultat, der giver en følge af kontraktioner i $A\otimes D\otimes D$, der opfylder nogle bestemte betingelser, når A og D er separable C^*-algebraer, og D er stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv.

Lemma 6.1.7. [3] *Lad A og D være separable C^*-algebraer og antag, at D er unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv. Da findes en følge $(s_n)_{n=1}^\infty$ af kontraktioner i $A\otimes D\otimes D$, der opfylder følgende betingelser for alle $a\in A$ og alle $d\in D$:*

(i) $\lim_{n\to\infty}\|s_n(a\otimes 1_{D\otimes D})-(a\otimes 1_{D\otimes D})s_n\|=0.$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\|s_n^*(a\otimes 1_D\otimes d)s_n-a\otimes d\otimes 1_D\|=0.$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\|s_n^*s_n(a\otimes 1_{D\otimes D})-a\otimes 1_{D\otimes D}\|=0.$

(iv) *$s_n+1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}$ er unitær i $(A\otimes D\otimes D)^\sim$, hvor 1 er enheden i $(A\otimes D\otimes D)^\sim$.*

Bevis. For $i=0,2$ betragtes funktionerne $h_i\in C_0([0,1[)$ defineret ved,

$$h_i(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le \frac{i}{3}\\ -3t+1+i, & \frac{i}{3}<t<\frac{i+1}{3}\\ 0, & \frac{i+1}{3}\le t\le 1.\end{cases}$$

Af Lemma 6.1.6 findes en følge $(\beta_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier, $\beta_n: C_0([0,1[)\mapsto A$, så

$$\lim_{n\to\infty}\|\beta_n(h_i)a-h_i(0)a\|=0,\quad i=0,2$$

for alle $a\in A$, da A er et lukket to-sidet ideal i $\widetilde{A}$. Dette betyder, at

$$\lim_{n\to\infty}\|\beta_n(h_i)a-a\|=0,\quad i=0,2$$

for alle $a\in A$.
Sætning 4.2.2 giver, at D har approksimativt indre halv-flip, så der findes en følge $(v_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $D\otimes D$, så

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n^*(1_D\otimes d)v_n-d\otimes 1_D\|=0$$

[3] [TW05, Lemma 2.5]

for alle $d \in D$. Jvf. Proposition 6.1.4 kan v_n vælges, så v_n er homotop med $1_{D\otimes D}$, da $D \cong D\otimes D$ er K_1-injektiv. Så for hvert $n \in \mathbb{N}$ findes en kontinuert funktion $u_n : [0,1] \mapsto D \otimes D$, så

$$u_n(t) = \begin{cases} v_n, & 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ u_n(t), & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ 1_{D\otimes D}, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Bemærk, at $u_n \in C([0,1], D \otimes D)$ ($\cong C([0,1]) \otimes D \otimes D$, [Mur90, Theorem 6.4.17]) er unitær, da $v_n \in \mathcal{U}_0(D \otimes D)$.
Definer

$$\tilde{u}_n = (h_2 \otimes 1_{D\otimes D})u_n \in C_0([0,1[) \otimes D \otimes D$$

og

$$s_n = (\beta_n \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})(\tilde{u}_n) \in A \otimes D \otimes D.$$

Da $h_2(t) = 1$ for $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$ og $u_n(t) = 1_{D\otimes D}$ for $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ er $\tilde{u}_n$ et normalt element. Dermed bliver s_n også normalt, da $\beta_n \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D} : C_0([0,1[) \otimes D \otimes D \mapsto A \otimes D \otimes D$ er en *-homomorfi. Det gælder, at

$$\|s_n\| = \|(\beta_n(h_2) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})(u_n)\| \leq \|\beta_n(h_2)\| \leq \|h_2\|_\infty = 1,$$

så s_n er en kontraktion.
Definer en kontinuert funktion $\varphi \in C_0([0,1[)$ ved

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ -12t + 4, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Lad $(g_n)_{n=1}^\infty$ være følgen af kontinuerte funktioner fra beviset for Lemma 6.1.6, og lad $(e_n)_{n=1}^\infty$ være den approksimative enhed for A defineret i beviset for Lemma 6.1.6. Lad $n > 3$ og $k < n$. Da er $\varphi g_n = g_n$ og $(\varphi \otimes 1_{D\otimes D})u_n = (\varphi \otimes 1_{D\otimes D})(1_{[0,1]} \otimes v_n) = \varphi \otimes v_n$. Dette giver, at

$$\begin{aligned}
(e_k \otimes 1_{D\otimes D})s_n &= (e_k e_n \otimes 1_{D\otimes D})s_n \\
&= (e_k \otimes 1_{D\otimes D})(e_n \otimes 1_{D\otimes D})s_n \\
&= (e_k \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(g_n) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(h_2) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})(u_n) \\
&= (e_k \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(g_n) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})(u_n) \\
&= (e_k \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(g_n) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(\varphi) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})(u_n) \\
&= (e_k \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(g_n) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n \otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})((\varphi \otimes 1_{D\otimes D})u_n) \\
&= (e_k \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(g_n) \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(\varphi) \otimes v_n) \\
&= (e_k \otimes 1_{D\otimes D})(\beta_n(g_n) \otimes v_n) \\
&= e_k \otimes v_n.
\end{aligned}$$

For alle $a \in A$ og alle $x \in D \otimes D$ fås hermed, at

$$(ae_k \otimes x)s_n = (a \otimes x)(e_k \otimes 1_{D\otimes D})s_n = (a \otimes x)(e_k \otimes v_n) = ae_k \otimes xv_n$$

for $n > 3$ og $k < n$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ er en approksimativ enhed for A, findes for $a \in A$ og $x \in D \otimes D$ et $k > 3$, så $\|a - ae_k\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$. Dvs.

$$\begin{aligned}\|(a \otimes x)s_n - a \otimes xv_n\| &\leq \|(a \otimes x)s_n - (ae_k \otimes x)s_n\| + \|(ae_k \otimes x)s_n - a \otimes xv_n\| \\ &\leq \|a \otimes x - ae_k \otimes x\| + \|ae_k \otimes xv_n - a \otimes xv_n\| \\ &= \|a - ae_k\|\|x\| + \|ae_k - a\|\|xv_n\| \\ &= 2\|a - ae_k\|\|x\| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

for $n > k$. Så $\lim_{n\to\infty} \|(a \otimes x)s_n - a \otimes xv_n\| = 0$. Tilsvarende er $\lim_{n\to\infty} \|s_n(a \otimes x) - a \otimes xv_n\| = 0$ for alle $a \in A$ og alle $x \in D \otimes D$. Dvs.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \|s_n(a \otimes 1_{D\otimes D}) - (a \otimes 1_{D\otimes D})s_n\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|s_n(a \otimes 1_{D\otimes D}) - a \otimes 1_{D\otimes D}v_n\| + \|a \otimes 1_{D\otimes D}v_n - (a \otimes 1_{D\otimes D})s_n\|) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Endvidere gælder for alle $a \in A$,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \|s_n^* s_n(a \otimes 1_{D\otimes D}) - a \otimes 1_{D\otimes D})\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|s_n^*(s_n(a \otimes 1_{D\otimes D}) - a \otimes v_n)\| + \|s_n^*(a \otimes v_n) - a \otimes 1_{D\otimes D}\|) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|s_n^*\|\|s_n(a \otimes 1_{D\otimes D}) - a \otimes v_n\| + \|s_n^*(a \otimes v_n) - a \otimes v_n^* v_n\|) \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(a^* \otimes v_n^*)s_n - a^* \otimes v_n^* v_n\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

For alle $a \in A$ og alle $d \in D$ gælder også, at

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \|s_n^*(a \otimes 1_D \otimes d)s_n - a \otimes d \otimes 1_D\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|s_n^*((a \otimes 1_D \otimes d)s_n - a \otimes (1_D \otimes d)v_n)\| + \|s_n^*(a \otimes (1_D \otimes d)v_n - a \otimes v_n(d \otimes 1_D))\| \\ &\quad + \|s_n^*(a \otimes v_n(d \otimes 1_D)) - a \otimes d \otimes 1_D\|) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|(a \otimes 1_D \otimes d)s_n - a \otimes (1_D \otimes d)v_n\| + \|a \otimes ((1_D \otimes d)v_n - v_n(d \otimes 1_D))\| \\ &\quad + \|(a^* \otimes (d^* \otimes 1_D)v_n^*)s_n - a^* \otimes d^* \otimes 1_D\|) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|a\|\|v_n\|\|v_n^*(1_D \otimes d)v_n - (d \otimes 1_D)\| + \|(a^* \otimes (d^* \otimes 1_D)v_n^*)s_n - a^* \otimes (d^* \otimes 1_D)v_n^* v_n\|) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Vi skal nu tjekke, at $s_n + 1_{(A\otimes D\otimes D)^\sim} - (s_n^* s_n)^{\frac{1}{2}}$ er unitær i $(A \otimes D \otimes D)^\sim$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Men da $\tilde{u}_n$ er et normalt element gælder, at $\tilde{u}_n^* \tilde{u}_n = h_2^2 \otimes 1_{D\otimes D}$, så $s_n^* s_n = \beta_n(h_2^2) \otimes 1_{D\otimes D} = (\beta_n(h_2) \otimes 1_{D\otimes D})^2$. Dvs. $(s_n^* s_n)^{\frac{1}{2}} = \beta_n(h_2) \otimes 1_{D\otimes D}$.
Endvidere er,

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n^*(1_{C([0,1])\otimes D\otimes D} - (\tilde{u}_n^* \tilde{u}_n)^{\frac{1}{2}}) &= ((h_2 \otimes 1_{D\otimes D})u_n)^*((1_{[0,1]} - h_2) \otimes 1_{D\otimes D}) \\ &= u_n^*(h_2 \otimes 1_{D\otimes D})((1_{[0,1]} - h_2) \otimes 1_{D\otimes D}) \\ &= u_n^*((h_2 - h_2^2) \otimes 1_{D\otimes D}) \\ &= (h_2 - h_2^2) \otimes 1_{D\otimes D}.\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}s_n^*(1_{(A\otimes D\otimes D)^\sim}-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}) &= (\beta_n\otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})(\tilde{u}_n^*(1_{C([0,1])\otimes D\otimes D}-(\tilde{u}_n^*\tilde{u}_n)^{\frac{1}{2}}))\\ &= (\beta_n\otimes \mathrm{id}_{D\otimes D})((h_2-h_2^2)\otimes 1_{D\otimes D})\\ &= \beta_n(h_2-h_2^2)\otimes 1_{D\otimes D}.\end{aligned}$$

Heraf fås, at

$$(1_{(A\otimes D\otimes D)^\sim}-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})s_n = (s_n^*(1_{(A\otimes D\otimes D)^\sim}-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}))^* = \beta_n(h_2-h_2^2)\otimes 1_{D\otimes D}.$$

Dvs.

$$\begin{aligned}&(s_n^*+1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})(s_n+1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})\\ &= 2s_n^*s_n+s_n^*(1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})+(1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})s_n+1-2(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\beta_n(h_2^2)\otimes 1_{D\otimes D}+2\beta_n(h_2-h_2^2)\otimes 1_{D\otimes D}+1-2\beta_n(h_2)\otimes 1_{D\otimes D}\\ &= 1+\beta_n(2h_2^2+2h_2-2h_2^2-2h_2)\otimes 1_{D\otimes D}\\ &= 1,\end{aligned}$$

hvor 1 er enheden i $(A\otimes D\otimes D)^\sim$. Analogt er $(s_n+1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})(s_n^*+1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})=1$, hvilket betyder, at $s_n+1-(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}$ er unitær i $(A\otimes D\otimes D)^\sim$. □

Til beviset for hovedsætningen i dette kapitel skal vi bruge en modificeret version af Sætning 2.4.1, som fås nedenfor.

Proposition 6.1.8. [4] *Lad A og B være separable C^*-algebraer og lad $\iota : A \mapsto B$ være en injektiv *-homomorfi. Antag at der findes en følge $(v_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $(\widetilde{B})_\infty$, så*

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n(\pi_\infty^{(B)}\circ\delta_B)(\iota(a))-(\pi_\infty^{(B)}\circ\delta_B)(\iota(a))v_n\|=0$$

og

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{dist}(v_n^*(\pi_\infty^{(B)}\circ\delta_B)(b)v_n,(\iota(A))_\infty)=0$$

for alle $a\in A$ og alle $b\in B$. Da findes en *-isomorfi $\psi : A\mapsto B$, som er approksimativt unitært ækvivalent med ι.

Bevis. Jvf. Sætning 2.4.1 skal vi finde en følge $(u_n)_{n=1}^\infty$ af unitære i $\mathcal{M}(B)$, så

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\iota(a)-\iota(a)u_n\|=0$$

for alle $a\in A$ og

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{dist}(u_n^*bu_n,\iota(A))=0$$

for alle $b\in B$.
Lad $\{a_1,\dots,a_k\}\subseteq A$ og $\{b_1,\dots,b_l\}\subseteq B$ være endelige delmængder i hhv. A og B, og lad $\varepsilon>0$ være givet. Samme argument som i beviset for Sætning 2.4.2 giver, at det er tilstrækkeligt at finde en unitær $u\in\mathcal{M}(B)$, så

$$\|u\iota(a_i)-\iota(a_i)u\|<\varepsilon \quad \text{for } i=1,\dots,k$$

[4] [TW05, Prop. 2.6]

og

$$\operatorname{dist}(u^* b_j u, \iota(A)) < \varepsilon \quad \text{for } j = 1, \dots, l.$$

Pr. antagelse findes $N \in \mathbb{N}$, en unitær $v_N \in (\widetilde{B})_\infty$ og $c_1, \dots, c_l \in (\iota(A))_\infty$, så

$$\|v_N(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(\iota(a_i)) - (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(\iota(a_i))v_N\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } i = 1, \dots, k \quad \text{og}$$

$$\|v_N^*(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b_j)v_N - c_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } j = 1, \dots, l.$$

Da v_N er unitær i $(\widetilde{B})_\infty$ findes jvf. Lemma A.1.15 en følge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\widetilde{B})$, så u_n er unitær i $\widetilde{B}$ og

$$v_N = \pi_\infty^{(\widetilde{B})}((u_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Tilsvarende findes $(\iota(a_{j,n}))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\iota(A)) \subseteq l^\infty(B)$, så

$$\pi_\infty^{(B)}((\iota(a_{j,n}))_{n\in\mathbb{N}}) = c_j.$$

Heraf fås, at

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \|u_n\iota(a_i) - \iota(a_i)u_n\| &= \|\pi_\infty^{(\widetilde{B})}((u_n\iota(a_i))_{n\in\mathbb{N}}) - \pi_\infty^{(\widetilde{B})}((\iota(a_i)u_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \\ &= \|v_N(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(\iota(a_i)) - (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(\iota(a_i))v_N\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

for $i = 1, \dots, k$, og

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \|u_n^* b_j u_n - \iota(a_{j,n})\| &= \|\pi_\infty^{(B)}((u_n^* b_j u_n)_{n\in\mathbb{N}}) - \pi_\infty^{(B)}((\iota(a_{j,n}))_{n\in\mathbb{N}})\| \\ &= \|v_N^*(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b_j)v_N - c_j\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

for $j = 1, \dots, l$. Så der findes altså mindst ét $M \in \mathbb{N}$, så $\|u_M\iota(a_i) - \iota(a_i)u_M\| < \varepsilon$ for $i = 1, \dots, k$ og $\|u_M^* b_j u_M - \iota(a_{j,M})\| < \varepsilon$ for $j = 1, \dots, l$. □

Lemma 6.1.9. *Lad A være en C^*-algebra og lad $(e_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ være en følge af kontraktioner i A. Antag $a \in A$ og $\lim_{n\to\infty} \|e_n a - a\| = 0$. Da vil $\lim_{n\to\infty} \|f(e_n)a - a\| = 0$ for alle $f \in C(\sigma(e_n))$ med $f(1) = 1$.*

Bevis. For ethvert $k \in \mathbb{N}$ fås ved at benytte trekantsuligheden $k-1$ gange,

$$\lim_{n\to\infty} \|(e_n)^k a - a\| = 0.$$

Lad nu $p_k(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k$, $c_i \in \mathbb{C}$ være et polynomium af grad k med $p_k(1) = 1$. Dvs. $\sum_{i=0}^k c_i = 1$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|p_k(e_n)a - a\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=0}^k c_i(e_n)^i a - \sum_{i=0}^k c_i a \right\| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^k \|c_i((e_n)^i a - a)\| = 0.$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet, lad $f \in C(\sigma(e_n))$ og antag $f(1) = 1$. Af Stone-Weierstrass Sætning findes et polynomium p med $p(1) = 1$, så $\|p - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\|a\|}$. Ved at vælge $n \in \mathbb{N}$ så $\|p(e_n)a - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ fås,

$$\|f(e_n)a - a\| \leq \|(f(e_n) - p(e_n))a\| + \|p(e_n)a - a\| < \varepsilon.$$

□

Vi er nu i stand til at bevise en ækvivalent betingelse for D-stabilitet af en separabel C^*-algebra A, når D er separabel, unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv. Denne betingelse skal hovedsageligt benyttes til at bevise permanens egenskaber for D-stabilitet samt D-stabilitet vedr. ekstensioner i de næste kapitler.

Sætning 6.1.10. [5] *Lad A og D være separable C^*-algebraer og antag D er unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv. Da findes en *-isomorfi $\varphi : A \mapsto A \otimes D$, hvis og kun hvis der findes en *-homomorfi $\sigma : A \otimes D \mapsto (A)_\infty$, som opfylder, at*

$$\sigma(a \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)$$

for alle $a \in A$. I dette tilfælde vil φ være approksimativt unitært ækvivalent med $\mathrm{id}_A \otimes 1_D$.

Bevis. Da $D \cong \bigotimes_{i=1}^\infty D$ og D har approksimativt indre halvflip følger af Sætning 4.3.3, at der findes en følge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ af *-homomorfier, $\varphi_n : D \otimes D \mapsto D$, så $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d \otimes 1_D) - d\| = 0$ for alle $d \in D$. Heraf er $\sigma_n = \mathrm{id}_A \otimes \varphi_n : A \otimes D \otimes D \mapsto A \otimes D$ en *-homomorfi, og vi kan definere *-homomorfien $\sigma : A \otimes D \otimes D \mapsto (A \otimes D)_\infty$ ved,

$$\sigma(x) = \pi_\infty^{(A\otimes D)}((\sigma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}),\ x \in A \otimes D \otimes D.$$

Dvs.

$$\begin{aligned}
&\|\sigma(a \otimes d \otimes 1_D) - (\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(a \otimes d)\| \\
&= \|\pi_\infty^{(A\otimes D)}((a \otimes \varphi_n(d \otimes 1_D))_{n\in\mathbb{N}}) - (\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(a \otimes d)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|a \otimes (\varphi_n(d \otimes 1_D) - d)\| \\
&= \|a\| \limsup_{n\to\infty} \|\varphi_n(d \otimes 1_D) - d\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$ og alle $d \in D$. Heraf fås ved at benytte trekantsuligheden, at

$$\|\sigma(x \otimes 1_D) - (\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(x)\| = 0$$

for alle $x \in A \odot D$, idet σ og $(\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})$ er lineære. Så da $A \odot D$ er en tæt delmængde i $A \otimes D$, og da σ og $(\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})$ er lineære kontraktioner fås, at

$$\|\sigma(x \otimes 1_D) - (\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(x)\| = 0$$

for alle $x \in A \otimes D$. Hvis $A \cong A \otimes D$ gælder hermed,

$$\|\sigma(a \otimes 1_D) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)\| = 0$$

[5] [TW05, Thm. 2.3]

for alle $a \in A$.

Antag omvendt, at der findes en *-homomorfi $\sigma : A \otimes D \mapsto (A)_\infty$, der opfylder, at

$$\sigma(a \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)$$

for alle $a \in A$.

Lad $\iota : A \mapsto A \otimes D$ være den injektive *-homomorfi givet ved $\iota = \mathrm{id}_A \otimes 1_D$, og definer *-homomorfien $\beta : D \mapsto (\widetilde{A} \otimes D)_\infty$ ved

$$\beta(d) = (\pi_\infty^{(\widetilde{A}\otimes D)} \circ \delta_{\widetilde{A}\otimes D})(1_{\widetilde{A}} \otimes d), \ d \in D.$$

Afbildningen $\iota : A \mapsto A \otimes D$ udvides til en injektiv *-homomorfi $\iota_1 : l^\infty(A) \mapsto l^\infty(A \otimes D)$ ved,

$$\iota_1((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\iota(a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \otimes 1_D)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bemærk, at $\ker(\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \iota_1) = c_0(A)$.

For hvis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker(\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \iota_1)$, er $\pi_\infty^{(A\otimes D)}(\iota(a_n))_{n\in\mathbb{N}} = 0$, hvilket betyder, at $\lim_{n\to\infty} \|\iota(a_n)\| = 0$. Men da ι er isometrisk fås, $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$.

Hvis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(A)$, er $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$, og da ι er isometrisk er $\lim_{n\to\infty} \|\iota(a_n)\| = 0$. Så $\|(\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \iota_1)((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\| = \|\pi_\infty^{(A\otimes D)}(\iota(a_n))_{n\in\mathbb{N}}\| = \limsup_{n\to\infty} \|\iota(a_n)\| = 0$.

Af første homomorfisætning fås hermed en injektiv *-homomorfi $\bar{\iota} : (A)_\infty \mapsto (A \otimes D)_\infty$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd}
l^\infty(A) \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\pi_\infty^{(A)}"] & l^\infty(A \otimes D) \arrow[d, "\pi_\infty^{(A\otimes D)}"] \\
(A)_\infty \arrow[r, dashed, "\bar{\iota}"] & (A \otimes D)_\infty.
\end{tikzcd}$$

Dvs. $\bar{\iota} \circ \sigma : A \otimes D \mapsto (A \otimes D)_\infty$ er en *-homomorfi, der opfylder, at

$$\begin{aligned}
(\bar{\iota} \circ \sigma)(a \otimes 1_D) &= \bar{\iota}(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a) \\
&= (\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \iota_1)(\delta_A(a)) \\
&= (\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(\iota(a)) \\
&= (\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(a \otimes 1_D)
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$. Dvs. $(\bar{\iota} \circ \sigma)(a \otimes 1_D)\beta(d) = \beta(d)(\bar{\iota} \circ \sigma)(a \otimes 1_D)$ for alle $a \in A$ og alle $d \in D$. Men da $\iota, \bar{\iota}$ er injektive *-homomorfier fås,

$$(\bar{\iota} \circ \sigma)(A \otimes D) \subseteq \bar{\iota}(A)_\infty \cong (A)_\infty \cong (\iota(A))_\infty = (A \otimes \mathbb{C}1_D)_\infty.$$

Endvidere kan $(A \otimes \mathbb{C}1_D)_\infty$ betragtes som en del-C^*-algebra af $(\widetilde{A} \otimes D)_\infty$, idet inklusionsafbildningen $\psi : A \otimes \mathbb{C}1_D \mapsto \widetilde{A} \otimes D$ kan udvides til en injektiv *-homomorfi $\overline{\psi} : (A \otimes \mathbb{C}1_D)_\infty \mapsto (\widetilde{A} \otimes D)_\infty$ på samme måde som vi konstruerede $\bar{\iota}$. Hermed har $(\bar{\iota} \circ \sigma)$ og β kommuterende billeder i $(\widetilde{A} \otimes D)_\infty$. Så der findes en *-homomorfi $\rho : A \otimes D \otimes D \mapsto (\widetilde{A} \otimes D)_\infty$, som opfylder, at

$$\rho(a \otimes d_0 \otimes d_1) = (\bar{\iota} \circ \sigma)(a \otimes d_0)\beta(d_1), \quad a \in A, d_0, d_1 \in D$$

jvf. [Mur90, Remark 6.3.2]. Da $(\bar{\iota} \circ \sigma)(A \otimes D) \subseteq (A \otimes D)_\infty$ og $(A \otimes D)_\infty$ er et lukket to-sidet ideal i $(\widetilde{A} \otimes D)_\infty$ ses, at $\rho(A \otimes D \otimes D) \subseteq (A \otimes D)_\infty$.

Af Lemma 6.1.7 findes en følge $(s_n)_{n=1}^\infty$ af kontraktioner i $A \otimes D \otimes D$, der opfylder

(i) $\lim_{n\to\infty} \|s_n(a\otimes 1_{D\otimes D}) - (a\otimes 1_{D\otimes D})s_n\| = 0.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|s_n^*(a\otimes 1_D\otimes d)s_n - a\otimes d\otimes 1_D\| = 0.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|s_n^* s_n(a\otimes 1_{D\otimes D}) - a\otimes 1_{D\otimes D}\| = 0.$

(iv) $s_n + 1 - (s_n^* s_n)^{\frac{1}{2}}$ er unitær i $(A\otimes D\otimes D)^{\sim}$, hvor 1 er enheden i $(A\otimes D\otimes D)^{\sim}$.

Lad $\widetilde{\rho} : (A\otimes D\otimes D)^{\sim} \mapsto ((A\otimes D)_\infty)^{\sim}$ være unitaliseringen af ρ, og lad $v_n = \widetilde{\rho}(s_n + 1 - (s_n^* s_n)^{\frac{1}{2}})$. Dvs.

$$\begin{aligned}
&\|v_n(\pi_\infty^{(A\otimes D)}\circ\delta_{A\otimes D})(\iota(a)) - (\pi_\infty^{(A\otimes D)}\circ\delta_{A\otimes D})(\iota(a))v_n\| \\
&= \|v_n(\bar\iota\circ\sigma(a\otimes 1_D)\beta(1_D)) - (\bar\iota\circ\sigma(a\otimes 1_D)\beta(1_D))v_n\| \\
&= \|\widetilde{\rho}(s_n + 1 - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})\widetilde{\rho}(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - \widetilde{\rho}(a\otimes 1_D\otimes 1_D)\widetilde{\rho}(s_n + 1 + (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})\| \\
&\le \|(s_n + 1 - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)(s_n + 1 - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})\| \\
&= \|(s_n - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)(s_n - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})\| \\
&\le \|s_n(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)s_n\| + \|(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}\| \\
&\le \|s_n(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)s_n\| + \|(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - a\otimes 1_D\otimes 1_D\| \\
&\quad + \|a\otimes 1_D\otimes 1_D - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}\|.
\end{aligned}$$

Af Lemma 6.1.9 er $\lim_{n\to\infty}\|v_n(\pi_\infty^{(A\otimes D)}\circ\delta_{A\otimes D})(\iota(a)) - (\pi_\infty^{(A\otimes D)}\circ\delta_{A\otimes D})(\iota(a))v_n\| = 0$, da (iii) giver, at $\lim_{n\to\infty}\|s_n^*s_n(a\otimes 1_D\otimes 1_D) - a\otimes 1_D\otimes 1_D\| = 0$.
Tilsvarende er $\lim_{n\to\infty}\|a\otimes 1_D\otimes 1_D - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)s_n^*s_n\| = 0$.

For alle $a\in A$ og alle $d\in D$ gælder, at

$$\begin{aligned}
&v_n^*(\pi_\infty^{(A\otimes D)}\circ\delta_{A\otimes D})(a\otimes d)v_n \\
&= v_n^*(\bar\iota\circ\sigma)(a\otimes 1_D)\beta(d)v_n \\
&= v_n^*\rho(a\otimes 1_D\otimes d)v_n \\
&= \widetilde{\rho}((s_n^* + 1 - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})(a\otimes 1_D\otimes d)(s_n + 1 - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})) \\
&= \widetilde{\rho}((s_n^*(a\otimes 1_D\otimes d)s_n + s_n^*(a\otimes 1_D\otimes d) - s_n^*(a\otimes 1_D\otimes d)(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}} + (a\otimes 1_D\otimes d)s_n \\
&\quad - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes d)s_n + (a\otimes 1_D\otimes d) - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes d) - (a\otimes 1_D\otimes d)(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes d)(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}) \\
&= \widetilde{\rho}(s_n^*(a\otimes 1_D\otimes d)s_n) + \widetilde{\rho}(s_n^*(1_{\widetilde{A}}\otimes 1_D\otimes d))\widetilde{\rho}(a\otimes 1_D\otimes 1_D - (a\otimes 1_D\otimes 1_D)(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}})) \\
&\quad + \widetilde{\rho}(a\otimes 1_D\otimes 1_D - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes 1_D))\widetilde{\rho}((1_{\widetilde{A}}\otimes 1_D\otimes d)s_n) \\
&\quad + \widetilde{\rho}(a\otimes 1_D\otimes 1_D - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes 1_D))\widetilde{\rho}((1_{\widetilde{A}}\otimes 1_D\otimes d) \\
&\quad - \widetilde{\rho}(a\otimes 1_D\otimes 1_D - (s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}(a\otimes 1_D\otimes 1_D))\widetilde{\rho}((1_{\widetilde{A}}\otimes 1_D\otimes d)(s_n^*s_n)^{\frac{1}{2}}) \\
&\to \widetilde{\rho}(a\otimes d\otimes 1_D) \quad \text{for } n\to\infty \\
&= \rho(a\otimes d\otimes 1_D) \\
&= (\bar\iota\circ\sigma)(a\otimes d)\beta(1_D) \\
&= (\bar\iota\circ\sigma)(a\otimes d) \\
&\in \bar\iota(A)_\infty \cong (A)_\infty \cong (\iota(A))_\infty.
\end{aligned}$$

Heraf fås ved at bruge trekantsuligheden, at

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^*(\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(y)v_n - (\bar{\iota} \circ \sigma)(y)\| = 0$$

for alle $y \in A \odot D$. Så da $A \odot D$ er en tæt delmængde i $A \otimes D$ fås, at

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(v_n^*(\pi_\infty^{(A\otimes D)} \circ \delta_{A\otimes D})(y)v_n, (\iota(A))_\infty) = 0$$

for alle $y \in A\otimes D$. Da $\widetilde{\rho}$ er en *-homomorfi er v_n et unitært element i $((A\otimes D)_\infty)^\sim \subseteq ((A\otimes D)^\sim)_\infty$. (Inklusionen ses, idet vi lader $\psi : A \otimes D \mapsto (A \otimes D)^\sim$ være inklusionsafbildningen. Vha. første homomorfisætning fås som før en injektiv *-homomorfi $\overline{\psi} : (A \otimes D)_\infty \mapsto ((A \otimes D)^\sim)_\infty$. Unitaliseringen $\widetilde{\overline{\psi}} : ((A \otimes D)_\infty)^\sim \mapsto ((A \otimes D)^\sim)_\infty$ af $\overline{\psi}$ er også en injektiv *-homomorfi, så $((A \otimes D)_\infty)^\sim$ kan betragtes som en del-C^*-algebra af $(A \otimes D)^\sim)_\infty$.)
Heraf findes jvf. Proposition 6.1.8 en *-isomorfi $\varphi : A \mapsto A\otimes D$, som er approksimativt unitært ækvivalent med ι. □

Bemærk, at hvis $A \cong A \otimes D$, giver første del af beviset en følge $(\sigma_n)_{n=1}^\infty$ af *-homomorfier, $\sigma_n : A \otimes D \mapsto A$, så $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(a \otimes 1_D) - a\| = 0$ for alle $a \in A$. Dette ses, idet vi definerer $\sigma_n : A \otimes D \otimes D \mapsto A \otimes D$, ved $\sigma_n = \mathrm{id}_A \otimes \varphi_n$. Men $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(d \otimes 1_D) - d\| = 0$ for alle $d \in D$, så

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(a \otimes d \otimes 1_D) - a \otimes d\| &= \lim_{n\to\infty} \|a \otimes \varphi_n(d \otimes 1_D) - a \otimes d\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|a\|\|\varphi_n(d \otimes 1_D) - d\| \\ &= 0\end{aligned}$$

for alle $a \in A$ og alle $d \in D$. Ved at bruge trekantsuligheden fås, at

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(x \otimes 1_D) - x\| = 0$$

for alle $x \in A \odot D$, så da $A \odot D$ er tæt i $A \otimes D$, og σ_n er kontinuert, er

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(x \otimes 1_D) - x\| = 0$$

for alle $x \in A \otimes D$. Det ønskede fås nu, idet $A \otimes D \cong A$.

Kapitel 7

Permanens egenskaber for D-stabilitet

I det følgende antages D at være en separabel, unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv C^*-algebra. Vi skal gennemgå nogle permanens egenskaber for D-stabilitet. Bl.a. skal vises, at hvis A er en D-stabil C^*-algebra og I er et lukket to-sidet ideal i A, så er I og A/I også D-stabile. Endvidere vises, at den induktive grænse af en induktiv følge af separable D-stabile C^*-algebraer er D-stabil. Alle nævnte resultater i dette kapitel fås som korollarer til Sætning 6.1.10.

Definition 7.1.1. [1] En del-C^*-algebra B af en C^*-algebra A kaldes heriditær, hvis uligheden

$$a \leq b, \quad a \in A^+, b \in B^+$$

medfører, at $a \in B$.

Nedenstående sætning, som angives uden bevis, giver en ækvivalent betingelse for at en del-C^*-algebra B i en C^*-algebra A er heriditær i A.

Sætning 7.1.2. [2] *Lad B være en del-C^*-algebra af en C^*-algebra A. Da er B heriditær i A, hvis og kun hvis $bab' \in B$ for alle $b, b' \in B$ og alle $a \in A$.*

Idet D antages at være en separabel, unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv C^*-algebra, gælder følgende resultater.

Korollar 7.1.3. [3] *Lad A være en separabel og D-stabil C^*-algebra, og lad B være en heriditær del-C^*-algebra i A. Da er B D-stabil.*

Bevis. Lad $\iota : B \mapsto A$ være inklusionsafbildningen. Da B er separabel kan vi jvf. Lemma 6.1.5 finde en approksimativ enhed $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for B, hvor h_n er et positivt normaliseret element. Dvs. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tilhører $l^\infty(B)$, og vi definerer $h = \pi_\infty^{(B)}((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq (B)_\infty \subseteq (A)_\infty$. For ethvert $x \in (A)_\infty$ findes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A)$, så $x = \pi_\infty^{(A)}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Dvs.

$$\begin{aligned} hxh &= \pi_\infty^{(B)}((h_n)_{n\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(A)}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(B)}((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \pi_\infty^{(A)}((h_n)_{n\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(A)}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(A)}((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \pi_\infty^{(A)}((h_n x_n h_n)_{n\in\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

[1] [Mur90, Afsnit 3.2]
[2] [Mur90, Thm. 3.2.2]
[3] [TW05, Korollar 3.1]

Men B er en heriditær del-C^*-algebra i A, så af Sætning 7.1.2 er $h_n x_n h_n \in B$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Så

$$hxh = \pi_\infty^{(B)}((h_n x_n h_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in (B)_\infty.$$

Vi kan hermed definere en lineær afbildning $\beta : (A)_\infty \mapsto (B)_\infty$ ved

$$\beta(x) = hxh, \; x \in (A)_\infty.$$

Afbildningen β er en kontraktion. Dette ses, idet vi som tidligere for $x \in (A)_\infty$ finder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A)$, så $x = \pi_\infty^{(A)}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Dvs.

$$\begin{aligned} \|\beta(x)\| &= \|\pi_\infty^{(B)}((h_n x_n h_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|h_n x_n h_n\| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \\ &= \|\pi_\infty^{(A)}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

Da $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en approksimativ enhed for B gælder for ethvert $b \in B$, at

$$\lim_{n\to\infty} \|bh_n - b\| = \lim_{n\to\infty} \|h_n b - b\| = 0.$$

Så $\|\pi_\infty^{(B)}((bh_n - b)_{n\in\mathbb{N}})\| = \limsup_{n\to\infty} \|bh_n - b\| = 0$, og tilsvarende er $\|\pi_\infty^{(B)}((h_n b - b)_{n\in\mathbb{N}})\| = 0$. Dvs.

$$h(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b) = (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b)h = (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b)$$

for $b \in B$, hvilket medfører, at

$$\beta((\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b)) = (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b)$$

for alle $b \in B$.

Da A er D-stabil findes jvf. Sætning 6.1.10 en *-homomorfi $\sigma : A \otimes D \mapsto (A)_\infty$, der opfylder

$$\sigma(a \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)$$

for alle $a \in A$.
Definer nu en afbildning $\overline{\sigma} : B \otimes D \mapsto (B)_\infty$ ved,

$$\overline{\sigma} = \beta \circ \sigma \circ (\iota \otimes \mathrm{id}_D).$$

Da β er en lineær kontraktion, og $\sigma \circ (\iota \otimes \mathrm{id}_D)$ er en *-homomorfi, er $\overline{\sigma}$ en lineær kontraktion. For et positivt element $b \in B$ og $d \in D$ fås,

$$\overline{\sigma}(b \otimes 1_D) = (\beta \circ \sigma)(b \otimes 1_D) = \beta((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(b)) = \beta((\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b)) = (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b),$$

og da $b^{\frac{1}{2}}$ er positivt er $(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{4}}$ defineret. Så

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}(b \otimes d) &= (\beta \circ \sigma)(b \otimes d) \\
&= (\beta \circ \sigma)((b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)(b^{\frac{1}{2}} \otimes d)(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)) \\
&= \beta(\sigma(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)\sigma(b^{\frac{1}{2}} \otimes d)\sigma(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)) \\
&= h(\sigma(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)\sigma(b^{\frac{1}{2}} \otimes d)\sigma(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D))h \\
&= h(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b^{\frac{1}{4}})\sigma(b^{\frac{1}{2}} \otimes d)(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b^{\frac{1}{4}})h \\
&= (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b^{\frac{1}{4}})\sigma(b^{\frac{1}{2}} \otimes d)(\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b^{\frac{1}{4}}) \\
&= \sigma(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)\sigma(b^{\frac{1}{2}} \otimes d)\sigma(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D) \\
&= \sigma((b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)(b^{\frac{1}{2}} \otimes d)(b^{\frac{1}{4}} \otimes 1_D)) \\
&= \sigma(b \otimes d).
\end{aligned}$$

Ethvert element i B kan skrives som en sum af fire positive elementer, så lineariteten af $\overline{\sigma}$ giver hermed, at $\overline{\sigma}(x) = \sigma(x)$ for alle $x \in B \odot D$. Da $B \odot D$ er en tæt delmængde i $B \otimes D$ og $\overline{\sigma}$ er en lineær kontraktion fås, at $\overline{\sigma}(x) = \sigma(x)$ for alle $x \in B \otimes D$. Så da σ er en *-homomorfi, er $\overline{\sigma} : B \otimes D \mapsto (B)_\infty$ også en *-homomorfi, der opfylder, at

$$\overline{\sigma}(b \otimes 1_D) = \sigma(b \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(B)} \circ \delta_B)(b)$$

for alle $b \in B$. Sætning 6.1.10 giver hermed eksistensen af en *-isomorfi $\varphi : B \mapsto B \otimes D$. □

Korollar 7.1.4. [4] *Hvis A er en separabel C^*-algebra, så er følgende udsagn ækvivalente:*

(i) *A er D-stabil.*

(ii) *$A \otimes M_n(\mathbb{C})$ er D-stabil for alle $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *$A \otimes \mathcal{K}$ er D-stabil.*

Bevis. Hvis A er D-stabil er $A \otimes M_n(\mathbb{C}) \otimes D \cong A \otimes M_n(\mathbb{C})$, idet kommutativiteten af tensorproduktet op til isomorfi giver, at

$$A \otimes M_n(\mathbb{C}) \otimes D \cong A \otimes D \otimes M_n(\mathbb{C}) \cong A \otimes M_n(\mathbb{C}).$$

Lad $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$ være de kompakte operatorer på et uendeligt dimensionalt separabelt Hilbertrum H. Da gælder for ethvert $n \in \mathbb{N}$, at

$$\mathcal{K}(H) \cong \mathcal{K}(H \oplus H \cdots \oplus H)(n\,\text{addenter}) \cong M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K}.$$

Så $A \otimes \mathcal{K} \cong A \otimes (M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K})$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $A \otimes M_n(\mathbb{C})$ er D-stabil, fås hermed,

$$(A \otimes \mathcal{K}) \otimes D \cong A \otimes (M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K}) \otimes D \cong (A \otimes M_n(\mathbb{C}) \otimes D) \otimes \mathcal{K} \cong (A \otimes M_n(\mathbb{C})) \otimes \mathcal{K} \cong A \otimes \mathcal{K}.$$

Antag nu, at $A \otimes \mathcal{K}$ er D-stabil. Lad e være en én-dimensional projektion i $\mathcal{K}$, og lad $\varphi : A \mapsto A \otimes \mathbb{C}e$ være givet ved,

$$\varphi(a) = a \otimes e,\ a \in A.$$

[4] [TW05, Korollar 3.2]

Da e er en projektion er φ en injektiv *-homomorfi. Endvidere er φ surjektiv, for lad $a \otimes \lambda e$, $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ være en elementær tensor i $A \otimes \mathbb{C}e$. Da er $\varphi(\lambda a) = \lambda a \otimes e = a \otimes \lambda e$. Så lineariteten af φ giver, at der for ethvert $y \in A \odot \mathbb{C}e$ findes $x \in A$ så $\varphi(x) = y$. Da billedet af φ er lukket fås heraf, at $\varphi(A) = A \otimes \mathbb{C}e$, da $A \odot \mathbb{C}e$ er en tæt delmængde i $A \otimes \mathbb{C}e$. Dvs. $A \cong A \otimes \mathbb{C}e$.
C^*-algebraen $A \otimes \mathbb{C}e$ er heriditær i $A \otimes \mathcal{K}$. For lad $a_1, a, a_2 \in A$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ og $v \in \mathcal{K}$. Da er

$$(a_1 \otimes \lambda_1 e)(a \otimes v)(a_2 \otimes \lambda_2 e) = a_1 a a_2 \otimes \lambda_1 \lambda_2 eve \in A \otimes \mathbb{C}e.$$

Heraf fås, at $xyx' \in A \otimes \mathbb{C}e$ for alle $x, x' \in A \otimes \mathbb{C}e$ og $y \in A \otimes \mathcal{K}$. Dermed giver Korollar 7.1.3, at $A \cong A \otimes \mathbb{C}e$ er D-stabil. □

Korollar 7.1.5. [5] *Lad A være en separabel og D-stabil C^*-algebra, og lad I være et lukket to-sidet ideal i A. Da er I og A/I D-stabile.*

Bevis. Af Sætning 7.1.2 følger, at I er en heriditær del-C^*-algebra i A, så af Korollar 7.1.3 fås, at I er D-stabil.

Lad $q : A \mapsto A/I$ være kvotientafbildningen. Da q er en kontraktion inducerer den en *-homomorfi $q_1 : l^\infty(A) \mapsto l^\infty(A/I)$ ved

$$q_1((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q(a_n))_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A).$$

Lad $\pi_\infty^{(A)} : l^\infty(A) \mapsto (A)_\infty$, $\pi_\infty^{(A/I)} : l^\infty(A/I) \mapsto (A/I)_\infty$ være kvotientafbildninger. For $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(A)$ er $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$. Dvs.

$$\|(\pi_\infty^{(A/I)} \circ q_1)((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\| = \|\pi_\infty^{(A/I)}((q(a_n))_{n\in\mathbb{N}})\| = \limsup_{n\to\infty} \|q(a_n)\| \le \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| = 0.$$

Så $c_0(A) \subseteq \ker(\pi_\infty^{(A/I)} \circ q_1)$. Første homomorfisætning giver hermed eksistensen af en *-homomorfi $\overline{q} : (A)_\infty \mapsto (A/I)_\infty$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd} l^\infty(A) \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\pi_\infty^{(A)}"] & l^\infty(A/I) \arrow[d, "\pi_\infty^{(A/I)}"] \\ (A)_\infty \arrow[r, dashed, "\overline{q}"] & (A/I)_\infty. \end{tikzcd}$$

Da A er D-stabil findes jvf. Sætning 6.1.10 en *-homomorfi $\sigma : A \otimes D \mapsto (A)_\infty$, så

$$\sigma(a \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)$$

for alle $a \in A$. For $j \in I$ gælder, at

$$(\overline{q} \circ \sigma)(j \otimes 1_D) = \overline{q}((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(j)) = (\pi_\infty^{(A/I)} \circ q_1)(\delta_A(j)) = \pi_\infty^{(A/I)}(\delta_{A/I}(q(j)) = 0.$$

Så

$$(\overline{q} \circ \sigma)(j \otimes d) = (\overline{q} \circ \sigma)(j \otimes 1_D)(\overline{q} \circ \sigma)\tilde{}(1_{\tilde{A}} \otimes d) = 0$$

for alle $j \in I, d \in D$, hvor $(\overline{q} \circ \sigma)\tilde{}$ er unitaliseringen af $\overline{q} \circ \sigma$. Heraf fås, at $(\overline{q} \circ \sigma)(I \otimes D) = 0$, idet $I \odot D$ er en tæt delmængde i $I \otimes D$, og $\overline{q} \circ \sigma$ er kontinuert. Dermed er $I \otimes D \subseteq \ker(\overline{q} \circ \sigma)$. Da D er separabel, unital og stærkt selv-absorberende, har D approksimativt indre halvflip

[5] [TW05, Korollar 3.3]

jvf. Sætning 4.2.2. Specielt er D altså nukleær (Sætning 2.3.5), hvilket betyder jvf. [Mur90, Theorem 6.5.2], at vi får en kort eksakt følge

$$0 \longrightarrow I \otimes D \xrightarrow{\iota \otimes \mathrm{id}_D} A \otimes D \xrightarrow{q \otimes \mathrm{id}_D} (A/I) \otimes D \longrightarrow 0,$$

hvor $\iota : I \mapsto A$ er inklusionsafbildningen. Dvs. $(A \otimes D)/(I \otimes D) \cong (A/I) \otimes D$, så af første homomorfisætning fås en *-homomorfi $\overline{\sigma} : (A/I) \otimes D \mapsto (A/I)_\infty$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd} A \otimes D \arrow[rr, "\overline{q} \circ \sigma"] \arrow[dr, "q \otimes \mathrm{id}_D"'] & & (A/I)_\infty \\ & (A/I) \otimes D \arrow[ur, dashed, "\overline{\sigma}"'] & \end{tikzcd}$$

kommuterer. Heraf fås for $a \in A$,

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(q(a) \otimes 1_D) &= (\overline{q} \circ \sigma)(a \otimes 1_D) \\ &= \overline{q}(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a) \\ &= (\pi_\infty^{(A/I)} \circ q_1)(\delta_A(a)) \\ &= (\pi_\infty^{(A/I)} \circ \delta_{A/I})(q(a)) \\ &\in (A/I)_\infty. \end{aligned}$$

Da q er surjektiv fås det ønskede hermed af Sætning 6.1.10. □

Korollar 7.1.6. [6] *Lad $A = \lim_{\to\infty} A_i$ være den induktive grænse af den induktive følge af separable D-stabile C^*-algebraer A_i, $i \in \mathbb{N}$. Da er A D-stabil.*

Bevis. Lad $(A, \{\mu_i\}_{i=1}^\infty)$ være den induktive grænse af den induktive følge $\{A_i, \varphi_i\}_{i=1}^\infty$. Vi kan uden tab af generalitet antage, at $\varphi_i : A_i \mapsto A_{i+1}$ er injektiv for alle $i \in \mathbb{N}$. Dvs. $\mu_i : A_i \mapsto A$ er injektiv, og da $A = \overline{\bigcup_{i=1}^\infty \mu_i(A_i)} \cong \overline{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}$ kan $(A_i)_{i=1}^\infty$ betragtes som en voksende følge af separable D-stabile C^*-algebraer i A.
(Ellers sættes $B_i = A_i/\ker(\mu_i)$ og lad $\pi_i : A_i \mapsto B_i$ være kvotientafbildningen. Som i beviset for Sætning 3.2.3 findes injektive *-homomorfier $\psi_i : B_i \mapsto B_{i+1}$ og en entydig *-isomorfi $\pi : A \mapsto B$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi_1"] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

kommuterer. Så

$$A \cong B = \overline{\bigcup_{i=1}^\infty \lambda_i(B_i)} \cong \overline{\bigcup_{i=1}^\infty B_i},$$

hvor $(B, \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty)$ er den induktive grænse af den induktive følge $\{B_i, \psi_i\}_{i=1}^\infty$. Korollar 7.1.5 giver hermed, at $(B_i)_{i=1}^\infty$ er en voksende følge af separable D-stabile C^*-algebraer i A.)

[6] [TW05, Korollar 3.4]

Bemærkningen efter Sætning 6.1.10 giver for ethvert $i \in \mathbb{N}$ eksistensen af *-homomorfier $\sigma_{i,n} : A_i \otimes D \mapsto A_i \subseteq A$, der opfylder, at

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_{i,n}(a \otimes 1_D) - a\| = 0$$

for alle $a \in A_i$.
Da A_i er separabel for alle $i \in \mathbb{N}$ findes en tællelig tæt delmængde $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots\} \subseteq A_i$. For alle $i \in \mathbb{N}$ findes $n_i \in \mathbb{N}$, så

$$\|\sigma_{i,n_i}(a_{jk} \otimes 1_D) - a_{jk}\| < \frac{1}{i}$$

for alle $j, k = 1, \dots, i$, idet $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ er en voksende følge af C^*-algebraer. Heraf fås for alle $j, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} \|\sigma_{i,n_i}(a_{jk} \otimes 1_D) - a_{jk}\| = 0,$$

thi $\|\sigma_{i,n_i}(a_{jk} \otimes 1_D) - a_{jk}\| < \frac{1}{i}$ for $i \geq \max\{j, k\}$.
Men $\{a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots\}$ er en tæt delmængde i A_j. Så for alle $j \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$\lim_{i\to\infty} \|\sigma_{i,n_i}(a \otimes 1_D) - a\| = 0$$

for alle $a \in A_j$.

Eftersom $\sigma_{i,n_i} : A_i \otimes D \mapsto A_i \subseteq A$ er en *-homomorfi for alle $i \in \mathbb{N}$ er σ_{i,n_i} en kontraktion. Vi kan hermed definere en afbildning $\widetilde{\sigma} : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \otimes D \mapsto \prod_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq l^{\infty}(A)$ ved,

$$\widetilde{\sigma}_i(x) = \begin{cases} \sigma_{i,n_i}(x), & x \in A_i \otimes D \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Lad $\pi_{\infty}^{(A)} : l^{\infty}(A) \mapsto (A)_{\infty}$ være kvotientafbildningen, og definer en afbildning $\overline{\sigma} : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \otimes D \mapsto (A)_{\infty}$ ved

$$\overline{\sigma}(x) = (\pi_{\infty}^{(A)} \circ \widetilde{\sigma})(x),\ x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \otimes D.$$

Det er klart, at $\overline{\sigma}$ er en *-homomorfi på $A_i \otimes D$ for alle $i \in \mathbb{N}$, idet σ_{i,n_i} er en *-homomorfi for alle $i \in \mathbb{N}$, og for $x \in A_i \otimes D$ er

$$\widetilde{\sigma}_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } j < i \\ \sigma_{j,n_j}(x), & \text{for } j \geq i. \end{cases}$$

Da $(A_i \otimes D)_{i=1}^{\infty}$ er en voksende følge af C^*-algebraer, bliver $\overline{\sigma}$ således en *-homomorfi på $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \otimes D$. Men da $A \cong \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$, er $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \otimes D$ en tæt delmængde i $A \otimes D$, så da $\overline{\sigma}$ er en kontraktion på $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \otimes D$ kan vi udvide $\overline{\sigma}$ til en *-homomorfi $\sigma : A \otimes D \mapsto (A)_{\infty}$.

For alle $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gælder, at

$$\begin{aligned}
\|\sigma(a \otimes 1_D) - (\pi_{\infty}^{(A)} \circ \delta_A)(a)\| &= \|\overline{\sigma}(a \otimes 1_D) - (\pi_{\infty}^{(A)} \circ \delta_A)(a)\| \\
&= \|\pi_{\infty}^{(A)}((\widetilde{\sigma}_n(a \otimes 1_D))_{n\in\mathbb{N}}) - (\pi_{\infty}^{(A)} \circ \delta_A)(a)\| \\
&= \|\pi_{\infty}^{(A)}((\widetilde{\sigma}_n(a \otimes 1_D) - a)_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\widetilde{\sigma}_n(a \otimes 1_D) - a\| \\
&= \limsup_{i\to\infty} \|\sigma_{i,n_i}(a \otimes 1_D) - a\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ved at benytte kontinuiteten af σ og $(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)$ fås, at $\sigma(a \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)$ for alle $a \in A$. Sætning 6.1.10 giver nu, at A er D-stabil. □

I kapitel 9 får vi brug for, at $A \cong A \otimes (\bigotimes_{n=1}^\infty D_n)$, hvis A er en separabel og D_n-stabil C^*-algebra for alle $n \in \mathbb{N}$, og $(D_n)_{n=1}^\infty$ er en følge af unitale, separable, stærkt selv-absorberende og K_1-injektive C^*-algebraer. Til beviset for dette resultat skal vi benytte nedenstående lemma:

Lemma 7.1.7. *Lad A være en separabel C^*-algebra, og lad*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A \xrightarrow{\varphi_2} A \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \longrightarrow A'$$

være en induktiv følge med en induktiv grænse A'. Antag, at der for hvert $n \in \mathbb{N}$ findes en følge $(\alpha_{m,n})_{m=1}^\infty$ af automorfier på A, så

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_n(a) - \alpha_{m,n}(a)\| = 0$$

for alle $a \in A$. Da er A' isomorf med A.

Bevis. For hvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi vælge en automorfi $\alpha_n \in \mathrm{Aut}(A)$ passende tæt på φ_n, så vi får en approximate intertwining:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, equal] & & A \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dr, equal] & & A \arrow[rr, "\varphi_3"] \arrow[dr, equal] & & \cdots \arrow[r] & A' \\
& A \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr, "\alpha_1"] & & A \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[rr, "\alpha_2"] & & A \arrow[r, "\alpha_3"] & \cdots \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

Heraf fås, at $A' \cong A$. □

Korollar 7.1.8. *Lad A være en separabel C^*-algebra, og lad $(D_n)_{n=1}^\infty$ være en følge af unitale, separable, stærkt selv-absorberende og K_1-injektive C^*-algebraer. Antag A er isomorf med $A \otimes D_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da er A isomorf med $A \otimes (\bigotimes_{n=1}^\infty D_n)$.*

Bevis. Sæt $D = \bigotimes_{n=1}^\infty D_n$. Da er $A \otimes D$ isomorf med den induktive grænse af den induktive følge

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A \otimes D_1 \xrightarrow{\varphi_2} A \otimes D_1 \otimes D_2 \xrightarrow{\varphi_3} A \otimes D_1 \otimes D_2 \otimes D_3 \xrightarrow{\varphi_4} \cdots,$$

hvor $\varphi_n : A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1} \mapsto A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_n$ er givet ved,

$$\varphi_n = \mathrm{id}_{A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1}} \otimes 1_{D_n}.$$

Vælg nu *-homomorfier $(\psi_n)_{n=1}^\infty$, $\psi_n : A \mapsto A$ så nedenstående diagram kommuterer, hvor A' er den induktive grænse af $\{A, \psi_n\}_{n=1}^n$, og $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ er en følge af *-isomorfier.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, equal] & A \otimes D_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\gamma_1"] & A \otimes D_1 \otimes D_2 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r] & A \otimes D \\
A \arrow[r, "\psi_1"] & A \arrow[r, "\psi_2"] & A \arrow[r, "\psi_3"] & \cdots \arrow[r] & A'
\end{tikzcd}$$

Da findes en *-isomorfi $\psi : A \otimes D \mapsto A'$, så vi skal bare vise, at $A' \cong A$. Jvf. Lemma 7.1.7 skal vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ finde automorfier $(\alpha_{m,n})_{m=1}^{\infty} \subseteq \text{Aut}(A)$, så

$$\lim_{m\to\infty} \|\alpha_{m,n}(a) - \psi_n(a)\| = 0$$

for alle $a \in A$. Det er hertil nok for hvert $n \in \mathbb{N}$, at finde en følge af isomorfier $(\lambda_{m,n})_{m=1}^{\infty}$, $\lambda_{m,n} : A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1} \mapsto A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_n$, så

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_n(x) - \lambda_{m,n}(x)\| = 0$$

for alle $x \in A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1}$. Thi, da er $\alpha_{m,n} = \gamma_n \circ \lambda_{m,n} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \in \text{Aut}(A)$ og for alle $a \in A$ er

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_{m,n}(a) = (\gamma_n \circ \varphi_n \circ \gamma_{n-1}^{-1})(a) = \psi_n(a).$$

Men da D_n er stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv, følger af Sætning 6.1.10, at der findes en *-isomorfi $\Phi_n : A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1} \mapsto A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_n$, som er approksimativt unitært ækvivalent med φ_n. Der findes altså en følge af unitære $(u_{m,n})_{m=1}^{\infty} \subseteq A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_n$, så

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_n(x) - u_{m,n}^* \Phi_n(x) u_{m,n}\| = 0$$

for alle $x \in A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1}$. Definer $\lambda_{m,n} : A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1} \mapsto A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_n$ ved,

$$\lambda_{m,n}(x) = u_{m,n}^* \Phi_n(x) u_{m,n}, \quad x \in A \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_{n-1},$$

og det ønskede er opfyldt. □

Kapitel 8

Ekstensioner

I dette kapitel skal vi fortsætte med at behandle emnet D-stabilitet af en C^*-algebra, hvor D er en separabel, unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv C^*-algebra. Vi vil nu fortsætte emnet i forbindelse med ekstensioner, hvor vi skal vise, at hvis J og A er separable D-stabile C^*-algebraer, så vil en ekstension E af A ved J også være D-stabil (Sætning 8.1.2). Beviset er et ret teknisk bevis, hvor idéen er at konstruere en *-homomorfi $\gamma : E \otimes D \mapsto (E)_\infty$, der opfylder, at $\gamma(e \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)$ for alle $e \in E$. Hermed kan Sætning 6.1.10 endnu engang benyttes, hvoraf vi får, at E er D-stabil.

Til beviset for sætningen får vi brug for nedenstående lemma:

Lemma 8.1.1. [1] *Lad*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{q} A \longrightarrow 0$$

være en kort eksakt følge af separable C^*-algebraer. Da vil den inducerede *-homomorfi $\overline{q} : (E)_\infty \mapsto (A)_\infty$ afbilde $(E)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E))'$ på $(A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$.

Bemærk, at første homomorfisætning som før giver en *-homomorfi $\overline{q} : (E)_\infty \mapsto (A)_\infty$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd} l^\infty(E) \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\pi_\infty^{(E)}"] & l^\infty(A) \arrow[d, "\pi_\infty^{(A)}"] \\ (E)_\infty \arrow[r, "\overline{q}"] & (A)_\infty, \end{tikzcd}$$

hvor q_1 er *-homomorfien givet ved $q_1((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Bevis. Da ethvert element i C^*-algebraen $(A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$ er en linearkombination af fire positive elementer, giver lineariteten af $\overline{q}$, at det er tilstrækkeligt for enhver positiv kontraktion $a \in (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$ at finde $e \in (E)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E))'$, så $q(e) = a$.

Eftersom a er en positiv kontraktion i $(A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))' \subseteq (A)_\infty$ findes jvf. [MRL, Theorem 2.2.10] en følge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af positive kontraktioner i A, så $\pi_\infty^{(A)}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = a$.

[1] [TW05, Lemma 4.2]

Der gælder, at $a \in (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$ hvis og kun hvis

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n x - x a_n\| = 0 \quad \text{for alle } x \in A,$$

thi,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|a_n x - x a_n\| &= \|\pi_\infty^{(A)}((a_n x)_{n\in\mathbb{N}}) - \pi_\infty^{(A)}((x a_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \|\pi_\infty^{(A)}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(x) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(x)\pi_\infty^{(A)}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \|a(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(x) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(x)a\|.
\end{aligned}$$

Så hvis $\lim_{n\to\infty} \|a_n x - x a_n\| = 0$ for alle $x \in A$, da er $\|a(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(x) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(x)a\| = 0$ og $a \in (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$. Omvendt fås, at $\limsup_{n\to\infty} \|a_n x - x a_n\| = 0$ for alle $x \in A$, hvis $a \in (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$, hvilket betyder, at $\lim_{n\to\infty} \|a_n x - x a_n\| = 0$ for alle $x \in A$.

[MRL, Theorem 2.2.10] giver, at der for alle $n \in \mathbb{N}$ findes en positiv kontraktion $e_n \in E$, så $q(e_n) = a_n$. Da følgen er kort eksakt er $J \cong \varphi(J) = \ker(q)$, så J kan betragtes som et lukket to-sidet ideal i E. Vi kan som i beviset for Lemma 6.1.6 finde en approksimativ enhed $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ for J, som er quasicentral mht. E med $\|d_k\| \leq 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Vælg også en følge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|y(1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n - (1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n y\| = 0 \tag{8.1}$$

for alle $y \in E$. Dette kan lade sig gøre, idet $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er quasicentral mht. E, og for $y \in E$ er

$$\lim_{j\to\infty} \|q(ye_j - e_j y)\| = \lim_{j\to\infty} \|q(y)a_j - a_j q(y)\| = 0,$$

da $a \in (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$. For alle $j \in \mathbb{N}$ findes $z_j \in J = \ker(q)$ og $x_j \in E$, så

$$ye_j - e_j y = x_j + z_j \quad \text{og} \quad \|x_j\| = \|q(ye_j - e_j y)\|$$

jvf. [MRL, Theorem 2.2.10]. Så for ethvert $j \in \mathbb{N}$ og for alle $y \in E$ gælder, at

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|y(1_{\widetilde{E}} - d_k)e_j - (1_{\widetilde{E}} - d_k)e_j y\| &\leq \lim_{k\to\infty} (\|y(1_{\widetilde{E}} - d_k)e_j - (1_{\widetilde{E}} - d_k)ye_j\| \\
&\quad + \|(1_{\widetilde{E}} - d_k)ye_j - (1_{\widetilde{E}} - d_k)e_j y\|) \\
&= \lim_{k\to\infty} \|(1_{\widetilde{E}} - d_k)(ye_j - e_j y)\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \|(1_{\widetilde{E}} - d_k)(x_j + z_j)\| \\
&\leq \limsup_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} \|(1_{\widetilde{E}} - d_k)(x_j + z_j)\| \\
&\leq \limsup_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} (\|1_{\widetilde{E}} - d_k\|\|x_j\| + \|(1_{\widetilde{E}} - d_k)z_j\|) \\
&\leq \limsup_{j\to\infty} \lim_{k\to\infty} \|(1_{\widetilde{E}} - d_k)z_j\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes altså et $k_n \in \mathbb{N}$ så $\|y(1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_j - (1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_j y\| \leq \frac{1}{n}$ for $j = 1, \dots, n$ og det ønskede er vist.

For alle $n \in \mathbb{N}$ er $\|(1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n\| \leq \|1_{\widetilde{E}} - d_{k_n}\| < \infty$, så $((1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(E)$. Lad $e = \pi_\infty^{(E)}(((1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in (E)_\infty$. Ligning (8.1) giver, at $e \in (E)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E))'$, og da $(d_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ker(q)$ fås,

$$\begin{aligned}
\overline{q}(e) &= \overline{q}(\pi_\infty^{(E)}(((1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n)_{n\in\mathbb{N}})) \\
&= \pi_\infty^{(A)}(q_1(((1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n)_{n\in\mathbb{N}})) \\
&= \pi_\infty^{(A)}((q((1_{\widetilde{E}} - d_{k_n})e_n))_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \pi_\infty^{(A)}((q(e_n))_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \pi_\infty^{(A)}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= a.
\end{aligned}$$

□

Ved hjælp af ovenstående lemma og de resultater der tidligere er gennemgået i forbindelse med D-stabilitet, kan vi nu bevise nedenstående sætning. Beviset er forholdsvis langt, så for at gøre det mere overskueligt, er det undervejs inddelt i nogle lemmaer.

Sætning 8.1.2. [2] *Lad D være en separabel, unital, stærkt selv-absorberende og K_1-injektiv C^*-algebra. Lad*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{q} A \longrightarrow 0$$

være en kort eksakt følge af separable C^*-algebraer. Hvis J og A er D-stabile, er E også D-stabil.

Bevis. Antag at A er D-stabil. Bemærkningen efter Sætning 6.1.10 giver eksistensen af en følge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af *-homomorfier, $\rho_n : A \otimes D \mapsto A$, der opfylder, at

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(a \otimes 1_D) - a\| = 0 \tag{8.2}$$

for alle $a \in A$. Da ρ_n er en kontraktion vil $(\rho_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A)$ for $x \in A \otimes D$, så vi kan definere en *-homomorfi $\rho : A \otimes D \mapsto (A)_\infty$ ved,

$$\rho(x) = \pi_\infty^{(A)}((\rho_n(x))_{n\in\mathbb{N}}), \; x \in A \otimes D.$$

Lad $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en approksimativ enhed for A bestående af positive kontraktioner, og definer en afbildning $\rho'_n : D \mapsto A$ ved,

$$\rho'_n(d) = \rho_n(h_n \otimes d), \; d \in D.$$

Det er klart, at ρ'_n er lineær, og

$$\|\rho'_n(d)\| \leq \|h_n \otimes d\| = \|h_n\|\|d\| \leq \|d\|,$$

så ρ'_n er en kontraktion. Vi vil vise, at ρ'_n er fuldstændigt positiv. Lad $m \in \mathbb{N}$ og antag $(d_{ij})_{i,j=1}^m$ er et positivt element i $M_m(D)$. Lemma 2.2.1 giver, at d_{ij} er på formen $d_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ki}^* b_{kj}$ for

[2] [TW05, Theorem 4.3]

$b_{ki}, b_{kj} \in D$. Der findes $\widetilde{h}_n \in D$, så $h_n = \widetilde{h}_n^* \widetilde{h}_n$, hvilket medfører at

$$\begin{aligned}
\rho_n'(d_{ij}) &= \rho_n\left(h_n \otimes \sum_{k=1}^m b_{ki}^* b_{kj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^m \rho_n(\widetilde{h}_n^* \widetilde{h}_n \otimes b_{ki}^* b_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^m \rho_n((\widetilde{h}_n \otimes b_{ki})^* (\widetilde{h}_n \otimes b_{kj})) \\
&= \sum_{k=1}^m (\rho_n(\widetilde{h}_n \otimes b_{ki}))^* \rho_n(\widetilde{h}_n \otimes b_{kj}).
\end{aligned}$$

Af Lemma 2.2.1 fås hermed, at ρ_n' er en fuldstændigt positiv kontraktion. Dermed bliver $\rho' : D \mapsto (A)_\infty$, givet ved

$$\rho'(d) = \pi_\infty^{(A)}((\rho_n'(d))_{n\in\mathbb{N}}), \ d \in D$$

en fuldstændigt positiv kontraktion, da $\pi_\infty^{(A)}$ er en *-homomorfi.

For $a \in A$ og $d \in D$ gælder at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(ah_n \otimes d) - a\rho_n(h_n \otimes d)\| &= \lim_{n\to\infty} \|\rho_n(a \otimes 1_D)\rho_n(h_n \otimes d) - a\rho_n(h_n \otimes d)\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \|\rho_n(a \otimes 1_D) - a\|\|h_n\|\|d\| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

og tilsvarende er $\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(h_n a \otimes d) - \rho_n(h_n \otimes d)a\| = 0$ for $a \in A$ og $d \in D$, så

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\rho_n'(d)a - a\rho_n'(d)\| &= \lim_{n\to\infty} \|\rho_n(h_n \otimes d)a - a\rho_n(h_n \otimes d)\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} (\|\rho_n(h_n \otimes d)a - \rho_n(h_n a \otimes d)\| + \|\rho_n(h_n a \otimes d) - \rho_n(ah_n \otimes d)\| \\
&\quad + \|\rho_n(ah_n \otimes d) - a\rho_n(h_n \otimes d)\|) \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\rho_n(h_n a \otimes d) - \rho_n(ah_n \otimes d)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\rho_n((h_n a - ah_n) \otimes d)\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \|h_n a - ah_n\|\|d\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$ og alle $d \in D$. Det betyder hermed, at $\rho'(d) \in (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$ for alle $d \in D$. Endvidere gælder, at

$$\rho(a \otimes d) = (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)\rho'(d) = \rho'(d)(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a) \tag{8.3}$$

for alle $a \in A$ og alle $d \in D$, thi

$$\begin{aligned}
\|\rho(a \otimes d) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(a)\rho'(d)\| &= \|\pi_\infty^{(A)}((\rho_n(a \otimes d))_{n\in\mathbb{N}}) - \pi_\infty^{(A)}((a\rho_n'(d))_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\rho_n(a \otimes d) - a\rho_n'(d)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\rho_n(a \otimes d) - a\rho_n(h_n \otimes d)\| \\
&\le \limsup_{n\to\infty} (\|\rho_n(a \otimes d) - \rho_n(ah_n \otimes d)\| \\
&\quad + \|\rho_n(ah_n \otimes d) - a\rho_n(h_n \otimes d)\|) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} (\|a - ah_n\|\|d\| + \|\rho_n(ah_n \otimes d) - a\rho_n(h_n \otimes d)\|) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn fås analogt. Lad $\overline{q} : (E)_\infty \mapsto (A)_\infty$ være den entydige *-homomorfi, der giver følgende kommuterende diagram

$$\begin{tikzcd}
l^\infty(E) \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\pi_\infty^{(E)}"] & l^\infty(A) \arrow[d, "\pi_\infty^{(A)}"] \\
(E)_\infty \arrow[r, "\overline{q}"] & (A)_\infty,
\end{tikzcd}$$

hvor q_1 er *-homomorfien givet ved $q_1((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Af Lemma 8.1.1 fås, at $\overline{q}$ afbilder $(E)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E))'$ på $(A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$. C^*-algebraen D har approksimativt indre halvflip og er dermed nukleær. Så af Lemma 2.3.6 er $\rho' : D \mapsto (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'$ nukleær. Af Choi-Effros lifting theorem [Rør02, Theorem 6.1.4] findes en fuldstændigt positiv kontraktion $\widetilde{\rho} : D \mapsto (E)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E))'$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd}
 & (E)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E))' \arrow[d, "\overline{q}"] \\
D \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\rho}"] \arrow[r, "\rho'"'] & (A)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(A))'.
\end{tikzcd}$$

Da $\pi_\infty^{(E)} : l^\infty(E) \mapsto (E)_\infty$ er surjektiv, findes ved igen at bruge Choi-Effros lifting theorem en følge $(\widetilde{\rho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af fuldstændigt positive kontraktioner, $\widetilde{\rho}_n : D \mapsto E$, så

$$\widetilde{\rho}(d) = \pi_\infty^{(E)}((\widetilde{\rho}_n(d))_{n\in\mathbb{N}}),\ d \in D.$$

Da billedet af $\widetilde{\rho}$ kommuterer med $(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E)$ findes jvf. [Was94, Theorem 1.11] en fuldstændigt positiv kontraktion $\sigma : E \otimes_{\max} D \mapsto (E)_\infty \otimes_{\max} ((E)_\infty \cap (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E)')$ givet ved,

$$\sigma = (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E) \otimes \widetilde{\rho}.$$

Lad $\psi : (E)_\infty \otimes_{\max} ((E)_\infty \cap (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E)') \mapsto (E)_\infty$ være *-homomorfien givet ved

$$\psi(x \otimes y) = xy = yx,\ x \in (E)_\infty, y \in (E)_\infty \cap ((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(E))'.$$

Da er $\overline{\rho} = \psi \circ \sigma : E \otimes D \mapsto (E)_\infty$ en fuldstændigt positiv kontraktion, der opfylder, at

$$\overline{\rho}(e \otimes d) = (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d) = \widetilde{\rho}(d)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) \tag{8.4}$$

for alle $e \in E$ og alle $d \in D$.
Bemærk, at $E \otimes_{\max} D = E \otimes D$, da D er nukleær.

Eftersom

$$(\overline{q} \circ \overline{\rho})(e \otimes d) = \overline{q}((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d)) = (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\rho'(d) \stackrel{(8.3)}{=} \rho(q(e) \otimes d) = (\rho \circ (q \otimes \mathrm{id}_D))(e \otimes d),$$

for alle $e \in E$ og alle $d \in D$ giver lineariteten af hhv. $\overline{q} \circ \overline{\rho}$ og $\rho \circ (q \otimes \mathrm{id}_D)$, at $(\overline{q} \circ \overline{\rho})(x) = (\rho \circ (q \otimes \mathrm{id}_D))(x)$ for alle $x \in E \odot D$. Så da $E \odot D$ er en tæt delmængde i $E \otimes D$ og $\overline{q} \circ \overline{\rho}$ samt $\rho \circ (q \otimes \mathrm{id}_D)$ er lineære kontraktioner, gælder at

$$\overline{q} \circ \overline{\rho} = \rho \circ (q \otimes \mathrm{id}_D). \tag{8.5}$$

Dvs. $\overline{q} \circ \overline{\rho}$ er en *-homomorfi, og ved at benytte ligningerne (8.2), (8.3) og (8.5) fås,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|q(e\widetilde{\rho}_n(1_D) - e)\| &= \|\pi_\infty^{(A)}((q(e\widetilde{\rho}_n(1_D) - e))_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \|\pi_\infty^{(A)}((q(e\widetilde{\rho}_n(1_D)))_{n\in\mathbb{N}}) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\| \\
&= \|(\pi_\infty^{(A)} \circ q_1)((e\widetilde{\rho}_n(1_D))_{n\in\mathbb{N}}) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\| \\
&= \|(\overline{q} \circ \pi_\infty^{(E)})((e\widetilde{\rho}_n(1_D))_{n\in\mathbb{N}}) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\| \\
&= \|\overline{q}((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e))(\overline{q} \circ \widetilde{\rho})(1_D) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\| \\
&= \|(\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\rho'(1_D) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\| \\
&= \|\rho(q(e) \otimes 1_D) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\| \\
&= \|\pi_\infty^{(A)}((\rho_n(q(e) \otimes 1_D))_{n\in\mathbb{N}}) - (\pi_\infty^{(A)} \circ \delta_A)(q(e))\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\rho_n(q(e) \otimes 1_D) - q(e)\| \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.6}$$

for alle $e \in E$. Antag nu, at $d \in D$ og e er et positivt element i E. Da er

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \quad & \|q(e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2)\| \\
= \quad & \|\pi_\infty^{(A)}((q(e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2))_{n\in\mathbb{N}})\| \\
= \quad & \|(\pi_\infty^{(A)} \circ q_1)((e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2)_{n\in\mathbb{N}})\| \\
= \quad & \|\overline{q}((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d^2)) - \overline{q}((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d)^2)\| \\
\stackrel{(8.4)}{=} \quad & \|(\overline{q} \circ \overline{\rho})(e \otimes d^2) - \overline{q}((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e^{\frac{1}{2}})\widetilde{\rho}(d)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e^{\frac{1}{2}})\widetilde{\rho}(d))\| \\
= \quad & \|(\overline{q} \circ \overline{\rho})(e \otimes d^2) - (\overline{q} \circ \overline{\rho})(e^{\frac{1}{2}} \otimes d)(\overline{q} \circ \overline{\rho})(e^{\frac{1}{2}} \otimes d)\| \\
= \quad & \|(\overline{q} \circ \overline{\rho})(e \otimes d^2) - (\overline{q} \circ \overline{\rho})(e \otimes d^2)\| \\
= \quad & 0.
\end{aligned}$$

Så

$$\lim_{n\to\infty} \|q(e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2)\| = 0 \tag{8.7}$$

for alle $d \in D$ og alle $e \in E_+$.

Før vi fortsætter skal vi definere kontinuerte funktioner i $C([0,1])$:

$$h_0(t) = \begin{cases} -8t+1, & 0 \le t \le \frac{1}{8} \\ 0, & \frac{1}{8} < t \le 1, \end{cases}$$

$$g_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{8} \\ -8t+2, & \frac{1}{8} < t \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < t \leq 1 \end{cases}$$

og

$$\begin{aligned} h_1(t) &= h_0(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ g_1(t) &= g_0(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ g_{\frac{1}{2}} &= 1 - g_0 - g_1. \end{aligned}$$

Lemma 1. *Der findes en følge af unitale* **-homomorfier* $\beta_n : C([0,1]) \mapsto \widetilde{J} \subseteq \widetilde{E}$*, der opfylder:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(h_0)c - c\| = 0$*, for alle* $c \in J$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(1_{[0,1]} - h_0)(e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2)\| = 0$ *for alle* $e \in E_+$ *og alle* $d \in D$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(1_{[0,1]} - h_0)(e\widetilde{\rho}_n(1_D) - e)\| = 0$*, for alle* $e \in E$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(f)e - e\beta_n(f)\| = 0$ *for alle* $f \in C([0,1])$ *og alle* $e \in \widetilde{E}$*, og* $\lim_{n\to\infty} \|\beta_n(f)e\widetilde{\rho}_n(d) - e\widetilde{\rho}_n(d)\beta_n(f)\| = 0$ *for alle* $f \in C([0,1])$*, alle* $e \in \widetilde{E}$ *og alle* $d \in D$.

(e) $\beta_n(f) \in J$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$ *og alle* $f \in C_0([0,1[)$.
Specielt vil $1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1) = \beta_n(1_{[0,1]} - h_1) \in J$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. Da φ er injektiv, er $J \cong \varphi(J) = \ker(q)$, så J kan betragtes som et lukket to-sidet ideal i $E \subseteq \widetilde{E}$. Ved at bruge Lemma 6.1.6 med J i stedet for A og $\widetilde{E}$ i stedet for B, fås en følge $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ af unitale *-homomorfier, $\beta_m : C([0,1]) \mapsto \widetilde{J} \subseteq \widetilde{E}$, der opfylder følgende:

(i) $\beta_m(C_0([0,1[)) \subseteq J$ for alle $m \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim_{m\to\infty} \|\beta_m(f)e - e\beta_m(f)\| = 0$ for alle $f \in C([0,1])$ og alle $e \in \widetilde{E}$.

(iii) $\lim_{m\to\infty} \|\beta_m(f)c - f(0)c\| = 0$ for alle $f \in C([0,1])$ og alle $c \in J$.

Da $e\widetilde{\rho}_n(d) \in E$ for alle $n \in \mathbb{N}$, $e \in \widetilde{E}$ og $d \in D$ fås,

$$\lim_{m\to\infty} \|\beta_m(f)e\widetilde{\rho}_n(d) - e\widetilde{\rho}_n(d)\beta_m(f)\| = 0$$

for alle $f \in C([0,1])$, $e \in \widetilde{E}$, $d \in D$ og $n \in \mathbb{N}$.
Af ligning (8.7) fås for $n \in \mathbb{N}$, $e \in E_+$ og $d \in D$ eksistensen af $z_n \in J = \ker(q)$ og $x_n \in E$, så

$$e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2 = x_n + z_n \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|q(e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2)\| = 0$$

jvf. [MRL, Theorem 2.2.10]. Da $h_0(0) = 1$ gælder iflg. (iii), at

$$\lim_{m\to\infty} \|\beta_m(1_{[0,1]} - h_0)z_n\| = 0.$$

For alle $e \in E$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$ giver ligning (8.6) analogt eksistensen af $\widetilde{z}_n \in J = \ker(q)$ og $\widetilde{x}_n \in E$, så

$$e\widetilde{\rho}_n(1_D) - e = \widetilde{x}_n + \widetilde{z}_n \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{x}_n\| = \lim_{n\to\infty} \|q(e\widetilde{\rho}_n(1_D) - e)\| = 0$$

og af (iii) fås, at

$$\lim_{m\to\infty} \|\beta_m(1_{[0,1]} - h_0)\widetilde{z}_n\| = 0.$$

Find voksende følger af endelige delmængder $F_n \subseteq C([0,1])$, $J_n \subseteq J$, $E_n \subseteq \widetilde{E}$, $D_n \subseteq D$, så $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$, $\bigcup_{n=1}^\infty J_n$, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ og $\bigcup_{n=1}^\infty D_n$ er tætte delmængder i hhv. $C([0,1])$, J, $\widetilde{E}$ og D. For hvert $n \in \mathbb{N}$ findes $m(n) \in \mathbb{N}$, så

$$\begin{aligned}
\|\beta_m(h_0)c - c\| &< \frac{1}{n} \\
\|\beta_m(f)e - e\beta_m(f)\| &< \frac{1}{n} \\
\|\beta_m(f)e\widetilde{\rho}_j(d) - e\widetilde{\rho}_j(d)\beta_m(f)\| &< \frac{1}{n} \\
\|\beta_m(1_{[0,1]} - h_0)z_j\| &< \frac{1}{n} \\
\|\beta_m(1_{[0,1]} - h_0)\widetilde{z}_j\| &< \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

for alle $m \geq m(n)$, $j = 1, \ldots, n$, $f \in F_n$, $c \in J_n$, $e \in E_n$ og $d \in D_n$. Vi kan uden tab af generalitet antage $m(1) < m(2) < m(3) < \ldots$, hvilket betyder, at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(h_0)c - c\| &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(f)e - e\beta_{m(n)}(f)\| &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(f)e\widetilde{\rho}_n(d) - e\widetilde{\rho}_n(d)\beta_{m(n)}(f)\| &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(1_{[0,1]} - h_0)z_n\| &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(1_{[0,1]} - h_0)\widetilde{z}_n\| &= 0
\end{aligned}$$

for alle $f \in C([0,1])$, $c \in J$, $e \in \widetilde{E}$ og $d \in D$.

Dvs.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(1_{[0,1]} - h_0)(e\widetilde{\rho}_n(d^2) - e\widetilde{\rho}_n(d)^2)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(1_{[0,1]} - h_0)(x_n + z_n)\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} (\|\beta_{m(n)}(1_{[0,1]} - h_0)\|\|x_n\| + \|\beta_{m(n)}(1_{[0,1]} - h_0)z_n\|) \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $e \in E_+$, og alle $d \in D$ og analogt er

$$\lim_{n\to\infty} \|\beta_{m(n)}(1_{[0,1]} - h_0)(e\widetilde{\rho}_n(1_D) - e)\| = 0$$

for alle $e \in E$.

Ved at erstatte $m(n)$ med n er $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ altså en følge af unitale *-homomorfier $\beta_n : C([0,1]) \mapsto \widetilde{J} \subseteq \widetilde{E}$, der opfylder det ønskede. □

For ethvert $f \in C([0,1])$ er $(\beta_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\widetilde{J})$, så vi kan definere en *-homomorfi $\beta : C([0,1]) \mapsto (\widetilde{J})_\infty \subseteq (\widetilde{E})_\infty$, givet ved

$$\beta(f) = \pi_\infty^{(\widetilde{J})}((\beta_n(f))_{n\in\mathbb{N}}), \; f \in C([0,1]).$$

For $e \in E$, $d \in D$ og $f \in C([0,1])$ er

$$\begin{aligned}
&\|\beta(f)\overline{\rho}(e \otimes d) - \overline{\rho}(e \otimes d)\beta(f)\| \\
&= \|\pi_\infty^{(\widetilde{J})}((\beta_n(f))_{n\in\mathbb{N}})(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d) - (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d)\pi_\infty^{(\widetilde{J})}((\beta_n(f))_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \|\pi_\infty^{(\widetilde{E})}((\beta_n(f))_{n\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(E)}((e\widetilde{\rho}_n(d))_{n\in\mathbb{N}}) - \pi_\infty^{(E)}((e\widetilde{\rho}_n(d))_{n\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(\widetilde{E})}((\beta_n(f))_{n\in\mathbb{N}})\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(f)e\widetilde{\rho}_n(d) - e\widetilde{\rho}_n(d)\beta_n(f)\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

jvf. (d). Så da β og $\overline{\rho}$ er lineære kontraktioner, og da $E \odot D$ er en tæt delmængde i $E \otimes D$, er $\beta(C([0,1])) \subseteq \overline{\rho}(E \otimes D)'$.
Endvidere gælder for alle $e \in E$

$$\begin{aligned}
&\|\beta(1_{[0,1]} - h_0)(\overline{\rho}(e \otimes 1_D) - (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e))\| \\
&= \|\pi_\infty^{(\widetilde{J})}((\beta_n(1_{[0,1]} - h_0))_{n\in\mathbb{N}})((\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)\widetilde{\rho}(1_D) - (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e))\| \\
&= \|\pi_\infty^{(\widetilde{E})}((\beta_n(1_{[0,1]} - h_0))_{n\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(E)}((e\widetilde{\rho}_n(1_D))_{n\in\mathbb{N}}) - (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e))\| \qquad (8.8)\\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(1_{[0,1]} - h_0)(e\widetilde{\rho}_n(1_D) - e)\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

jvf. (c).

Lemma 2. *Der findes en fuldstændigt positiv kontraktion $\mu : \widetilde{E} \otimes D \mapsto (J)_\infty$, der opfylder følgende betingelser:*

(g) $\mu(\widetilde{E} \otimes D) \subseteq \beta(C([0,1]))'$.

(h) $((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(g_1))(\mu(e^2 \otimes d^2) - \mu(e \otimes d)^2) = 0$ *for alle $e \in \widetilde{E}$ og alle $d \in D$.*

(i) $\beta(g_{\frac{1}{2}})\mu(e \otimes 1_D) = \beta(g_{\frac{1}{2}})\overline{\rho}(e \otimes 1_D)$ *for alle $e \in E$.*

(j) $\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\overline{\rho}(e \otimes d_1)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}}$
$= ((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\overline{\rho}(e \otimes d_1)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)$
for alle $e \in E$ og alle $d_0, d_1 \in D$.

(k) $\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1)$.

(l) $\beta(g_0)\mu(e \otimes 1_D) = \beta(g_0)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)$ *for alle $e \in E$.*

Bevis. Da J er D-stabil findes iflg. bemærkningen efter beviset for Sætning 6.1.10 *-homomorfier $\xi_n : J \otimes D \mapsto J$, der opfylder, at

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n(c \otimes 1_D) - c\| = 0 \qquad (8.9)$$

for alle $c \in J$.
Af (e) fås, at $1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1) \in J$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og da β_n er en *-homomorfi, er $1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1) =$

$\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)$ et positivt element i J. Så $(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \in J$, og da J betragtes som et lukket to-sidet ideal i E, vil $(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \in J$ for alle $e \in E$ og alle $d \in D$ og $(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \in J$ for alle $e \in E$. Ligeledes er $\beta_n(g_0)e \in J$ for alle $e \in E$, da $g_0 \in C_0([0,1[)$ og $\beta_n(f) \in J$ for alle $f \in C_0([0,1[)$. Ved at benytte at E, D og $C_0([0,1[)$ er separable, kan vi vha. (8.9) på samme måde som i beviset for Lemma 1 finde en delfølge $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ så

$$\lim_{n\to\infty} \|\zeta_n(((1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d)(1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}})\otimes 1_D)-(1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d)(1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}\| = 0 \tag{8.10}$$

for alle $d \in D$ og alle $e \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\zeta_n(((1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e(1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}})\otimes 1_D)-(1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e(1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}\| = 0 \tag{8.11}$$

for alle $e \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\zeta_n(\beta_n(g_0)e \otimes 1_D) - \beta_n(g_0)e\| = 0 \tag{8.12}$$

for alle $e \in E$ og

$$\lim_{n\to\infty} \|\zeta_n(\beta_n(f) \otimes 1_D) - \beta_n(f)\| = 0 \tag{8.13}$$

for alle $f \in C_0([0,1[)$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres $\mu_n : \widetilde{E} \otimes D \mapsto J$ ved

$$\mu_n(x) = \zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)x((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)),\ x \in \widetilde{E} \otimes D.$$

Afbildningen er defineret, idet $J \otimes D$ er et lukket to-sidet ideal i $\widetilde{E} \otimes D$. Det gælder også, at μ_n er fuldstændigt positiv. Det er klart, at afbildningen er lineær, og hvis $m \in \mathbb{N}$ og $(b_{ij})_{i,j=1}^m$ er et positivt element i $M_m(\widetilde{E} \otimes D)$, er b_{ij} på formen $b_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ki}^* b_{kj}$ for $b_{ki}, b_{kj} \in \widetilde{E} \otimes D$ jvf. Lemma 2.2.1. Dvs.

$$\begin{aligned}\mu_n(b_{ij}) &= \zeta_n\left(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)\left(\sum_{k=1}^m b_{ki}^* b_{kj}\right)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)\right) \\ &= \sum_{k=1}^m \zeta_n(b_{ki}((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))^* \zeta_n(b_{kj}((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)).\end{aligned}$$

Af Lemma 2.2.1 fås hermed, at μ_n er fuldstændigt positiv, og for $x \in \widetilde{E} \otimes D$ gælder, at

$$\begin{aligned}\|\mu_n(x)\| &\leq \|(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D\|^2 \|x\| \\ &= \|(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D\|^2 \|x\| \\ &\leq \|(1_{[0,1]} - h_1)^{\frac{1}{2}}\|_\infty^2 \|1_D\| \|x\| \\ &\leq \|x\|.\end{aligned}$$

Så μ_n er en fuldstændigt positiv kontraktion, og $(\mu_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(J)$ for alle $x \in \widetilde{E} \otimes D$. Lad nu $\mu : \widetilde{E} \otimes D \mapsto (J)_\infty$ være afbildningen givet ved,

$$\mu(x) = \pi_\infty^{(J)}((\mu_n(x))_{n\in\mathbb{N}}),\ x \in \widetilde{E} \otimes D.$$

Dvs. μ er en fuldstændigt positiv kontraktion, og vi skal nu vise, at μ opfylder betingelserne (g)-(l).

(g) For $f \in C_0([0,1[)$, $e \in \widetilde{E}$, $d \in D$ gælder,

$$\begin{aligned}
&\|\beta(f)\mu(e\otimes d) - \mu(e\otimes d)\beta(f)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(f)\mu_n(e\otimes d) - \mu_n(e\otimes d)\beta_n(f)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(f)\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e\otimes d)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) - \\
&\quad \zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e\otimes d)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))\beta_n(f)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(f)\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d) \\
&\quad - \zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d)\beta_n(f)\| \\
&\le \limsup_{n\to\infty}(\|\beta_n(f)\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d) - \beta_n(f)\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))e\otimes d)\| \\
&\quad + \|\beta_n(f)\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))e\otimes d) - \zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))e\otimes d)\beta_n(f)\| \\
&\quad + \|\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))e\otimes d)\beta_n(f) - \zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d)\beta_n(f)\|) \\
&\overset{(d)}{\le} \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(f)\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))e\otimes d) - \zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))e\otimes d)\beta_n(f)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(f)\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d) - \zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d)\beta_n(f)\| \\
&\le \limsup_{n\to\infty}(\|\beta_n(f)\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d) - \zeta_n(\beta_n(f)\otimes 1_D)\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d)\| \\
&\quad + \|\zeta_n(\beta_n(f)\otimes 1_D)\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d) - \zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d)\zeta_n(\beta_n(f)\otimes 1_D)\| \\
&\quad + \|\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d)\zeta_n(\beta_n(f)\otimes 1_D) - \zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\otimes d)\beta_n(f)\|) \\
&\overset{(8.13)}{\le} \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n(\beta_n(f(1_{[0,1]} - h_1))e\otimes d) - \zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))e\beta_n(f)\otimes d)\| \\
&\overset{(d)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Så $\beta(f)\mu(x) = \mu(x)\beta(f)$ for alle $f \in C_0([0,1[)$, $x \in \widetilde{E}\otimes D$. Dvs.

$$((\pi_\infty \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(f))\mu(x) = \mu(x)((\pi_\infty \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(f))$$

for $f \in C_0([0,1[)$, $x \in \widetilde{E}\otimes D$. Så da β er en unital *-homomorfi, gælder at

$$\beta(f)\mu(x) = \mu(x)\beta(f)$$

for alle $f \in C([0,1])$ og alle $x \in \widetilde{E}\otimes D$.

(h) For $e \in \widetilde{E}$ og $d \in D$ fås,

$$
\begin{aligned}
&\|((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(g_1))(\mu(e^2 \otimes d^2) - \mu(e \otimes d)^2)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(g_1))(\mu_n(e^2 \otimes d^2) - \mu_n(e \otimes d)^2)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(g_1))(\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e^2 \otimes d^2)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) \\
&\quad - \zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e \otimes d)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1)) \otimes 1_D)(e \otimes d)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)))\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(1_{[0,1]} - g_1)(\zeta_n(((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e^2 \otimes d^2)((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) \\
&\quad - \zeta_n(((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e \otimes d)(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1) \otimes 1_D)(e \otimes d)((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)))\| \\
&\overset{(8.13)}{\le} \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - g_1) \otimes 1_D)(\zeta_n(((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e^2 \otimes d^2)((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) \\
&\quad - \zeta_n(((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e \otimes d)(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1) \otimes 1_D)(e \otimes d)((\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)))\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n(\beta_n((1_{[0,1]} - g_1)(1_{[0,1]} - h_1)^{\frac{1}{2}})e^2(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d^2) \\
&\quad - \zeta_n(\beta_n((1_{[0,1]} - g_1)(1_{[0,1]} - h_1)^{\frac{1}{2}})e\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d^2)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n(\beta_n((1_{[0,1]} - g_1)(1_{[0,1]} - h_1)(1_{[0,1]} - h_1)^{\frac{1}{2}})e^2(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d^2) \\
&\quad - \zeta_n(\beta_n((1_{[0,1]} - g_1)(1_{[0,1]} - h_1)^{\frac{1}{2}})e\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d^2)\| \\
&\overset{(d)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

(i) For $e \in E$ gælder,

$$
\begin{aligned}
&\|\beta(g_{\frac{1}{2}})\mu(e \otimes 1_D) - \beta(g_{\frac{1}{2}})\overline{\rho}(e \otimes 1_D)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})\mu_n(e \otimes 1_D) - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})e\widetilde{\rho}_n(1_D)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})e\widetilde{\rho}_n(1_D)\| \\
&\le \limsup_{n\to\infty} (\|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) \\
&\quad - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}e(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}\| \\
&\quad + \|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}e(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e\| \\
&\quad + \|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})e\widetilde{\rho}_n(1_D)\|) \\
&\overset{(8.11),(d)}{\le} \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})\beta_n(1_{[0,1]} - h_1)e - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})e\widetilde{\rho}_n(1_D)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})e - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})e\widetilde{\rho}_n(1_D)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\beta_n(g_{\frac{1}{2}})\beta_n(1_{[0,1]} - h_0)e - \beta_n(g_{\frac{1}{2}})\beta_n(1_{[0,1]} - h_0)e\widetilde{\rho}_n(1_D)\| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

jvf. (c).

(j) For $d_0, d_1 \in D$ og $e \in E$ fås,

$$\begin{aligned}
&\|\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\overline{\rho}(e \otimes d_1)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - ((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\overline{\rho}(e \otimes d_1)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\mu_n(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d_1)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - (1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d_1)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}\mu_n(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot e\widetilde{\rho}_n(d_1)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} - (1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d_1)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D) \\
&\quad \cdot (1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))\| \\
&\le \limsup_{n\to\infty}(\|\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot e\widetilde{\rho}_n(d_1)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} - \zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) \\
&\quad \cdot \zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e\widetilde{\rho}_n(d_1) \otimes 1_D)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))\| \\
&\quad + \|\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D) \\
&\quad \cdot (e\widetilde{\rho}_n(d_1) \otimes 1_D)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) - \zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e\widetilde{\rho}_n(d_1) \otimes 1_D) \\
&\quad \cdot ((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))\| \\
&\quad + \|\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(e\widetilde{\rho}_n(d_1) \otimes 1_D)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) \\
&\quad \cdot \zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) - (1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d_1) \\
&\quad \cdot (1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D))\| \\
&\overset{(8.10)}{\le} \lim_{n\to\infty}\sup \|\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d_1)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d_0) \\
&\quad - \zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} e\widetilde{\rho}_n(d_1)(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))(1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes d_0)\| \\
&\overset{(d)}{=} 0.
\end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned}
&\|\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes 1_D) - ((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\mu_n(1_{\widetilde{E}} \otimes 1_D) - (1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n(((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}} \otimes 1_D)) - (1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n((1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1)) \otimes 1_D) - (1_{\widetilde{E}} - \beta_n(h_1))\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]} - h_1) \otimes 1_D) - \beta_n(1_{[0,1]} - h_1)\| \\
&\overset{(8.13)}{=} 0.
\end{aligned}$$

(l)

$$
\begin{aligned}
&\|\beta(g_0)\mu(e\otimes 1_D)-\beta(g_0)(\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)\|\\
&=\limsup_{n\to\infty}\|\beta_n(g_0)\mu_n(e\otimes 1_D)-\beta_n(g_0)e\|\\
&=\limsup_{n\to\infty}\|\beta_n(g_0)\zeta_n((1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}e(1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))^{\frac{1}{2}}\otimes 1_D)-\beta_n(g_0)e\|\\
&\overset{(d)}{\le}\limsup_{n\to\infty}\|\beta_n(g_0)\zeta_n((1_{\widetilde{E}}-\beta_n(h_1))e\otimes 1_D)-\beta_n(g_0)e\|\\
&\le\limsup_{n\to\infty}(\|\beta_n(g_0)\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]}-h_1)e\otimes 1_D)-\zeta_n(\beta_n(g_0)\otimes 1_D)\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]}-h_1)e\otimes 1_D)\|\\
&\quad+\|\zeta_n(\beta_n(g_0)\otimes 1_D)\zeta_n(\beta_n(1_{[0,1]}-h_1)e\otimes 1_D)-\zeta_n(\beta_n(g_0)e\otimes 1_D)\|\\
&\quad+\|\zeta_n(\beta_n(g_0)e\otimes 1_D)-\beta_n(g_0)e\|)\\
&\overset{(8.12),(8.13)}{\le}\limsup_{n\to\infty}\|\zeta_n(\beta_n(g_0(1_{[0,1]}-h_1))e\otimes 1_D)-\zeta_n(\beta_n(g_0)e\otimes 1_D)\|\\
&=\limsup_{n\to\infty}\|\zeta_n(\beta_n(g_0)e\otimes 1_D)-\zeta_n(\beta_n(g_0)e\otimes 1_D)\|\\
&=0
\end{aligned}
$$

for alle $e\in E$. □

Lemma 3. *Der findes en *-homomorfi $\lambda: C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)\otimes E\otimes D\otimes D\mapsto (J)_\infty$, der opfylder, at*

$$\lambda(f\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)=\beta(f)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)\overline{\rho}(e\otimes d_1)$$

for $f\in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$, $e\in E$, $d_0,d_1\in D$. Specielt gælder, at

$$\lambda(f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D)=\beta(f)\overline{\rho}(e\otimes 1_D) \tag{8.14}$$

for $f\in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$ og $e\in E$.

Bevis. Da μ og $\overline{\rho}$ er fuldstændigt positive kontraktioner fås af (j), at

$$
\begin{aligned}
&\mu(x)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\overline{\rho}(y)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}}=\\
&\quad((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\overline{\rho}(y)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\mu(x)
\end{aligned}
$$

for alle $x\in\mathbb{C}1_{\widetilde{E}}\otimes D$ og alle $y\in E\otimes D$. Så da $\beta(C([0,1]))\subseteq\overline{\rho}(E\otimes D)'$ fås også vha. (g), at de tre fuldstændigt positive kontraktioner

$$
\begin{aligned}
&\beta: C([0,1])\mapsto(\widetilde{E})_\infty,\\
&\omega\circ\overline{\rho}: E\otimes D\mapsto(E)_\infty\\
&\mu|_{\mathbb{C}1_{\widetilde{E}}\otimes D}:\mathbb{C}1_{\widetilde{E}}\otimes D\mapsto(J)_\infty\subseteq(E)_\infty
\end{aligned}
$$

har kommuterende billeder i $(\widetilde{E})_\infty$, hvor $\omega:(E)_\infty\mapsto(E)_\infty$ er givet ved

$$\omega(x)=((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}}x((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}},\quad x\in(E)_\infty.$$

Der findes således en fuldstændigt positiv kontraktion $\lambda : C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[) \otimes E \otimes D \otimes D \mapsto (J)_\infty$, der opfylder, at

$$\lambda(f\otimes e\otimes d_0\otimes d_1) = \beta(f)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}}\overline{\rho}(e\otimes d_1)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})}\circ\delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}})-\beta(h_1))^{\frac{1}{2}}$$

for $f \in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$, $e \in E$, $d_0, d_1 \in D$.
Bemærk, at billedet af λ tilhører $(J)_\infty$, da $\beta(f) \in (J)_\infty$ for $f \in C_0([0,1[)$, $\mu(x) \in (J)_\infty$ for $x \in \widetilde{E} \otimes D$ og $(J)_\infty$ er et lukket to-sidet ideal i $(E)_\infty$.

For $0 \le t \le \frac{7}{8}$ er $(1_{[0,1]} - h_1)(t) = 1$, så $f = (1_{[0,1]} - h_1)f$ for alle $f \in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$. Dvs.

$$\begin{aligned}\lambda(f\otimes e\otimes d_0\otimes d_1) &= \beta((1_{[0,1]}-h_1)f)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)\beta((1_{[0,1]}-h_1)^{\frac{1}{2}})\overline{\rho}(e\otimes d_1)\beta((1_{[0,1]}-h_1)^{\frac{1}{2}})\\ &= \beta((1_{[0,1]}-h_1)^2 f)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)\overline{\rho}(e\otimes d_1)\\ &= \beta(f)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)\overline{\rho}(e\otimes d_1).\end{aligned}$$

Vi skal vise, at λ er en *-homomorfi, men for $f \in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$, $e \in E_+$, $d_1, d_2 \in D$ er

$$\begin{aligned}\lambda(f^2\otimes e^2\otimes d_0^2\otimes d_1^2) &= \beta(f^2)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0^2)\overline{\rho}(e^2\otimes d_1^2)\\ &= \beta(f)^2\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)^2\overline{\rho}(e^2\otimes d_1^2),\end{aligned}$$

da (h) giver at $\beta(1_{[0,1]} - g_1)(\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0^2) - \mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0)^2) = 0$, hvilket medfører, at $\beta(f)(\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d_0^2) - \mu(1_{\widetilde{E}} - d_0)^2) = 0$ for $f \in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$.
Thi, lad

$$h_n = \begin{cases} \frac{f(t)}{1-g_1(t)}, & 0 \le t < \frac{7}{8} - \frac{1}{n}\\ -n\frac{f(\frac{7}{8}-\frac{1}{n})}{1-g_1(\frac{7}{8}-\frac{1}{n})}t + \frac{f(\frac{7}{8}-\frac{1}{n})}{1-g_1(\frac{7}{8}-\frac{1}{n})}\cdot\frac{7}{8}n, & \frac{7}{8}-\frac{1}{n} < t \le \frac{7}{8}\\ 0, & \frac{7}{8} < t \le 1.\end{cases}$$

Da vil $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $C([0,1])$, der opfylder at $\lim_{n\to\infty} \|h_n(1-g_1) - f\|_\infty = 0$, hvilket giver det ønskede.

Af (b) fås, for $e \in E_+$ og $d_1 \in D$, at

$$\beta(1_{[0,1]} - h_0)((\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d_1^2) - (\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d_1)^2) = 0,$$

så

$$\begin{aligned}&\beta(1_{[0,1]}-h_0)(\overline{\rho}(e^2\otimes d_1^2) - \overline{\rho}(e\otimes d_1)^2)\\ &= \beta(1_{[0,1]}-h_0)((\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)^2\widetilde{\rho}(d_1^2) - (\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d_1)(\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)\widetilde{\rho}(d_1))\\ &\overset{(8.4)}{=} \beta(1_{[0,1]}-h_0)(\widetilde{\rho}(d_1^2)(\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)^2 - \widetilde{\rho}(d_1)^2(\pi_\infty^{(E)}\circ\delta_E)(e)^2)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{8.15}$$

For $t \ge \frac{1}{8}$ er $(1_{[0,1]} - h_0)(t) = 1$, så $f = (1_{[0,1]} - h_0)f$ for alle $f \in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$. Dvs.

$$\begin{aligned}\lambda(f^2\otimes e^2\otimes d_0^2\otimes d_1^2) &= \beta(f^2(1_{[0,1]}-h_0))\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)^2\overline{\rho}(e^2\otimes d_1^2)\\ &= \mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)^2\beta(f^2(1_{[0,1]}-h_0))\overline{\rho}(e^2\otimes d_1^2)\\ &= \mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)^2\beta(f)^2\beta(1_{[0,1]}-h_0)\overline{\rho}(e\otimes d_1)^2\\ &= \beta(f)^2\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)^2\overline{\rho}(e\otimes d_1)^2\\ &= \lambda(f\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)^2\end{aligned}$$

for $f \in C_0([\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[)$, $e \in E_+$ og $d_0, d_1 \in D$. Da λ er en lineær kontraktion fås hermed, at $\lambda(x^2) = \lambda(x)^2$ for alle $x \in (C_0(]\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[)\otimes E\otimes D\otimes D)_+$ og Lemma 2.2.9 giver, at λ er multiplikativ. Jvf. definitionen af μ og $\overline{\rho}$, og da β er en *-homomorfi, er det oplagt, at $\lambda(x^*) = \lambda(x)^*$ for $x \in C_0(]\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[) \otimes E \otimes D \otimes D$, hvilket betyder, at λ er en *-homomorfi.
Bemærk, at iflg. (k) er

$$\begin{aligned}\lambda(f \otimes e \otimes 1_D \otimes 1_D) &= \beta(f)\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes 1_D)\overline{\rho}(e \otimes 1_D)\\ &= \beta(f)((\pi_\infty^{(\widetilde{E})} \circ \delta_{\widetilde{E}})(1_{\widetilde{E}}) - \beta(h_1))\overline{\rho}(e \otimes 1_D)\\ &= \beta(f)\beta(1_{[0,1]} - h_1)\overline{\rho}(e \otimes 1_D)\\ &= \beta(f(1_{[0,1]} - h_1))\overline{\rho}(e \otimes 1_D)\\ &= \beta(f)\overline{\rho}(e \otimes 1_D).\end{aligned}$$

□

Lemma 4. *Der findes $u \in (J)_\infty \cap \beta(C([0,1]))'$, så*

$$u^*\lambda(fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1)u = \lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1) \tag{8.16}$$

$$uu^*\lambda(f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1) = \lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1) \tag{8.17}$$

$$u^*\lambda(g_1 f \otimes e \otimes d_0 \otimes 1_D)u = \lambda(g_1 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \otimes e \otimes 1_D \otimes d_0) \tag{8.18}$$

$$u^*\lambda(f \otimes e \otimes 1_D \otimes 1_D)u = \lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \otimes e \otimes 1_D \otimes 1_D) \tag{8.19}$$

for $f \in C_0(]\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[)$, $e \in E$ og $d_0, d_1 \in D$.

Bevis. C^*-algebraen D er stærkt selv-absorberende, og har dermed approksimativt indre halvflip (Sætning 4.2.2). Så der findes en følge af unitære $(s_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq D \otimes D$, som opfylder, at

$$\lim_{l\to\infty} \|s_l^*(x \otimes 1_D)s_l - 1_D \otimes x\| = 0 \tag{8.20}$$

for alle $x \in D$. Eftersom D er K_1-injektiv, kan de unitære vælges til at være homotope med $1_{D\otimes D}$ jvf. Proposition 6.1.4. Hermed findes unitære $\widetilde{s}_l \in C([0,1], D \otimes D) \cong C([0,1]) \otimes D \otimes D$, så

$$\widetilde{s}_l|_{[0,\frac{1}{4}]} = 1_{D\otimes D} \quad \text{og} \quad \widetilde{s}_l|_{[\frac{3}{4},1]} = s_l.$$

Bemærk, at $\widetilde{s}_l$ kan betragtes som elementer i $C([0,1]) \otimes \widetilde{E} \otimes D \otimes D$, idet afbildningen $\psi : C([0,1]) \otimes D \otimes D \mapsto C([0,1]) \otimes \widetilde{E} \otimes D \otimes D$ givet ved,

$$\psi(f \otimes d_1 \otimes d_2) = f \otimes 1_{\widetilde{E}} \otimes d_1 \otimes d_2,\ f \in C([0,1]), d_1, d_2 \in D$$

er en injektiv *-homomorfi. Så $C([0,1]) \otimes D \otimes D$ er isomorf med en del-C^*-algebra af $C([0,1]) \otimes \widetilde{E} \otimes D \otimes D$.

Lad $(e_l)_{l\in\mathbb{N}}$ være en approksimativ enhed for E bestående af positive kontraktioner, og definer

$$v_l = (g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \otimes e_l \otimes 1_D \otimes 1_D)\widetilde{s}_l.$$

Da $g_{\frac{1}{2}} \in C_0(]\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[)$ er $v_l \in C_0(]\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[) \otimes E \otimes D \otimes D$, og $g_{\frac{1}{2}} \otimes e_l \otimes 1_D \otimes 1_D$ kommuterer med ethvert element i $C([0,1]) \otimes 1_{\widetilde{E}} \otimes D \otimes D$, hvilket medfører, at v_l er et normalt element. Dvs.

$$v_l^* v_l = v_l v_l^* = (g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \otimes e_l \otimes 1_D \otimes 1_D)\widetilde{s}_l \widetilde{s}_l^*((g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}})^* \otimes d_l^* \otimes 1_D \otimes 1_D) = (g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e_l^2 \otimes 1_D \otimes 1_D),$$

da $\widetilde{s}_l$ er unitær og $g_{\frac{1}{2}}$ samt e_l er positive. Så

$$\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty} \|v_l v_l^*(f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1) - (g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1)\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e_l^2 \otimes 1_D \otimes 1_D)(f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1) - (g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1)\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \otimes e_l^2 e \otimes d_0 \otimes d_1) - (g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1)\| \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.21}$$

for $f \in C(]\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[)$, $e \in E$ og $d_0, d_1 \in D$.

For $f \in C_0(]\frac{1}{8}, \frac{7}{8}[)$, $e \in E$ og $d_0, d_1 \in D$ kan vi pga. isomorfien $C([0,1]) \otimes E \otimes D \otimes D \cong C([0,1], E \otimes D \otimes D)$ skrive elementet $f \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1$, som elementet $G \in C([0,1], E \otimes D \otimes D)$, hvor $G(t) = f(t)e \otimes d_0 \otimes d_1$. Ved hjælp af denne repræsentation kan ligningerne (8.22), (8.23) og (8.24) vises:

$$\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty} \|v_l^*(fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1)v_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1)\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|\widetilde{s}_l^*(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \otimes e_l \otimes 1_D \otimes 1_D)(fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1)(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \otimes e_l \otimes 1_D \otimes 1_D)\widetilde{s}_l \\
&\quad - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|\widetilde{s}_l^*(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0 \otimes e_l e e_l \otimes d_0 \otimes d_1)\widetilde{s}_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0 \otimes e_l e e_l \otimes d_0 \otimes d_1 - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0 \otimes e \otimes d_0 \otimes d_1\| \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{8.22}$$

hvor det næstsidste lighedstegn fås, idet $\widetilde{s}_l(t) = 1_{D \otimes D}$ for $0 \le t \le \frac{1}{4}$ og $g_0(t) = 0$ for $t \ge \frac{1}{4}$. Da $g_1(t) = 0$ for $0 \le t \le \frac{3}{4}$, og da $\widetilde{s}_l(t) = s_l$ for $\frac{3}{4} \le t \le 1$ fås af (8.20), at

$$\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty} \|v_l^*(fg_1 \otimes e \otimes d_0 \otimes 1_D)v_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_1 \otimes e \otimes 1_D \otimes d_0\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|\widetilde{s}_l^*(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_1 \otimes e_l e e_l \otimes d_0 \otimes 1_D)\widetilde{s}_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_1 \otimes e \otimes 1_D \otimes d_0\| \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{8.23}$$

og da $\widetilde{s}_l^*(t)\widetilde{s}_l(t) = 1_{D\otimes D} = \widetilde{s}_l(t)\widetilde{s}_l^*(t)$ for $0 \le t \le 1$ gælder

$$
\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty} \|v_l^*(f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D)v_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|\widetilde{s}_l^*(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\otimes e_l\otimes 1_D\otimes 1_D)(f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D)(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\otimes e_l\otimes 1_D\otimes 1_D)\widetilde{s}_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D\| \\
&= \lim_{l\to\infty} \|\widetilde{s}_l^*(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\otimes e_l e e_l\otimes 1_D\otimes 1_D)\widetilde{s}_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D\| \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

For hvert $l\in\mathbb{N}$ er $\|\lambda(v_l)\| \le \|v_l\| \le \|g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\|\|d_l\|\|\widetilde{s}_l\| \le 1$, så da $\pi_\infty^{(J)} : l^\infty(J) \mapsto (J)_\infty$ er surjektiv, findes jvf. [MRL, Theorem 2.2.10] en kontraktion $(v_{l,j})_{j\in\mathbb{N}} \in l^\infty(J)$, så

$$\lambda(v_l) = \pi_\infty^{(J)}((v_{l,j})_{j\in\mathbb{N}}).$$

Bemærk, at $\lambda(v_l) \in \beta(C([0,1]))'$ for alle $l\in\mathbb{N}$. Dette ses, idet der for $h\in C([0,1])$, $g\in C([0,1])$ og $d_0,d_1\in D$ gælder,

$$
\begin{aligned}
&\lambda((g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\otimes e_l\otimes 1_D\otimes 1_D)(h\otimes 1_{\widetilde{E}}\otimes d_0\otimes d_1))\beta(g) \\
&= \lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} h\otimes e_l\otimes d_0\otimes d_1)\beta(g) \\
&= \beta(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}})\beta(h)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)\overline{\rho}(e_l\otimes d_1)\beta(g) \\
&= \beta(g)\beta(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}})\beta(h)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d_0)\overline{\rho}(e_l\otimes d_1) \\
&= \beta(g)\lambda((g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\otimes e_l\otimes 1_D\otimes 1_D)(h\otimes 1_{\widetilde{E}}\otimes d_0\otimes d_1)).
\end{aligned}
$$

Så da $\widetilde{s}_l \in C([0,1])\otimes\mathbb{C}1_{\widetilde{E}}\otimes D\otimes D$ og λ er en lineær kontraktion fås, at $\lambda(v_l)\in\beta(C([0,1]))'$. Dvs.

$$\limsup_{j\to\infty} \|v_{l,j}\beta_j(g) - \beta_j(g)v_{l,j}\| = 0$$

for alle $l\in\mathbb{N}$ og alle $g\in C([0,1])$.

Find voksende følger af endelige delmængder $F_n \subseteq C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$, $E_n\subseteq E$ og $D_n\subseteq D$, så $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ og $\bigcup_{n=1}^\infty D_n$ er tætte delmængder i hhv. $C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)$, E og D.
Af ligning (8.22) fås for $n\in\mathbb{N}$ eksistensen af $l_n\in\mathbb{N}$, så

$$\|v_l^*(fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)v_l - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1\| < \frac{1}{n} \tag{8.25}$$

når $l\ge l_n$, $f\in F_n$, $e\in E_n$ og $d_0,d_1\in D$.
Eftersom $\pi_\infty^{(J)} : l^\infty(J)\mapsto (J)_\infty$ er surjektiv findes en begrænset følge $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ af mængdeafbildninger, $\lambda_j : C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)\otimes E\otimes D\otimes D\mapsto J$, så

$$\lambda(x) = \pi_\infty^{(J)}((\lambda_j(x))_{j\in\mathbb{N}}),\ x\in C_0(]\frac{1}{8},\frac{7}{8}[)\otimes E\otimes D\otimes D.$$

Ligning (8.25) giver, at

$$\begin{aligned}
&\limsup_{j\to\infty} \|v_{l,j}^*\lambda_j(fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)v_{l,j} - \lambda_j(g_{\frac12}^{\frac12} fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)\| \\
&= \|\pi_\infty^{(J)}((v_{l,j})_{j\in\mathbb{N}})^*\pi_\infty^{(J)}((\lambda_j(fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1))_{j\in\mathbb{N}})\pi_\infty^{(J)}((v_{l,j})_{j\in\mathbb{N}}) \\
&\quad - \pi_\infty^{(J)}((\lambda_j(g_{\frac12}^{\frac12} fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1))_{j\in\mathbb{N}})\| \\
&= \|\lambda(v_l)^*\lambda(fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)\lambda(v_l) - \lambda(g_{\frac12}^{\frac12} fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)\| \\
&< \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

for $l \geq l_n$, $f \in F_n$, $e \in E_n$ og $d_0, d_1 \in D_n$.
Specielt findes $j_{n,l} \in \mathbb{N}$, så

$$\begin{aligned}
&\|v_{l,j}^*\lambda_j(fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)v_{l,j} - \lambda_j(g_{\frac12}^{\frac12} fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)\| < \frac{2}{n} \quad \text{og} \\
&\|v_{l,j}\beta_j(g) - \beta_j(g)v_{l,j}\| < \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

for $l \geq l_n$, $f \in F_n$, $e \in E_n$, $d_0, d_1 \in D_n$, $g \in C([0,1])$ og $j \geq j_{n,l}$.

Find nu en følge af naturlige tal $m(1) < m(2) < m(3), \ldots$, så $m(n) \geq j_{n,l_n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og definer $l : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ ved

$$l(j) = \begin{cases} l_n, & m(n) \leq j < m(n+1) \\ 1, & 1 \leq j < m(1). \end{cases}$$

Sæt $u_j = v_{l(j),j}$ og $u = \pi_\infty^{(J)}((u_j)_{j\in\mathbb{N}})$. For $m(n) \leq j < m(n+1)$, $f \in F_n$, $e \in E_n$ og $d_0, d_1 \in D_n$ gælder, at

$$\|v_{l(j),j}^*\lambda_j(fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)v_{l(j),j} - \lambda_j(g_{\frac12}^{\frac12} fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)\| < \frac{2}{n}.$$

Dette giver, at

$$\|u^*\lambda(fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)u - \lambda(g_{\frac12}^{\frac12} fg_0\otimes e\otimes d_0\otimes d_1)\| = 0$$

for $f \in C_0(]\frac18, \frac78[)$, $e \in E$ og $d_0, d_1 \in D$ og

$$\|u\beta(g) - \beta(g)u\| = 0$$

for $g \in C([0,1])$.
Ved ovenfor at vælge l_n og $j_{n,l}$ passende kan vi ved hjælp af hhv. (8.21), (8.23) og (8.24) få, at

$$\begin{aligned}
uu^*\lambda(f\otimes e\otimes d_0\otimes d_1) &= \lambda(g_{\frac12}^{\frac12} f\otimes e\otimes d_0\otimes d_1) \\
u^*\lambda(g_1 f\otimes e\otimes d_0\otimes 1_D)u &= \lambda(g_1 g_{\frac12}^{\frac12} f\otimes e\otimes 1_D\otimes d_0) \\
u^*\lambda(f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D)u &= \lambda(g_{\frac12}^{\frac12} f\otimes e\otimes 1_D\otimes 1_D).
\end{aligned}$$

for $f \in C_0(]\frac18, \frac78[)$, $e \in E$ og $d_0, d_1 \in D$ □

Lemma 5. *For $e \in E_+$ og $d \in D$ gælder, at*

$$\beta(g_0)\mu(e\otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u = \beta(g_0)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u \tag{8.26}$$

$$u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u\beta(g_0)\mu(e\otimes d) = \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(e^2\otimes d^2) \tag{8.27}$$

$$\beta(g_1)\overline{\rho}(e\otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u = \beta(g_1)\beta(g_{\frac{1}{2}})\overline{\rho}(e^2\otimes d^2) \tag{8.28}$$

$$u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u\beta(g_1)\overline{\rho}(e\otimes d) = \beta(g_1)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u. \tag{8.29}$$

Bevis. For $e \in E_+$ og $d \in D$ fås, idet $g_0 = g_0(1_{[0,1]} - g_1)$ og $g_{\frac{1}{2}} = g_{\frac{1}{2}}(1_{[0,1]} - h_0)$, at

$$\begin{aligned}
& \beta(g_0)\mu(e\otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u \\
= \;& \mu(e\otimes d)u^*\lambda(g_0 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u \\
\overset{(8.16)}{=} \;& \mu(e\otimes d)\lambda(g_0 g_{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D) \\
= \;& \mu(e\otimes d)\beta(g_0)\beta(g_{\frac{1}{2}})\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d)\overline{\rho}(e\otimes 1_D) \\
\overset{(i)}{=} \;& \mu(e\otimes d)\beta(g_0)\beta(g_{\frac{1}{2}})\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d)\mu(e\otimes 1_D) \\
= \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\beta(1_{[0,1]} - g_1)\mu(e\otimes d)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d)\mu(e\otimes 1_D) \\
\overset{(h),(2.2.9)}{=} \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\beta(1_{[0,1]} - g_1)\mu(e\otimes d^2)\mu(e\otimes 1_D) \qquad (8.30) \\
\overset{(h),(2.2.9)}{=} \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\beta(1_{[0,1]} - g_1)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d^2)\mu(e\otimes 1_D)\mu(e\otimes 1_D) \\
= \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d^2)\mu(e\otimes 1_D)\mu(e\otimes 1_D) \\
\overset{(i)}{=} \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d^2)\mu(e\otimes 1_D)\overline{\rho}(e\otimes 1_D) \\
\overset{(i)}{=} \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d^2)\overline{\rho}(e\otimes 1_D)^2 \\
= \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d^2)\beta(1-h_0)\overline{\rho}(e\otimes 1_D)^2 \\
\overset{(8.15)}{=} \;& \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(1_{\widetilde{E}}\otimes d^2)\beta(1-h_0)\overline{\rho}(e^2\otimes 1_D) \\
= \;& \lambda(g_0 g_{\frac{1}{2}}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D) \\
\overset{(8.16)}{=} \;& u^*\lambda(g_0 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u \\
= \;& \beta(g_0)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u
\end{aligned}$$

Af ligning (8.30) fås af (h) og Lemma 2.2.9 også at

$$\beta(g_0)\mu(e\otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u = \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\beta(1_{[0,1]} - g_1)\mu(e^2\otimes d^2) = \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(e^2\otimes d^2)$$

for $e \in E_+$ og $d \in D$.
På tilsvarende måde ses, at

$$u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u\beta(g_0)\mu(e\otimes d) = \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(g_0)\mu(e^2\otimes d^2). \tag{8.31}$$

Endvidere gælder for $e \in E_+$ og $d \in D$, at

$$\begin{aligned}
\beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u &= \overline{\rho}(e \otimes d)\beta(g_1)u^*\beta(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}})\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d)\overline{\rho}(e \otimes 1_D)u \\
&= \overline{\rho}(e \otimes d)u^*\lambda(g_1 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u \\
&\overset{(8.18)}{=} \overline{\rho}(e \otimes d)\lambda(g_1 g_{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes 1_D \otimes d) \\
&= \overline{\rho}(e \otimes d)\beta(g_1 g_{\frac{1}{2}})\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes 1_D)\overline{\rho}(e \otimes d) \\
&\overset{(k)}{=} \overline{\rho}(e \otimes d)\beta(g_1 g_{\frac{1}{2}})\beta(1_{[0,1]} - h_1)\overline{\rho}(e \otimes d) \\
&= \beta(g_1)\beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(1_{[0,1]} - h_1)\overline{\rho}(e \otimes d)^2 \\
&= \beta(g_1)\beta(g_{\frac{1}{2}})\overline{\rho}(e \otimes d)^2 \\
&= \beta(g_1)\beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(1_{[0,1]} - h_0)\overline{\rho}(e \otimes d)^2 \\
&\overset{(8.15)}{=} \beta(g_1)\beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(1_{[0,1]} - h_0)\overline{\rho}(e^2 \otimes d^2) \\
&\overset{(*)}{=} \beta(g_1)\beta(g_{\frac{1}{2}})\overline{\rho}(e^2 \otimes d^2) \\
&\overset{(k)}{=} \beta(g_1)\lambda(g_{\frac{1}{2}} \otimes e^2 \otimes 1_D \otimes d^2) \\
&= \lambda(g_1 g_{\frac{1}{2}} \otimes e^2 \otimes 1_D \otimes d^2) \\
&\overset{(8.18)}{=} u^*\lambda(g_1 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e^2 \otimes d^2 \otimes 1_D)u \\
&= u^*\beta(g_1)\beta(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}})\mu(1_{\widetilde{E}} \otimes d^2)\overline{\rho}(e^2 \otimes 1_D)u \\
&= \beta(g_1)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e^2 \otimes d^2 \otimes 1_D)u.
\end{aligned}$$

Af (*) fås ligning (8.28). Analoge udregninger giver,

$$u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u\beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d) = \beta(g_1)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e^2 \otimes d^2 \otimes 1_D)u$$

for $e \in E_+$ og $d \in D$. □

Lemma 6. *Der findes en *-homomorfi $\gamma : E \otimes D \mapsto (E)_\infty$, der opfylder, at*

$$\gamma(e \otimes 1_D) = (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e)$$

for alle $e \in E$.

Bevis. Bemærk, at $\beta(g_0)\mu(e \otimes d) \in (J)_\infty$ for $e \in E$ og $d \in D$, og da $(E)_\infty$ er et to-sidet ideal i $(\widetilde{E})_\infty$ vil $\beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d) \in (E)_\infty$ for alle $e \in E$ og alle $d \in D$. Så vi kan definere $\gamma : E \otimes D \mapsto (E)_\infty$ ved

$$\gamma(e \otimes d) = \beta(g_0)\mu(e \otimes d) + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d), \ e \in E, d \in D.$$

Hermed er γ en lineær fuldstændigt positiv afbildning, idet μ, λ og $\overline{\rho}$ er fuldstændigt positive.

For alle $e \in E$ fås, at

$$\begin{aligned}
\gamma(e \otimes 1_D) &= \beta(g_0)\mu(e \otimes 1_D) + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes 1_D \otimes 1_D)u + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes 1_D) \\
&\overset{(l),(8.19)}{=} \beta(g_0)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) + \lambda(g_{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes 1_D \otimes 1_D) + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes 1_D) \\
&\overset{(8.14)}{=} \beta(g_0)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) + \beta(g_{\frac{1}{2}})\overline{\rho}(e \otimes 1_D) + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes 1_D).
\end{aligned}$$

Men $g_1 h_0 = 0 = g_{\frac{1}{2}} h_0$, så

$$\begin{aligned}
\gamma(e \otimes 1_D) &= \beta(g_0)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) + \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(1_{[0,1]} - h_0)\overline{\rho}(e \otimes 1_D) + \beta(g_1)\beta(1_{[0,1]} - h_0)\overline{\rho}(e \otimes 1_D) \\
&\overset{(8.8)}{=} \beta(g_0)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) + \beta(g_{\frac{1}{2}})\beta(1_{[0,1]} - h_0)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) \\
&\quad + \beta(g_1)\beta(1_{[0,1]} - h_0)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) \\
&= \beta(g_0 + g_{\frac{1}{2}} + g_1)(\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e) \\
&= (\pi_\infty^{(E)} \circ \delta_E)(e).
\end{aligned}$$

Dette giver også, at γ er en kontraktion. For lad $(e_l)_{l \in \mathbb{N}}$ være en approksimativ enhed for E bestående af positive kontraktioner. Da er $(e_l \otimes 1_D)_{l \in \mathbb{N}}$ en approksimativ enhed for $E \otimes D$ bestående af positive kontraktioner, og

$$\|\gamma(e_l \otimes 1_D)\| = \|(\pi_\infty \circ \delta_E)(e_l)\| \leq 1$$

for alle $l \in \mathbb{N}$. Dvs. γ er en kontraktion, for hvis x er en positiv kontraktion i $E \otimes D$, da er $(e_l \otimes 1_D)^{\frac{1}{2}} x (e_l \otimes 1_D)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|(e_l \otimes 1_D) \leq (e_l \otimes 1_D)$ for alle $l \in \mathbb{N}$.
Så $\|\gamma((e_l \otimes 1_D)^{\frac{1}{2}} x (e_l \otimes 1_D)^{\frac{1}{2}})\| \leq \|\gamma(e_l \otimes 1_D)\| \leq 1$ for alle $l \in \mathbb{N}$. Heraf følger det ønskede, idet $(e_l \otimes 1_D)^{\frac{1}{2}} x (e_l \otimes 1_D)^{\frac{1}{2}} \to x$ for $l \to \infty$.

Vi mangler nu bare at vise, at γ er en *-homomorfi.
Billederne af β og $\overline{\rho}$ kommuterer og $\mu(\widetilde{E} \otimes D) \subseteq \beta(C([0,1]))'$ hvilket medfører, at $\gamma(x^*) = \gamma(x)^*$ for $x \in E \otimes D$, idet μ, $\overline{\rho}$ bevarer * og λ er en *-homomorfi. For at vise, at γ er en *-homomorfi, er det hermed tilstrækkeligt at vise, at γ er multiplikativ.
Idet $g_0 g_1 = 0$ og $\beta(C([0,1])) \subseteq \overline{\rho}(E \otimes D)'$, gælder for $e \in E_+$ og $d \in D_+$, at

$$\begin{aligned}
&\gamma(e \otimes d)^2 \\
&= \beta(g_0)^2\mu(e \otimes d)^2 + \beta(g_0)\mu(e \otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u + \beta(g_0)\mu(e \otimes d)\beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d) \\
&\quad + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u\beta(g_0)\mu(e \otimes d) + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)uu^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u \\
&\quad + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u\beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d) + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d)\beta(g_0)\mu(e \otimes d) \\
&\quad + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d)\beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d) \\
&= \beta(g_0)^2\mu(e \otimes d)^2 + \beta(g_0)\mu(e \otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u \\
&\quad + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u\beta(g_0)\mu(e \otimes d) + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)uu^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u \\
&\quad + u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u\beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d) + \beta(g_1)\overline{\rho}(e \otimes d)u^*\lambda(g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \otimes e \otimes d \otimes 1_D)u \\
&\quad + \beta(g_1)^2\overline{\rho}(e \otimes d)^2.
\end{aligned}$$

Da $g_0 = g_0(1_{[0,1]} - g_1)$ fås af (h),

$$\begin{aligned}\beta(g_0)^2\mu(e\otimes d)^2 &= \beta(g_0)^2\beta(1_{[0,1]} - g_1)\mu(e\otimes d)^2\\ &= \beta(g_0)^2\beta(1_{[0,1]} - g_1)\mu(e^2\otimes d^2)\\ &= \beta(g_0)^2\mu(e^2\otimes d^2)\end{aligned}$$

og (8.17) giver

$$\begin{aligned}u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)uu^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u &= u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)\lambda(g_{\frac12}\otimes e\otimes d\otimes 1_D)u\\ &= u^*\lambda(g_{\frac12}g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u\\ &= u^*\beta(g_{\frac12})\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u\\ &= \beta(g_{\frac12})u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u.\end{aligned}$$

Eftersom $g_1(1_{[0,1]} - h_0) = g_1$ giver (8.15)

$$\begin{aligned}\beta(g_1)^2\overline{\rho}(e\otimes d)^2 &= \beta(g_1^2)\beta(1_{[0,1]} - h_0)\overline{\rho}(e\otimes d)^2\\ &= \beta(g_1^2)\beta(1_{[0,1]} - h_0)\overline{\rho}(e^2\otimes d^2)\\ &= \beta(g_1)^2\overline{\rho}(e^2\otimes d^2).\end{aligned}$$

Sammen med (8.26), (8.27), (8.28) og (8.29) fås heraf,

$$\begin{aligned}&\gamma(e\otimes d)^2\\ &= \beta(g_0)^2\mu(e^2\otimes d^2) + \beta(g_0)u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u + \beta(g_{\frac12})\beta(g_0)\mu(e^2\otimes d^2)\\ &\quad + \beta(g_{\frac12})u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u + \beta(g_1)u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u + \beta(g_1)\beta(g_{\frac12})\overline{\rho}(e^2\otimes d^2)\\ &\quad + \beta(g_1)^2\overline{\rho}(e^2\otimes d^2)\\ &= \beta(g_0^2 + g_{\frac12}g_0)\mu(e^2\otimes d^2) + \beta(g_0 + g_{\frac12} + g_1)u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u\\ &\quad + \beta(g_1g_{\frac12} + g_1^2)\overline{\rho}(e^2\otimes d^2)\\ &= \beta(g_0^2 + (1_{[0,1]} - g_0 - g_1)g_0)\mu(e^2\otimes d^2) + \beta(1_{[0,1]})u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u\\ &\quad + \beta(g_1(1_{[0,1]} - g_0 - g_1) + g_1^2)\overline{\rho}(e^2\otimes d^2)\\ &= \beta(g_0)\mu(e^2\otimes d^2) + u^*\lambda(g_{\frac12}^{\frac12}\otimes e^2\otimes d^2\otimes 1_D)u + \beta(g_1)\overline{\rho}(e^2\otimes d^2)\\ &= \gamma(e^2\otimes d^2).\end{aligned}$$

Dvs. γ er en *-homomorfi jvf. Lemma 2.2.9. □

Sætning 6.1.10 og Lemma 6 giver nu, at E er D-stabil. □

Eksempel 8.1.3. Betragt delalgebraen $A \subseteq C([0,1], \mathcal{O}_2)$ givet ved

$$A = \{f \in C([0,1], \mathcal{O}_2) : f(1) = s_1 f(0) s_1^*\},$$

hvor s_1 og s_2 er de to kanoniske frembringere for $\mathcal{O}_2$. Det er let, at tjekke at A er en lukket selvadjungeret del-algebra af $C([0,1],\mathcal{O}_2)$, så A er en C^*-algebra.
Lad $q : A \mapsto \mathcal{O}_2$ være givet ved,

$$q(f) = f(0), \quad f \in A.$$

Da er q lineær og multiplikativ, og $q(f^*) = q(f)^*$, så q er en *-homomorfi. Endvidere er q surjektiv. For lad $x \in \mathcal{O}_2$ og sæt

$$f(t) = (s_1 x s_1^* - x)t + x, \quad t \in [0,1].$$

Da er $f \in C([0,1],\mathcal{O}_2)$, og $f(0) = x$ og $f(1) = s_1 x s_1^* = s_1 f(0) s_1^*$. Så $f \in A$ og $q(f) = x$.
Der gælder, at $q(f) = 0$, hvis og kun hvis $f(0) = 0$, hvilket er ækvivalent med at $f(1) = 0$. Hermed er

$$\ker(q) = \{f \in C([0,1]),\mathcal{O}_2) : f(0) = f(1) = 0\} = S\mathcal{O}_2.$$

Lad $\varphi : S\mathcal{O}_2 \mapsto A$ være inklusionsafbildningen, hvilket giver følgende kort-eksakte følge af C^*-algebraer,

$$0 \longrightarrow S\mathcal{O}_2 \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{q} \mathcal{O}_2 \longrightarrow 0.$$

C^*-algebraen $\mathcal{O}_2$ er unital, separabel og stærkt selv-absorberende. Endvidere er $\mathcal{O}_2$ K_1-injektiv, da $\mathcal{O}_2$ er purely infinite jvf. [MRL, Exercise 8.13].
Bemærk, at $S\mathcal{O}_2 = C_0(]0,1[,\mathcal{O}_2) \cong C_0(]0,1[) \otimes \mathcal{O}_2$. Så $S\mathcal{O}_2$ og $\mathcal{O}_2$ er separable $\mathcal{O}_2$-stabile C^*-algebraer, hvilket medfører jvf. Sætning 8.1.2, at $A \otimes \mathcal{O}_2 \cong A$.

Kapitel 9

Eksempler på D-stabilitet

I dette kapitel skal vi vise, at $\mathcal{O}_n$ er $\mathcal{O}_\infty$-stabil for alle $n \geq 2$, og at $\mathcal{O}_2$ er den eneste unitale, separable, simple og nukleære C^*-algebra, der er $\mathcal{O}_2$-stabil. Endvidere gives en kort introduktion til Jiang-Su algebraen $\mathcal{Z}$, som bygger på resultater fra [JS99]. Vi vil herefter opbygge et hieraki, der viser, hvorledes C^*-algebraerne $\mathcal{Z}$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_\infty$, B og $\mathcal{O}_\infty \otimes B$ virker som enheder mht. tensorproduktet, hvor B er en stærkt selv-absorberende UHF-algebra. Til sidst vises, at Bunce-Deddens algebraen af type 2^∞ er et eksempel på en C^*-algebra, der ikke er M_{2^∞}-stabil.

9.1 $\mathcal{O}_\infty$-stabilitet

Vi skal som det første se på $\mathcal{O}_\infty$-stabilitet, og vi har allerede i Sætning 5.4.4 vist, at en separabel, simpel og nukleær C^*-algebra A er $\mathcal{O}_\infty$-stabil, hvis og kun hvis A er purely infinite. Dette giver bl.a. anledning til nedenstående eksempel, idet $\mathcal{O}_n$ er purely infinite for $n \geq 2$:

Eksempel 9.1.1. For alle $n \geq 2$ er $\mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_\infty \cong \mathcal{O}_n$.

Derimod er der præcis én unital, separabel, simpel og nukleær C^*-algebra A, der er $\mathcal{O}_2$-stabil. (Korollar 9.1.3). Dette følger af Kircbergs $A \otimes \mathcal{O}_2$ Sætning:

Sætning 9.1.2. [1] *Tensorproduktet $A \otimes \mathcal{O}_2$ er isomorf med $\mathcal{O}_2$, hvis og kun hvis A er en unital, separabel, simpel og nukleær C^*-algebra.*

Korollar 9.1.3. *Lad A være en unital, separabel, simpel og nukleær C^*-algebra. Da er $A \otimes \mathcal{O}_2$ isomorf med A, hvis og kun hvis A er isomorf med $\mathcal{O}_2$.*

Bevis. Antag at A er isomorf med $\mathcal{O}_2$. Dvs. $A \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2 \cong A$.
Omvendt fås af Sætning 9.1.2 at $A \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2$, så hvis $A \otimes \mathcal{O}_2 \cong A$, da er $A \cong \mathcal{O}_2$. □

[1] [Rør02, Theorem 7.1.2]

9.2 Jiang-Su algebraen

For naturlige tal n, m er $M_m(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}) \cong M_{mn}(\mathbb{C})$, hvor isomorfien $\varphi : M_m(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}) \mapsto M_{mn}(\mathbb{C})$ er givet ved

$$\varphi(a \otimes b) = \begin{pmatrix} b_{11}a & b_{12}a & \dots & b_{1n}a \\ b_{21}a & b_{22}a & \dots & b_{2n}a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a & b_{n2}a & \dots & b_{nn}a \end{pmatrix},$$

for $a \in M_m(\mathbb{C})$ og $b = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$.
Lad I_n være identitetsmatricen i $M_n(\mathbb{C})$ og lad $M_m(\mathbb{C}) \otimes I_n = \{a \otimes I_n : a \in M_m(\mathbb{C})\}$ og $I_m \otimes M_n(\mathbb{C}) = \{I_m \otimes b : b \in M_n(\mathbb{C})\}$.

Definition 9.2.1. En dimension drop algebra er en C^*-algebra på formen

$$I[m_0, m, m_1] = \left\{ f \in C([0,1], M_m(\mathbb{C})) : f(0) \in M_{m_0}(\mathbb{C}) \otimes I_{\frac{m}{m_0}}, f(1) \in I_{\frac{m}{m_1}} \otimes M_{m_1}(\mathbb{C}) \right\},$$

hvor m_0, m_1 og m er naturlige tal, så både m_0 og m_1 er faktorer i m.

Hvis m_0 og m_1 er indbyrdes primiske, og $m = m_0 m_1$, kaldes $I[m_0, m, m_1]$ en primisk dimension drop algebra. Jiang og Su viste, at $I[m_0, m, m_1]$ ikke har andre projektioner end 0 og 1, hvis og kun hvis m_0 og m_1 er indbyrdes primiske, og i dette tilfælde er

$$K_0(I[m_0, m, m_1]) \cong \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad K_1(I[m_0, m, m_1]) = 0.$$

Der findes en induktiv følge af primiske dimension drop algebraer $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, hvor de forbindende *-homomorfier $\varphi_n : A_n \mapsto A_{n+1}$ er unitale og injektive, så den induktive grænse af

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

er en unital, simpel C^*-algebra med en entydig sportilstand.

Specielt gælder, at der blandt alle induktive grænser af dimension drop algebraer findes præcis én C^*-algebra $\mathcal{Z}$, der opfylder, at $\mathcal{Z}$ er en unital, simpel, nukleær og uendeligt dimensional C^*-algebra med en entydig spor state, så $K_0(\mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}$ og $K_1(\mathcal{Z}) \cong 0$. Denne C^*-algebra kaldes Jiang-Su algebraen.

Jiang og Su viser, at $\mathcal{Z}$ har approksimativt indre halv-flip, hvilket benyttes til at vise, at

$$\mathcal{Z} \cong \mathcal{Z} \otimes \mathcal{Z} \quad \text{og} \quad \mathcal{Z} \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{Z}.$$

Sætning 4.3.5 giver hermed, at $\mathcal{Z}$ er stærkt selv-absorberende. Samtidigt viser Jiang og Su, at en række C^*-algebraer er $\mathcal{Z}$-stabile. Der gælder følgende sætninger:

Sætning 9.2.2. *Lad A være en purely infinite, simpel, unital og nukleær C^*-algebra. Da er $A \cong A \otimes \mathcal{Z}$.*

Sætning 9.2.3. *Lad A være en uendelig dimensional, unital og simpel AF-algebra. Da er $A \cong A \otimes \mathcal{Z}$.*

Af de eksempler vi tidligere har betragtet fås heraf, at $\mathcal{O}_n$, $n \geq 2$ og alle UHF-algebraer er $\mathcal{Z}$-stabile.

9.3 Hieraki mht. D-stabilitet for en given C^*-algebra D

Bemærk, at hvis D_1 og D_2 er unitale, selv-absorberende C^*-algebraer, så $D_1 \otimes D_2 \cong D_1$, og $A \otimes D_1 \cong A$ for en C^*-algebra A, da vil $A \otimes D_2 \cong A$. Dette ses, idet

$$A \otimes D_2 \cong (A \otimes D_1) \otimes D_2 \cong A \otimes D_1 \cong A.$$

Ved hjælp af denne betragtning kan vi lave en hierakisk inddeling af, i hvilken grad forskellige unitale stærkt selv-absorberende C^*-algebraer virker som enheder mht. tensorproduktet.

Lad $\mathcal{Z}$ være Jiang-Su algebraen og lad B være en stærkt selv-absorberende UHF-algebra. Da vil B, $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_\infty \otimes B$ samt $\mathcal{O}_2$ være $\mathcal{Z}$-stabile. Der gælder følgende hieraki for, hvorledes C^*-algebraerne $\mathcal{Z}$, B, $\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_\infty \otimes B$ og $\mathcal{O}_2$ virker som enheder mht. tensorproduktet:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{Z} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
B \arrow[dr, dash] & & \mathcal{O}_\infty \arrow[dl, dash] \\
 & \mathcal{O}_\infty \otimes B \arrow[d, dash] & \\
 & \mathcal{O}_2 &
\end{tikzcd}$$

Dvs. at der for en C^*-algebra A gælder,

(i) $A \otimes \mathcal{O}_2 \cong A \Rightarrow A \otimes (\mathcal{O}_\infty \otimes B) \cong A \Rightarrow A \otimes \mathcal{O}_\infty \cong A \Rightarrow A \otimes \mathcal{Z} \cong A$.

(ii) $A \otimes \mathcal{O}_2 \cong A \Rightarrow A \otimes (\mathcal{O}_\infty \otimes B) \cong A \Rightarrow A \otimes B \cong A \Rightarrow A \otimes \mathcal{Z} \cong A$.

Bevis. (i). Lad B være en stærkt selv-absorberende C^*-algebra. Da er

$$\mathcal{O}_\infty \otimes B \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_2 \otimes B \cong \mathcal{O}_2 \otimes B \cong \mathcal{O}_2$$

jvf. Sætning 9.1.2, da B er simpel, separabel, unital og nukleær. Dvs. hvis $A \otimes \mathcal{O}_2 \cong A$, så er $(\mathcal{O}_\infty \otimes B) \otimes A \cong A$.

Da $\mathcal{O}_\infty$ er stærkt selv-absorberende fås,

$$\mathcal{O}_\infty \otimes B \otimes \mathcal{O}_\infty \cong \mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty \otimes B \cong \mathcal{O}_\infty \otimes B.$$

Så hvis $A \otimes (\mathcal{O}_\infty \otimes B) \cong A$, da er $A \otimes \mathcal{O}_\infty \cong A$.
Endvidere giver isomorfien $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{O}_\infty \cong \mathcal{O}_\infty$, at $A \otimes \mathcal{Z} \cong A$, hvis $A \otimes \mathcal{O}_\infty \cong A$.

(ii). For en stærkt selv-absorberende UHF-algebra B gælder, at $\mathcal{O}_\infty \otimes B \otimes B \cong \mathcal{O}_\infty \otimes B$. Så hvis $A \otimes (\mathcal{O}_\infty \otimes B) \cong A$, så er $A \otimes B \cong A$.
Tilsvarende giver isomorfien $\mathcal{Z} \otimes B \cong B$, at $A \otimes \mathcal{Z} \cong A$, hvis $A \otimes B \cong A$. $\square$

Af beviset ovenfor fås også, at alle C^*-algebraerne i hierakiet er stabile over for de C^*-algebraer, der ligger højere i hierakiet.

Blandt de stærkt selv-absorberende UHF-algebraer findes endnu et hieraki, som opfylder, at $A \otimes B \cong B$, hvis A og B er stærkt selv-absorberende UHF-algebraer, og A er placeret højere i hierakiet end B. Vi vil i det følgende betragte, hvordan dette hieraki er opbygget.

Hvis A og B er stærkt selv-absorberende UHF-algebraer med associerede supernaturlige tal hhv. $n = (n_i)_{i=1}^\infty$ og $m = (m_i)_{i=1}^\infty$, da er $A \otimes B$ en stærkt selv-absorberende UHF-algebra med supernaturligt tal $nm = (n_i + m_i)_{i=1}^\infty$. Så $A \otimes B$ er isomorf med B, hvis og kun hvis $nm = m$, dvs. $m_i = n_i + m_i$ for alle $i \in \mathbb{N}$.

Da $n_i, m_i \in \{0, \infty\}$ for alle $i \in \mathbb{N}$, vil de UHF-algebraer med supernaturligt tal $n = (n_i)_{i=1}^\infty$, hvor der findes et $n_0 \in \mathbb{N}$, så $n_{i_0} = \infty$ og $n_i = 0$ for $i \neq i_0$ ligge øverst i hierakiet af stærkt selv-absorberende UHF-algebraer.

Næste niveau er de UHF-algebraer med supernaturlige tal $n = (n_i)_{i=1}^\infty$, hvor der findes $i_1 \in \mathbb{N}$, så $i_1 \neq i_0$, og $n_{i_0} = n_{i_1} = \infty$ og $n_i = 0$ for $i \neq i_0, i \neq i_1$.

Tredje niveau er de UHF-algebraer med supernaturligt tal $n = (n_i)_{i=1}^\infty$, hvor der findes $i_2 \in \mathbb{N}$ så $i_2 \neq i_0$, $i_2 \neq i_1$ og $n_{i_0} = n_{i_1} = n_{i_2} = \infty$ og $n_i = 0$ for $i \in \mathbb{N} \setminus \{i_0, i_1, i_2\}$.

På denne måde fortsættes, og det sidste niveau i hierakiet bliver således den universelle UHF-algebra, dvs. UHF-algebraen med supernaturligt tal $n = (n_i)_{i=1}^\infty$, hvor $n_i = \infty$ for alle $i \in \mathbb{N}$.

Som eksempel er $M_{2^\infty.3^\infty.5^\infty} \otimes M_{2^\infty.3^\infty} \cong M_{2^\infty.3^\infty.5^\infty}$ og $M_{2^\infty.3^\infty} \otimes M_{2^\infty} \cong M_{2^\infty.3^\infty}$. Tilsvarende er $M_{2^\infty.5^\infty.7^\infty} \otimes M_{2^\infty.5^\infty} \cong M_{2^\infty.5^\infty.7^\infty}$ og $M_{2^\infty.5^\infty} \otimes M_{2^\infty} \cong M_{2^\infty.5^\infty}$, men UHF-algebraerne $M_{2^\infty.3^\infty}$ og $M_{2^\infty.5^\infty}$ forholder sig ikke hierakisk i forhold til hinanden mht. tensorproduktet.

9.4 Bunce-Deddens algebraen af type 2^∞

Vi skal i det følgende afsnit give et eksempel på en C^*-algebra, der ikke er stabil mht. tensorproduktet overfor UHF-algebraen af type 2^∞. Vi skal benytte K-teori til at give eksemplet, idet der for en C^*-algebra A og en stærkt selv-absorberende UHF-algebra B gælder, at $p|K_0(A)$ og $p|K_1(A)$ for ethvert primtal p, der går op i $K_0(B)$, hvis $A \otimes B \cong A$ (Sætning 9.4.5). Så vi skal finde en C^*-algebra A og et primtal p, der går op i $K_0(M_{2^\infty})$, så p ikke går op i $K_0(A)$ eller p ikke går op i $K_1(A)$.

Vi vil nu vha. nogle lemmaer vise Sætning 9.4.5, som senere skal benyttes til at finde det omtalte eksempel på en C^*-algebra A, så $A \otimes M_{2^\infty} \ncong A$.

Definition 9.4.1. Lad G være en additiv gruppe, og lad $n \in \mathbb{Z}$. Da siges n, at gå op i G, hvis der for ethvert $g \in G$ findes et $h \in G$, så $g = nh$.

Lad B være en stærkt selv-absorberende UHF-algebra, og lad $n(B) = (n_i)_{i=1}^\infty$ være det supernaturlige tal associeret til B. Da B er stærkt selv-absorberende er $n_i \in \{0, \infty\}$ for alle $i \in \mathbb{N}$, og $n_i \neq 0$ for mindst ét $i \in \mathbb{N}$. Så der findes en ikke-tom delmængde T af positive primtal, så

$$n(B) = \prod_{p \in T} p^\infty.$$

Det gælder hermed, at et primtal p går op i $K_0(B)$, hvis og kun hvis $p \in T$.
Dette ses, idet $K_0(\tau) : K_0(B) \mapsto Q(n(B))$ er en gruppeisomorfi, hvor τ er sporet på B, og $K_0(\tau)([1]_0) = 1$, så $1 \in Q(n(B))$. Hvis $p|K_0(B)$ vil $p|Q(n(B))$, så der findes et $h \in Q(n(B))$, så $1 = ph$. Det betyder således, at $\frac{1}{p} \in Q(n(B))$, op p vil altså gå op i $n(B)$. For hvis x og y er naturlige tal med $gcd(x,y) = 1$ og $\frac{x}{y} \in Q(n(B))$, da vil $y|n(B)$. Heraf følger, at $p \in T$, da primtalsfaktoriseringen er entydig.
Omvendt, hvis $p \in T$, da vil $p|Q(n(B))$, og dermed vil $p|K_0(B)$.

Lemma 9.4.2. *Lad A være en separabel C^*-algebra og lad B være en stærkt selv-absorberende UHF-algebra. Da er $A \otimes B$ isomorf med A, hvis og kun hvis $A \otimes M_{p^\infty}$ er isomorf med A for ethvert primtal p, der går op i $K_0(B)$.*

Bevis. Lad T være delmængden af positive primtal, så det supernaturlige tal $n(B)$ associeret til B, er på formen $n(B) = \prod_{p\in T} p^\infty$. Lad p være et positivt primtal, så $p|K_0(B)$. Dvs. $p \in T$ og $B \otimes M_{p^\infty} \cong B$, idet $n(M_{p^\infty}) = p^\infty$. Thi, $n(B \otimes M_{p^\infty}) = n(B)n(M_{p^\infty}) = \prod_{p\in T} p^\infty = n(B)$, hvilket medfører, at $B \otimes M_{p^\infty} \cong B$.
Hvis $A \otimes B \cong A$, da er

$$A \otimes M_{p^\infty} \cong A \otimes B \otimes M_{p^\infty} \cong A \otimes B \cong A.$$

Antag omvendt, at $A \otimes M_{p^\infty} \cong A$ for ethvert primtal p, der går op i $K_0(B)$. Det supernaturlige tal associeret til $\bigotimes_{p\in T} M_{p^\infty}$ er givet ved,

$$n\left(\bigotimes_{p\in T} M_{p^\infty}\right) = \prod_{p\in T} n(M_{p^\infty}) = \prod_{p\in T} p^\infty = n(B),$$

hvilket betyder, at $B \cong \bigotimes_{p\in T} M_{p^\infty}$. Dvs. $A \otimes B \cong A \otimes (\bigotimes_{p\in T} M_{p^\infty})$, og da $A \cong A \otimes M_{p^\infty}$ for alle $p \in T$ fås, at $A \otimes B \cong A$, jvf. Korollar 7.1.8. $\square$

Lemma 9.4.3. *Lad A være en unital og separabel C^*-algebra, og lad B være en stærkt selv-absorberende UHF-algebra. Hvis $A \otimes B$ er isomorf med A, findes for ethvert primtal p der går op i $K_0(B)$, en følge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier, $\varphi_n : M_p(\mathbb{C}) \mapsto A$, så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\| = 0$$

for alle $x \in M_p(\mathbb{C})$ og alle $a \in A$.

Bevis. Antag at $A \otimes B \cong A$. Jvf. Lemma 9.4.2 er $A \otimes M_{p^\infty} \cong A$ for ethvert primtal p, der går op i $K_0(B)$. Lad $(M_{p^\infty}, \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ være den induktive grænse af den induktive følge

$$M_p(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_1} M_{p^2}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_2} M_{p^3}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda_3} \cdots$$

hvor de forbindende *-homomorfier $\lambda_n : M_{p^n}(\mathbb{C}) \mapsto M_{p^{n+1}}(\mathbb{C})$ er unitale.
Sætning 4.3.5 giver eksistensen af en følge $(\rho_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier, $\rho_n : M_{p^\infty} \mapsto M_{p^\infty}$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n(x)y - y\rho_n(x)\| = 0$$

for alle $x, y \in M_{p^\infty}$, da M_{p^∞} er stærkt selv-absorberende.
Sæt nu $\psi_n = (1_A \otimes \mathrm{id}_{M_{p^\infty}}) \circ \rho_n \circ \mu_1 : M_p(\mathbb{C}) \mapsto A \otimes M_{p^\infty}$. For $x \in M_p(\mathbb{C})$ og $a \in A$, $b \in M_{p^\infty}$ fås, at

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(x)(a \otimes b) - (a \otimes b)\psi_n(x)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|((1_A \otimes \mathrm{id}_{M_{p^\infty}})(\rho_n(\mu_1(x)))(a \otimes b) - (a \otimes b)(1_A \otimes \mathrm{id}_{M_{p^\infty}})(\rho_n(\mu_1(x))\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(1_A \otimes \rho_n(\mu_1(x)))(a \otimes b) - (a \otimes b)(1_A \otimes \rho_n(\mu_1(x)))\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|a \otimes \rho_n(\mu_1(x))b - a \otimes b\rho_n(\mu_1(x))\| \\
&= \|a\| \lim_{n\to\infty} \|\rho_n(\mu_1(x))b - b\rho_n(\mu_1(x))\| \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Da $A \odot M_{p^\infty}$ er en tæt delmængde i $A \otimes M_{p^\infty}$ fås hermed, at $\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(x)y - y\psi_n(x)\| = 0$ for alle $x \in M_p(\mathbb{C})$ og alle $y \in A \otimes M_{p^\infty}$.
Lad $\varphi : A \otimes M_{p^\infty} \mapsto A$ være en *-isomorfi. Dermed vil $\varphi_n = \varphi \circ \psi_n : M_p(\mathbb{C}) \mapsto A$ være en følge af unitale *-homomorfier, der opfylder, at

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\| = 0$$

for alle $x \in M_p(\mathbb{C})$ og alle $a \in A$. □

Lemma 9.4.4. *Lad A være en unital C^*-algebra og lad p være et positivt primtal. Antag, at der findes en følge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier, $\varphi_n : M_p(\mathbb{C}) \mapsto A$ så*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\| = 0$$

for alle $x \in M_p(\mathbb{C})$ og alle $a \in A$. Da vil p gå op i $K_0(A)$ og p vil gå op i $K_1(A)$.

Bevis. Lad $(e_{ij})_{i,j=1}^p$ være matrixenhederne for $M_p(\mathbb{C})$ og definer $E_n : A \mapsto A$ ved,

$$E_n(a) = p^{-1} \sum_{i,j=1}^{p} \varphi_n(e_{ij})a\varphi_n(e_{ji}), \quad a \in A.$$

Da er E_n en lineær afbildning, og eftersom $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ er en approksimativ central følge af unitale

*-homomorfier fås, at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|E_n(a)-a\| &= \lim_{n\to\infty}\left\|p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})a\varphi_n(e_{ji})-a\right\| \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left\|p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})a\varphi_n(e_{ji})-p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})\varphi_n(e_{ji})a\right\| \\
&\quad+\lim_{n\to\infty}\left\|p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})\varphi_n(e_{ji})a-a\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})\varphi_n(e_{ji})a-a\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{p}\varphi_n(e_{ii})a-a\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\|1_A a-a\| \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9.1}$$

for alle $a \in A$.
For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $E_n(A) \in A \cap \varphi_n(M_p(\mathbb{C}))'$, thi for $r, s \in \{1,\dots,p\}$ gælder, at

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(e_{rs})E_n(a)-E_n(a)\varphi_n(e_{rs}) \\
&= \varphi_n(e_{rs})p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})a\varphi_n(e_{ji})-p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})a\varphi_n(e_{ji})\varphi_n(e_{rs}) \\
&= p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{rs}e_{ij})a\varphi_n(e_{ji})-p^{-1}\sum_{i,j=1}^{p}\varphi_n(e_{ij})a\varphi_n(e_{ji}e_{rs}) \\
&= p^{-1}\sum_{j=1}^{p}\varphi_n(e_{rj})a\varphi_n(e_{js})-p^{-1}\sum_{j=1}^{p}\varphi_n(e_{rj})a\varphi_n(e_{js}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

for alle $a \in A$. Så da φ_n er lineær fås, at $E_n(A) \in A \cap \varphi_n(M_p(\mathbb{C}))'$.

Lad nu f være en projektion i A. Vi vil først finde $h \in K_0(A)$, så $[f]_0 = ph$.
For ethvert $\delta > 0$ findes jvf. (9.1) et $n \in \mathbb{N}$, så $\|E_n(f)-f\| < \delta$, og da $A\cap\varphi_n(M_p(\mathbb{C}))'$ er en del-C^*-algebra af A fås af [MRL, Exercise 2.7] eksistensen af en projektion $f' \in A \cap \varphi_n(M_p(\mathbb{C}))'$, så $\|f-f'\| < 1$. [MRL, Proposition 2.2.4] giver, at $f \sim f'$, hvilket medfører, at $[f]_0 = [f']_0$.
Vi kan altså uden tab af generalitet antage, at $f \in \varphi_n(M_p(\mathbb{C}))'$.

Sæt

$$f_i = \varphi_n(e_{ii})f \quad \text{for } i = 1,\dots,p.$$

Hermed er f_i en projektion i A, da f kommuterer med $\varphi_n(e_{ii})$. Endvidere er f_i og f_j indbyrdes ækvivalente projektioner for $i \neq j$, idet $e_{ii} = e_{ij}e_{ij}^*$ og $e_{jj} = e_{ij}^*e_{ij}$, hvilket betyder, at

$$f_i = (\varphi_n(e_{ij})f)(\varphi_n(e_{ij})f)^* \quad \text{og} \quad f_j = (\varphi_n(e_{ij})f)^*(\varphi_n(e_{ij})f).$$

Så $[f_j]_0 = [f_i]_0$ for alle $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ og $f = \sum_{i=1}^p f_i$, da φ_n er unital. Eftersom f_i og f_j er indbyrdes orthogonale projektioner for $i \neq j$, er $h = [f_1]_0$ et element i $K_0(A)$, der opfylder, at $[f]_0 = ph$.

Hvis $f \in \mathcal{P}_m(A)$ for et vikårligt $m \in \mathbb{N}$, fås også eksistensen af $h \in K_0(A)$, så $[f]_0 = ph$. Beviset følger af det allerede viste, idet vi udvider $E_n : A \mapsto A$ til den lineære afbildning $E_n^{(m)} : M_m(A) \mapsto M_m(A)$ givet ved,

$$E_n^{(m)}((a_{ij})_{i,j=1}^m) = (E_n(a_{ij}))_{i,j=1}^m, \quad (a_{ij})_{i,j=1}^m \in M_m(A).$$

Da vil $E_n^{(m)}$ opfylde, at $\lim_{n\to\infty} \|E_n^{(m)}(x) - x\| = 0$ for alle $x \in M_m(A)$ og $E_n^{(m)} \in M_m(A) \cap \varphi_n^{(m)}(M_{mp}(\mathbb{C}))'$, hvor $\varphi_n^{(m)} : M_m(M_p(\mathbb{C})) \mapsto M_m(A)$ er *-homomorfien givet ved,

$$\varphi_n^{(m)}((c_{ij})_{i,j=1}^m) = (\varphi_n(c_{ij}))_{i,j=1}^m, \quad (c_{ij})_{i,j=1}^m \in M_m(M_p(\mathbb{C})).$$

Samme argument som ovenfor giver, at vi for hvert $m \in \mathbb{N}$ og for hvert $f \in \mathcal{P}_m(A)$ kan finde $h \in K_0(A)$, så $[f]_0 = ph$, og da $K_0(A) = \{[q_1]_0 - [q_2]_0 : q_1, q_2 \in \mathcal{P}_m(A), m \in \mathbb{N}\}$ følger det ønskede.

Lad nu u være et unitært element i A. Samme argument som før og [MRL, Exercise 2.8] giver eksistensen af et $n \in \mathbb{N}$ og en unitær $u' \in A \cap \varphi_n(M_p(\mathbb{C}))'$, så $\|u - u'\| < 2$. [MRL, Lemma 2.1.3] giver hermed, at $u \sim_h u'$, hviket betyder, at $[u]_1 = [u']_1$, så vi kan vælge $u \in \varphi_n(M_p(\mathbb{C}))'$.

For $i = 1, \ldots, p$ sættes

$$u_i = \varphi_n(e_{ii})u + (1_A - \varphi_n(e_{ii})).$$

Da u kommuterer med $\varphi_n(e_{ii})$, og u er unitær fås, at u_i er unitær for alle $i = 1, \ldots, p$. Endvidere er

$$u = \sum_{i=1}^p \varphi_n(e_{ii})u = u_1 u_2 \cdots u_p.$$

Antag $i \neq j$ for $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. Vi vil vise, at $[u_i]_1 = [u_j]_1$:
Sæt $w = \varphi_n(e_{ij}) + \varphi_n(e_{ji}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk})$. Da er

$$\begin{aligned}
wu_iw^* &= \left(\varphi_n(e_{ij}) + \varphi_n(e_{ji}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk})\right)(\varphi_n(e_{ii})u + (1_A - \varphi_n(e_{ii}))) \\
&\quad \cdot \left(\varphi_n(e_{ji}) + \varphi_n(e_{ij}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk})\right) \\
&= \left(\varphi_n(e_{ij}) + \varphi_n(e_{ji})u + \varphi_n(e_{ji}) - \varphi_n(e_{ji}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk})\right) \\
&\quad \cdot \left(\varphi_n(e_{ji}) + \varphi_n(e_{ij}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk})\right) \\
&= \varphi_n(e_{ii}) + \varphi_n(e_{jj})u + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk}) \\
&= \varphi_n(e_{jj})u + (1_A - \varphi_n(e_{jj})) \\
&= u_j.
\end{aligned}$$

Endvidere gælder,

$$\begin{aligned} w^2 &= \Big(\varphi_n(e_{ij}) + \varphi_n(e_{ji}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk})\Big)\Big(\varphi_n(e_{ij}) + \varphi_n(e_{ji}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk})\Big) \\ &= \varphi_n(e_{ii}) + \varphi_n(e_{jj}) + \sum_{k\neq i,j} \varphi_n(e_{kk}) \\ &= 1_A. \end{aligned}$$

Så da w er selvadjungeret, er w unitær. Dvs. $[u_j]_1 = [wu_iw^*]_1 = [u_i]_1$. Heraf fås,

$$[u]_1 = [u_1u_2\cdots u_p]_1 = \sum_{i=1}^{p}[u_i]_1 = p[u_1]_1.$$

Samme argument som før giver, at vi for hvert $m \in \mathbb{N}$ og for enhver unitær $u \in \mathcal{U}_m(A)$ kan finde $g \in K_1(A)$, så $u = pg$. Så da $K_1(A) = \{[u]_1 : u \in \mathcal{U}_\infty(A)\}$ fås det ønskede. □

Sætning 9.4.5. *Lad A være en unital og separabel C^*-algebra og lad B være en stærkt selvabsorberende UHF algebra. Hvis $A \otimes B$ er isomorf med A, så vil der for ethvert primtal p, der går op i $K_0(B)$ gælde, at $p|K_0(A)$ og $p|K_1(A)$.*

Bevis. Hvis $A \otimes B$ er isomorf med A, vil der for ethvert primtal p, der går op i $K_0(B)$ findes en følge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ af unitale *-homomorfier, $\varphi_n : M_p(\mathbb{C}) \mapsto A$, så

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(x)a - a\varphi_n(x)\| = 0$$

for alle $x \in M_p(\mathbb{C})$ og alle $a \in A$ jvf. Lemma 9.4.3. Lemma 9.4.4 giver nu, at $p|K_0(A)$ og $p|K_1(A)$. □

Eksempel 9.4.6. [2] Lad H være et uendeligt dimensionalt separabelt Hilbertrum med orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. En operator $T \in B(H)$, der opfylder, at $Te_n = \alpha_n e_{n+1}$ for en begrænset følge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ af komplekse tal kaldes et vægtet skift. Hvis der findes et $p \in \mathbb{N}$, så $\alpha_{n+p} = \alpha_n$ for alle n, siges T at have periode p.

Lad $\mathcal{K}$ være de kompakte operatorer på H og lad $\pi : B(H) \mapsto B(H)/\mathcal{K}$ være kvotientafbildningen. Bunce-Deddens algebraen $\mathcal{B}$ af type 2^∞ er defineret til at være del-C^*-algebraen af $B(H)/\mathcal{K}$, der er frembragt af elementerne $\pi(T)$, hvor T er et vægtet skift med periode 2^k for et naturligt tal k. Bunce og Deddens viser, at $\mathcal{B}$ er isomorf med den induktive grænse af den induktive følge

$$C(\mathbb{T}) \xrightarrow{\varphi_1} M_2(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{\varphi_2} M_4(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{\varphi_3} M_8(C(\mathbb{T})) \longrightarrow \cdots,$$

hvor de forbindende *-homomorfier φ_n er givet ved

$$\varphi_1(u) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_n = \varphi_1 \otimes \mathrm{id}_{M_{2^n}(\mathbb{C})}$$

hvor u er frembringeren for $C(\mathbb{T})$ givet ved $u(z) = z$.

[2][Rør02, Example 3.2.11]

For alle $k \in \mathbb{N}$ er $K_0(M_{2^k}(C(\mathbb{T}))) \cong \mathbb{Z}$ og $K_1(M_{2^k}(C(\mathbb{T}))) \cong \mathbb{Z}$ jvf. [MRL, Table of K-groups]. Så $K_0(\mathcal{B})$ er isomorf med den induktive grænse af

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{K_0(\varphi_1)} \mathbb{Z} \xrightarrow{K_0(\varphi_2)} \mathbb{Z} \xrightarrow{K_0(\varphi_3)} \cdots$$

Lad $\dim : K_0(C(\mathbb{T})) \mapsto \mathbb{Z}$ være den surjektive gruppehomomorfi, der opfylder, at

$$\dim([p]_0) = \operatorname{Tr}(p(x)), \quad p \in \mathcal{P}_\infty(C(\mathbb{T})),$$

hvor x er et vilkårligt element i $\mathbb{T}$, og Tr er standard-sporet på $M_n(\mathbb{C})$, [MRL, Example 3.3.5]. Heraf fås flg. kort eksakte følge, hvor ι er inklusionsafbildningen:

$$0 \longrightarrow \ker(\dim) \xrightarrow{\iota} K_0(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{\dim} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Så $K_0(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z} \oplus \ker(\dim)$. Men $K_0(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$, hvilket medfører, at $\ker(\dim) = \{0\}$. Altså er dim en gruppeisomorfi.

For hvert $n \in \mathbb{N}$ er

$$\dim\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}\right]_0\right) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} = 1$$

så $[1]_0$ er frembringer for $K_0(C(\mathbb{T}))$, da $\mathbb{Z} \cong K_0(C(\mathbb{T}))$ og $\mathbb{Z}$ er frembragt af $\{\pm 1\}$.

Lad $\lambda : C(\mathbb{T}) \mapsto M_n(C(\mathbb{T}))$ være givet ved,

$$\lambda(f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}, \quad f \in C(\mathbb{T}).$$

Da er $K_0(\lambda) : K_0(C(\mathbb{T})) \mapsto K_0(M_n(C(\mathbb{T})))$ en gruppe-isomorfi, så da $[1]_0$ frembringer $K_0(C(\mathbb{T}))$ er $K_0(\lambda)([1]_0) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}\right]_0$ en frembringer $K_0(M_n(C(\mathbb{T})))$. Det gælder, at

$$\begin{aligned}
K_0(\varphi_{n+1})\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{2^n-1} \end{pmatrix}\right]_0 &= \left[\varphi_{n+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{2^n-1} \end{pmatrix}\right]_0 \\
&= \left[\begin{pmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(0) \\ \varphi_1(0) & (\varphi_1(0))_{2^n-1} \end{pmatrix}\right]_0 \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]_0 \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]_0 + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]_0 \\
&= 2\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right]_0 .
\end{aligned}$$

Dvs. $K_0(\varphi_{n+1}) : K_0(M_{2^n}(C(\mathbb{T}))) \mapsto K_0(M_{2^{n+1}}(C(\mathbb{T})))$ afbilder en frembringer for $K_0(M_{2^n}(C(\mathbb{T})))$ i 2 gange en frembringer for $K_0(M_{2^{n+1}}(C(\mathbb{T})))$, så $K_0(\mathcal{B})$ er isomorf med den induktive grænse af

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots, \tag{9.2}$$

hvor $n : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ er afbildningen givet ved, $n(1) = n$. Dvs.

$$K_0(\mathcal{B}) \cong \mathbb{Z}[1/2] = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

For lad $(G, \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ være den induktive grænse af (9.2). Definer $\lambda_n : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}[1/2]$ ved $\lambda_n(k) = \frac{k}{2^n}$. Vi vil vise, at $(\mathbb{Z}[1/2], \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ er isomorf med $(G, \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Der gælder, at

$$(\lambda_{n+1} \circ 2)(k) = \lambda_{n+1}(2k) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \lambda_n(k),$$

så diagrammet

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[rr, "2"] \arrow[dr, "\lambda_n"'] & & \mathbb{Z} \arrow[dl, "\lambda_{n+1}"] \\ & \mathbb{Z}[1/2] & \end{tikzcd}$$

kommuterer. Hermed findes en gruppehomomorfi $\lambda : G \mapsto \mathbb{Z}[1/2]$ så følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ G \arrow[rr, "\lambda"] & & \mathbb{Z}[1/2] \end{tikzcd}$$

Men $\ker(\lambda_n) = \{0\} \subseteq \ker(\mu_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}[1/2] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{Z}}{2^n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathbb{Z})$. [MRL, Proposition 6.2.5] giver hermed, at λ er en gruppe-isomorfi.

Ligeledes er $K_1(\mathcal{B})$ isomorf med den induktive grænse af den induktive følge

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{K_1(\varphi_1)} \mathbb{Z} \xrightarrow{K_1(\varphi_2)} \mathbb{Z} \xrightarrow{K_1(\varphi_3)} \cdots$$

Lad $\lambda : C(\mathbb{T}) \mapsto M_n(C(\mathbb{T}))$ være givet som før. Da er $K_1(\lambda) : K_1(C(\mathbb{T})) \mapsto K_1(M_n(C(\mathbb{T})))$ en gruppe-isomorfi, så da $[u]_1$ er en frembringer for $K_1(C(\mathbb{T}))$, er $K_1(\lambda)([u]_1)$ en frembringer for $K_1(M_n(C(\mathbb{T})))$. Jvf. [MRL, Exercise 8.5] gælder, at

$$\begin{aligned} K_1(\lambda)([u]_1) &= [\lambda(u) + 1_{M_n(C(\mathbb{T}))} - \lambda(1)]_1 \\ &= \left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} \right]_1 \\ &= \left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \right]_1 . \end{aligned}$$

Så for hvert $n \in \mathbb{N}$ er $\left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}\right]_1$ en frembringer for $K_1(M_n(C(\mathbb{T})))$. Det gælder, at

$$\begin{aligned}
K_1(\varphi_{n+1})\left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{2^n-1} \end{pmatrix}\right]_1 &= \left[\varphi_{n+1}\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_1(0) \\ \varphi_1(0) & (\varphi_1(1))_{2^n-1} \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]_1 + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]_1 + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]_1
\end{aligned}$$

Dvs. at $K_1(\varphi_{n+1}) : K_1(M_{2^n}(C(\mathbb{T}))) \mapsto K_1(M_{2^{n+1}}(C(\mathbb{T})))$ afbilder en frembringer for $K_1(M_{2^n}(C(\mathbb{T})))$ i en frembringer for $K_1(M_{2^{n+1}}(C(\mathbb{T})))$. Hermed er $K_1(\mathcal{B})$ isomorf med den induktive grænse af den induktive følge,

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \cdots$$

Et lignende argument som ovenfor giver, at $K_1(\mathcal{B}) \cong \mathbb{Z}$.

Betragt nu M_{2^∞}, UHF-algebraen af type 2^∞. Jvf. Sætning 9.4.5 er $\mathcal{B} \otimes M_{2^\infty}$ *ikke* isomorf med $\mathcal{B}$, idet 2 ikke går op i $K_1(\mathcal{B})$.

Bilag A

Appendix

A.1 Grænse-algebraer

Dette afsnit omhandler resultater vedrørende grænse-algebraer, og tager udgangspunkt i [MRL, Kap. 6.1] og [Rør02, Kap. 6.2]. Når A er en C^*-algebra, skal vi først definere C^*-algebraen $(A)_\infty$. Derefter fortsættes med en introduktion til filtre på $\mathbb{N}$ samt konvergens langs filtre, som også indeholder et par konkrete eksempler. Til sidst vil vi definere C^*-algebraen A_ω, når ω er et filter på $\mathbb{N}$. Denne gennemgang vil endvidere indeholde nogle vigtige lemmaer, som bruges i de øvrige kapitler i specialet.

A.1.1 C^*-algebraen $(A)_\infty$

Til en familie af C^*-algebraer $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ knyttes produktet $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$, der er mængden af alle funktioner $a : \mathbb{I} \mapsto \bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i$ for hvilke $a(i)$ tilhører A_i for alle $i \in \mathbb{I}$, og hvor

$$\|a\| = \sup\{\|a(i)\|_{A_i} : i \in \mathbb{I}\}$$

er endelig. Ofte skrives $(a_i)_{i\in\mathbb{I}}$ for elementet $a \in \prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ med $a(i) = a_i$. Når $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ udstyres med addition, multiplikation, skalarmultiplikation og involution ved at udføre disse operationer koordinatvis bliver $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ en C^*-algebra.
Lad $\sum_{i\in\mathbb{I}} A_i$ være afslutningen af mængden

$$J = \left\{ a \in \prod_{i\in\mathbb{I}} A_i : a(i) \neq 0 \text{ for højst endeligt mange } i \in \mathbb{I} \right\}.$$

Da er $\sum_{i\in\mathbb{I}} A_i$ et lukket to-sidet ideal i $\prod_{i\in\mathbb{I}} A_i$ og dermed en C^*-algebra.

Lad $\pi : \prod_{i\in\mathbb{I}} A_i \mapsto \prod_{i\in\mathbb{I}} A_i / \sum_{i\in\mathbb{I}} A_i$ være kvotientafbildningen. Hvis $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ og $(A_n)_{n=1}^\infty$ er en følge af C^*-algebraer, og $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er et element i $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$, da er

$$\|\pi(a)\| = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|. \tag{A.1}$$

Specielt vil $a \in \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$, hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$.

Definition A.1.1. For enhver C^*-algebra A knyttes to nye C^*-algebraer $l^\infty(A)$ og $c_0(A)$, idet vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ sætter $A_n = A$ og definerer $l^\infty(A) = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ og $c_0(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dvs.

$$l^\infty(A) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in A,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty\} \quad \text{og}$$
$$c_0(A) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A) : \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0\}.$$

Definition A.1.2. For enhver C^*-algebra A defineres $(A)_\infty$ til at være kvotienten $l^\infty(A)/c_0(A)$. Lad $\pi_\infty : l^\infty(A) \mapsto (A)_\infty$ være kvotientafbildningen, og definer en indlejring $\delta_A : A \mapsto l^\infty(A)$ ved

$$\delta_A(a) = (a, a, a, \dots), \quad a \in A.$$

Bemærk, at i de tilfælde, hvor der indgår flere C^*-algebraer (f.eks. A og B) skal vi med et indeks skelne de to kvotientafbildninger $\pi_\infty^{(A)} : l^\infty(A) \mapsto (A)_\infty$ og $\pi_\infty^{(B)} : l^\infty(B) \mapsto (B)_\infty$.

A.1.2 Filtre

Vi skal nu definere filtre på $\mathbb{N}$ og konvergens af følger langs filtre, som senere skal benyttes til at definere C^*-algebraen A_ω for et filter ω på $\mathbb{N}$ og en C^*-algebra A.

Definition A.1.3. Et filter ω på $\mathbb{N}$ er en familie af delmængder i $\mathbb{N}$, der opfylder, at

(i) $\emptyset \notin \omega$.

(ii) $X \cap Y \in \omega$ for alle $X, Y \in \omega$.

(iii) Hvis $X \subseteq Y$ og $X \in \omega$, så vil $Y \in \omega$.

Definition A.1.4. Lad ω være et filter på $\mathbb{N}$.

(i) ω kaldes et *ultrafilter*, hvis ω er et maksimalt filter. Dvs. ω er et ultrafilter, hvis der ikke findes et filter $\widetilde{\omega}$ på $\mathbb{N}$, så $\omega \subset \widetilde{\omega}$.

(ii) ω kaldes et *frit* filter, hvis $\bigcap_{X\in\omega} X = \emptyset$.

Der gælder følgende lemma:

Lemma A.1.5. *Lad ω være et filter på $\mathbb{N}$. Da er ω et ultrafilter på $\mathbb{N}$, hvis og kun hvis det for enhver delmængde $X \subseteq \mathbb{N}$ gælder, at $X \in \omega$ eller $\mathbb{N} \setminus X \in \omega$.*

Bevis. Antag ω er et filter, så der for enhver delmængde $X \subseteq \mathbb{N}$ gælder, at $X \in \omega$ eller $\mathbb{N} \setminus X \in \omega$, og antag til modstrid, at ω ikke er et ultrafilter. Der findes altså et filter $\widetilde{\omega}$ på $\mathbb{N}$, så $\omega \subset \widetilde{\omega}$ og en mængde $Y \in \widetilde{\omega}$, så $Y \notin \omega$. Dvs. $\mathbb{N} \setminus Y \in \omega$, og dermed vil $\mathbb{N} \setminus Y \in \widetilde{\omega}$. Men så er $\emptyset = (\mathbb{N} \setminus Y) \cap Y \in \widetilde{\omega}$, hvilket strider mod, at $\widetilde{\omega}$ er et filter.

Lad nu ω være et ultrafilter på $\mathbb{N}$ og antag til modstrid, at der findes en delmængde $X \subseteq \mathbb{N}$, så $X \notin \omega$ og $\mathbb{N} \setminus X \notin \omega$.
Lad $\widetilde{\omega}$ være en mængde af delmængder i $\mathbb{N}$ givet ved,

$$\widetilde{\omega} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists B \in \omega : B \cap X \subseteq A\}.$$

Vi skal nu vise, at $\widetilde{\omega}$ er et filter på $\mathbb{N}$, så $\omega \subset \widetilde{\omega}$.
Da $\mathbb{N} \setminus X \notin \omega$ findes ikke $B \in \omega$ så $B \cap X = \emptyset$. Så $\emptyset \notin \widetilde{\omega}$. Lad $Y_1, Y_2 \in \widetilde{\omega}$. Da findes $B_1, B_2 \in \omega$, så $B_1 \cap X \subseteq Y_1$ og $B_2 \cap X \subseteq Y_2$. Hermed er $Y_1 \cap Y_2 \in \widetilde{\omega}$, idet $B_1 \cap B_2 \in \omega$ og $(B_1 \cap B_2) \cap X \subseteq Y_1 \cap Y_2$.
Hvis $Y_1 \subseteq Y_2$ og $Y_1 \in \widetilde{\omega}$, findes $B \in \omega$, så $B \cap X \subseteq Y_1 \subseteq Y_2$, hvilket medfører, at $Y_2 \in \widetilde{\omega}$.
Hermed er vist, at $\widetilde{\omega}$ er et filter.

Lad $A \in \omega$. Dette medfører, at $A \in \widetilde{\omega}$, idet $A \cap X \subseteq A$. Endvidere er ω opadfiltrerende, så $\mathbb{N} \in \omega$. Dvs. $X \in \widetilde{\omega}$, da $X = \mathbb{N} \cap X$.
Der findes altså et filter $\widetilde{\omega}$ på $\mathbb{N}$, så $\omega \subset \widetilde{\omega}$, hvilket strider mod, at ω er et ultrafilter. □

Eksempel A.1.6. For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres $\omega_n = \{X \subseteq \mathbb{N} : n \in X\}$. Det er let at se, at ω_n er et filter på $\mathbb{N}$, og da det for enhver delmængde $X \subseteq \mathbb{N}$ gælder, at $X \in \omega_n$ eller $\mathbb{N} \setminus X \in \omega_n$, er ω_n et ultrafilter.

Lemma A.1.7. *Et ultrafilter ω på $\mathbb{N}$ er frit, hvis og kun hvis $\omega \neq \omega_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Antag først at $\omega = \omega_n$ for et $n \in \mathbb{N}$. Da er $n \in \bigcap_{X \in \omega} X$, hvilket betyder, at ω ikke er et frit filter.
Antag omvendt, at ω ikke er et frit filter. Vi vil vise, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $\omega = \omega_n$.
Pr. antagelse er $\bigcap_{X \in \omega} X \neq \emptyset$, så der findes $n_1, n_2 \in \bigcap_{X \in \omega} X$. Af Lemma A.1.5 fås, at $\{n_1\}, \{n_2\} \in \omega$, da ω er et ultrafilter. Dvs. $n_1 = n_2$, idet $\{n_1\} \cap \{n_2\} \in \omega$, hvilket betyder, at $\{n_1\} \cap \{n_2\} \neq \emptyset$.
Altså findes præcist ét $n \in \mathbb{N}$, så $\bigcap_{X \in \omega} = \{n\}$. Lad nu $X \in \omega_n$. Dermed er enten $X \in \omega$ eller $\mathbb{N} \setminus X \in \omega$ jvf. Lemma A.1.5. Men hvis $\mathbb{N} \setminus X \in \omega$, så er $n \notin \bigcap_{X \in \omega} X$, hvilket strider mod det lige viste. Dvs. $X \in \omega$, så $\omega_n \subseteq \omega$, og det ønskede er vist, da ω_n er et ultrafilter. □

Eksempel A.1.8. Lad $\omega = \{X \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus X \text{ er endelig}\}$. Det er let at tjekke, at ω er et filter på $\mathbb{N}$, som kaldes filtret af alle co-endelige delmængder i $\mathbb{N}$. Da $\bigcap_{X \in \omega} X = \emptyset$ er ω et frit filter, men ikke noget ultrafilter. For hvis X er delmængden af $\mathbb{N}$ bestående af alle lige tal, da vil hverken X eller $\mathbb{N} \setminus X$ tilhøre ω. Så Lemma A.1.5 giver, at ω ikke er et ultrafilter.

Lemma A.1.9. *Ethvert filter på $\mathbb{N}$ er indeholdt i et ultrafilter på $\mathbb{N}$.*

Bevis. Lad $\widetilde{\omega}$ være et filter på $\mathbb{N}$.
Sæt $E = \{\omega : \omega \text{ er et filter på } \mathbb{N}, \widetilde{\omega} \subseteq \omega\}$, og lad E være partielt ordnet mht. inklusion. Vi vil hjælp af Zorns Lemma vise, at E indeholder et maksimalt element. Da $\widetilde{\omega} \in E$ er $E \neq \emptyset$. Lad Ω være en totalt ordnet delmængde i E og sæt $\omega_\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega$. Dvs. $\widetilde{\omega} \subseteq \omega_\Omega$ og $\emptyset \notin \omega_\Omega$, idet $\emptyset \notin \omega$ for $\omega \in \Omega$. Lad $X, Y \in \omega_\Omega$. Da findes $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, så $X \in \omega_1$ og $Y \in \omega_2$. Vi kan uden tab af generalitet antage, at $\omega_1 \subseteq \omega_2$, da Ω er totalt ordnet. Så $X, Y \in \omega_2$, hvilket medfører, at $X \cap Y \in \omega_2 \subseteq \omega_\Omega$. Hvis $X \subseteq Y$ og $X \in \omega_\Omega$ findes $\omega \in \Omega$, så $X \in \omega$. Dvs. $Y \in \omega \subseteq \omega_\Omega$.
Dermed er ω_Ω et filter på $\mathbb{N}$, som er en majorant for E, og Zorns lemma giver nu, at E har et maksimalt element. □

Vi skal nu definere konvergens af følger langs filtre.

Definition A.1.10. Lad ω være et filter på $\mathbb{N}$. En følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ af komplekse tal siges at konvergere mod x_0 langs ω, skrevet

$$\lim_{\omega} x_n = x_0,$$

hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $X \in \omega$, så $|x_n - x_0| < \varepsilon$ for alle $n \in X$.

Eksempel A.1.11. Lad ω være filtret af alle co-endelige delmængder i $\mathbb{N}$. Da er

$$\lim_{\omega} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

for alle konvergente følger $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ af komplekse tal.

Bevis. Antag $\lim_{\omega} = x_0$. For ethvert $\varepsilon > 0$ findes hermed $X \in \omega$, så $|x_n - x_0| < \varepsilon$ for alle $n \in X$. Mængden $\mathbb{N} \setminus X$ er endelig. Så sæt $N = \max(\mathbb{N} \setminus X) + 1$. For $n \geq N$ gælder, at $n \in X$, hvilket medfører, at $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Dvs. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Antag omvendt, at $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. For ethvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så $|x_n - x_0| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Sæt $X = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Da vil $X \in \omega$ og for alle $n \in X$ er $|x_n - x_0| < \varepsilon$, så $\lim_{\omega} x_n = x_0$. □

Definition A.1.12. For ethvert filter ω på $\mathbb{N}$ og for enhver følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ af reelle tal defineres

$$\limsup_{\omega} x_n = \inf_{X\in\omega} \sup_{n\in X} x_n.$$

A.1.3 C^*-algebraen A_ω

Vi kan nu generalisere begrebet grænsealgebra for en C^*-algebra A til også at omfatte $c_\omega(A)$ og A_ω, når ω er et filter på $\mathbb{N}$.

Definition A.1.13. Lad A være en C^*-algebra, og lad ω være et filter på $\mathbb{N}$. Da er $c_\omega(A)$ idealet i $l^\infty(A)$ givet ved,

$$c_\omega(A) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A) : \lim_{\omega} \|a_n\| = 0\}.$$

Sæt $A_\omega = l^\infty(A)/c_\omega(A)$ og lad $\pi_\omega : l^\infty(A) \mapsto A_\omega$ være kvotientafbildningen. C^*-algebraen A betrages som en del-C^*-algebra af A_ω, idet afbildningen $\iota_A = \pi_\omega \circ \delta_A$ er en naturlig indlejring af A i A_ω.

Lemma A.1.14. [1] *Lad A være en C^*-algebra og lad ω være et filter på $\mathbb{N}$. For ethvert $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^\infty(A)$ gælder, at*

$$\|\pi_\omega(a)\| = \limsup_{\omega} \|a_n\|.$$

Bevis. Definer en afbildning $\nu : A_\omega \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ved,

$$\nu(\pi_\omega(a)) = \limsup_{\omega} \|a_n\|, \quad a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A).$$

Lad $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A)$ med $\pi_\omega(a) = \pi_\omega(b)$. Dvs. $a - b \in c_\omega(A)$, og dermed er $\lim_{\omega} \|a_n - b_n\| = 0$, hvilket medfører, at $\limsup_{\omega} \|a_n\| = \limsup_{\omega} \|b_n\|$. Så ν er veldefineret.

Man kan nemt tjekke, at ν er en C^*-norm på A_ω, og pga. entydigheden af en fuldstændig C^*-norm må ν være sammenfaldende med den givne fuldstændige C^*-norm på A_ω, der er defineret ved,

$$\|\pi_\omega(a)\| = \inf\{\|a - b\| : b \in c_\omega(A)\}$$

[1] [Rør02, Lemma 6.2.3]

for alle $a \in l^\infty(A)$. Dvs.

$$\|\pi_\omega(a)\| = \nu(\pi_\omega(a)) = \limsup_\omega \|a_n\|.$$

□

Vi skal nu vise et lemma, der omhandler løft af et unitært element i A_ω til et unitært element i $l^\infty(A)$, hvis A er en unital C^*-algebra.

Lemma A.1.15. [2] *Lad A være en unital C^*-algebra. Lad ω være et filter på $\mathbb{N}$ og lad $\pi_\omega : l^\infty(A) \mapsto A_\omega$ være kvotientafbildningen. For ethvert unitært element $u \in A_\omega$ findes et unitært element $v \in l^\infty(A)$, så $u = \pi_\omega(v)$.*

Bevis. Lad u være et unitært element i A_ω. Der findes en følge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(A)$, så $\pi_\omega(a) = u$. Dvs.

$$\begin{aligned}\limsup_\omega \|a_n^* a_n - 1\| &= \|\pi_\omega((a_n^*a_n - 1)_{n\in\mathbb{N}})\| \\ &= \|\pi_\omega((a_n^*)_{n\in\mathbb{N}})\pi_\omega((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) - \pi_\omega(1,1,\dots)\| \\ &= \|u^*u - 1\| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Analogt er $\lim_\omega \sup \|a_n a_n^* - 1\| = 0$. Heraf findes en ikke tom delmængde $X \subseteq \omega$, så $\|a_n^* a_n - 1\| < 1$ og $\|a_n a_n^* - 1\| < 1$ for alle $n \in X$. Dvs. $a_n^* a_n$ og $a_n a_n^*$ er invertible for alle $n \in X$, hvilket er ækvivalent med, at a_n er invertibel for alle $n \in X$. Polardekompositionen for invertible elementer giver nu, at

$$a_n = v_n |a_n|, \; n \in X,$$

hvor $v_n = a_n |a_n|^{-1}$ er et unitært element i A og $|a_n| = (a_n^* a_n)^{\frac{1}{2}}$. For $n \notin X$ sættes $v_n = 1$, og vi sætter $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Heraf er v et unitært element i $l^\infty(A)$.

For $n \in X$ er

$$\|v_n - a_n\| = \|v_n - v_n|a_n|\| = \|v_n(1 - (a_n^*a_n)^{\frac{1}{2}})\| \leq \|1 - (a_n^*a_n)^{\frac{1}{2}}\|.$$

Da $\sigma(a_n^* a_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ er $g(t) = 1 - \sqrt{t}$ kontinuert for alle $t \in \sigma(a_n^* a_n)$, og $g(1) = 0$. [MRL, Lemma 1.2.5] giver, at $a_n^* a_n \mapsto g(a_n^* a_n)$ er kontinuert. Så da $\lim_\omega \sup \|a_n^* a_n - 1\| = 0$ findes for ethvert $\varepsilon > 0$ et $Y \in \omega$, så

$$\|v_n - a_n\| < \varepsilon,$$

hvis $n \in Y$ og a_n er invertibel.
Sæt $Z = X \cap Y$. Da vil $Z \in \omega$, og for alle $n \in Z$ er $\|v_n - a_n\| < \varepsilon$. Dvs.

$$\|\pi_\omega(v) - u\| = \|\pi_\omega(v - a)\| = \limsup_\omega \|v_n - a_n\| = 0.$$

□

Hvis man skal afgøre om *-homomorfier φ, ψ mellem C^*-algebraer A og B er approksimativt unitært ækvivalente, kan nedenstående lemma være meget anvendeligt.

[2] [Rør02, Lemma 6.2.4]

Lemma A.1.16. [3] *Lad A, B være unitale C^*-algebraer, og lad $\varphi, \psi : A \mapsto B$ være unitale *-homomorfier. Lad ω være et frit filter på $\mathbb{N}$ og lad $\iota : B \mapsto B_\omega$ være givet ved*

$$\iota(b) = (\pi_\omega \circ \delta_B)(b), \quad b \in B.$$

Hvis $\iota \circ \varphi$ er approksimativt unitært ækvivalent med $\iota \circ \psi$ i B_ω, så er φ approksimativt unitært ækvivalent med ψ i B.

Bevis. Lad $\{a_1, \ldots, a_k\}$ være en vilkårlig endelig delmængde i A og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Pr. antagelse findes en unitær $u \in B_\omega$, så

$$\|u(\iota \circ \varphi)(a_j)u^* - (\iota \circ \psi)(a_j)\| < \varepsilon$$

for alle $j = 1, \ldots, k$.
Jvf. Lemma A.1.15 findes et unitært element $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(B)$, så $\pi_\omega(v) = u$. Dvs.

$$\begin{aligned}\limsup_\omega \|v_n\varphi(a_j)v_n^* - \psi(a_j)\| &= \|\pi_\omega((v_n\varphi(a_j)v_n^*)_{n\in\mathbb{N}} - \delta_B(\psi(a_j)))\| \\ &= \|u(\iota \circ \varphi)(a_j)u^* - (\iota \circ \psi)(a_j)\| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

for alle $j = 1, \ldots, k$. Der findes altså $X_1, \ldots, X_k \in \omega$, så $\sup_{n\in X_j} \|v_n\varphi(a_j)v_n^* - \psi(a_j)\| < \varepsilon$. Sæt $X = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_k$. Da vil $X \in \omega$ og $\|v_n\varphi(a_j)v_n^* - \psi(a_j)\| < \varepsilon$ for alle $n \in X$ og alle $j = 1, \ldots, k$. □

A.2 Integraler

I det følgende vil vi introducere integralet af kontinuerte funktioner med værdier i en vilkårlig C^*-algebra, som bliver brugt i beviset for den universelle egenskab af Cuntz-algebraerne. Der gælder følgende sætning:

Sætning A.2.1. [4] *Lad X være et kompakt Hausdorff rum og lad μ være et endeligt Borelmål på X. Lad A være en C^*-algebra og lad $f : X \mapsto A$ være kontinuert. Da findes netop et element $a \in A$, således at*

$$\varphi(a) = \int_X \varphi(f(x))d\mu(x) \quad \text{for alle } \varphi \in A^*.$$

Der gælder endvidere, at $\|a\| \leq \int_X \|f(x)\|d\mu(x)$, og a tilhører mængden

$$S = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j) : n \in \mathbb{N}, \alpha_j \geq 0, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \mu(X), x_j \in X \right\}.$$

Det entydigt bestemte a fundet ovenfor benævnes $\int_X f(x)d\mu(x)$.

Lad nu a være det entydigt bestemte element i A, så $\varphi(a) = \int_X \varphi(f(x))d\mu(x)$. Af sætningen følger umiddelbart, at $\|\int_X f(x)d\mu(x)\| \leq \int_X \|f(x)\|d\mu(x)$. Endvidere gælder de samme intuitive regneregler, som vi kender fra integration af kontinuerte reelle funktioner.

[3] [Rør02, Lemma 6.2.5]
[4] [SJ04, Sætning A.2]

Sætning A.2.2. *Lad $f, g : X \mapsto A$ være kontinuerte. Da er*

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\mu(x) = \alpha \int_X f(x) d\mu(x) + \beta \int_X g(x) d\mu(x)$$

for $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Bevis. Lad $a, b \in A$ være entydigt bestemte, så

$$\varphi(a) = \int_X \varphi(f(x)) d\mu(x) \quad \text{og} \quad \varphi(b) = \int_X \varphi(g(x)) d\mu(x)$$

for alle $\varphi \in A^*$. Lad $c \in A$ være entydigt bestemt, så $\varphi(c) = \int_X \varphi(\alpha f(x) - \beta g(x)) d\mu(x)$ for alle $\varphi \in A^*$. Dvs.

$$\varphi(c) = \alpha \int_X \varphi(f(x)) d\mu(x) - \beta \int_X \varphi(g(x)) d\mu(x) = \alpha\varphi(a) - \beta\varphi(b) = \varphi(\alpha a - \beta b).$$

Pga. entydigheden af c fås, at $c = \alpha a + \beta b$. □

Sætning A.2.3. *Lad $k \in A$ og lad $f : X \mapsto A$ være kontinuert. Da gælder*

$$\int_X k f(x) d\mu(x) = k \int_X f(x) d\mu(x).$$

Bevis. Hvis $k \in A$ og $\varphi \in A^*$ er $k^*\varphi \in A^*$ givet ved,

$$(k^*\varphi)(a) = \varphi(ka), \quad a \in A.$$

Så

$$\varphi\left(k \int_X f(x) d\mu(x)\right) = (k^*\varphi)\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right) = \int_X (k^*\varphi)(f(x)) d\mu(x) = \int_X \varphi(k f(x)) d\mu(x).$$

Dvs. $\int_X k f(x) d\mu(x) = k \int_X f(x) d\mu(x)$. □

A.3 Purely infinite C^*-algebraer

Vi skal først introducere begrebet en purely infinite C^*-algebra, som er defineret ved de tre ækvivalente betingelser i Sætning A.3.3. Herefter gennemgås nogle vigtige egenskaber for purely infinite C^*-algebraer, som vi bl.a. anvender i kapitlet om Cuntz-algebraerne.

Lemma A.3.1. *Lad A være en unital C^*-algebra, lad $p \in A$ være en projektion, så $p \sim 1$, og lad y være et positivt element i A. Da findes $a \in A$, så $y = a^*pa$ og $\|a\| = \|y\|^{\frac{1}{2}}$.*

Bevis. Der findes en partiel isometri $v \in A$, så $1 = v^*v$ og $p = vv^*$. Sæt nu $a = vy^{\frac{1}{2}}$. Da er $a^*pa = y^{\frac{1}{2}}v^*vv^*vy^{\frac{1}{2}} = y$ og $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|y^{\frac{1}{2}}v^*vy^{\frac{1}{2}}\| = \|y\|$. □

Til ethvert positivt element x i en C^*-algebra A og til ethvert positivt reelt tal t defineres $(x-t)_+$ til at være den positive del af det selv-adjungerede element $x - t1$ i A. Elementet $(x-t)_+$ ligger altid i A, da det alternativt kan udtrykkes ved $(x-t)_+ = f_t(x)$, hvor $f_t : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ er den kontinuerte funktion givet ved $f_t(s) = \max\{0, s-t\}$. Bemærk, at $f_t(0) = 0$ og $(x-t)_+ \neq 0$ hvis og kun hvis $0 \leq t < \|x\|$.

Lemma A.3.2. *Lad x være et positivt element i en C^*-algebra A, lad $0 < t < \|x\|$ og lad $p \in (x-t)_+ A (x-t)_+$ være en projektion. Da findes $a \in A$, så $p = a^* x a$ og $\|a\| \leq t^{-\frac{1}{2}}$.*

Bevis. Af kontinuert funktionskalkyle følger, at $(x-t)_+ x (x-t)_+ \geq t(x-t)_+^2$. Dette giver, at $c^* x c \geq t c^* c$ for alle $c \in (x-t)_+ A (x-t)_+$ og dermed også for alle $c \in \overline{(x-t)_+ A (x-t)_+}$. Specielt er $pxp \geq tp$. Så da $\sigma_{pAp}(tp) = \{t\}$ er pxp altså invertibel i pAp, så vi kan danne elementet $h = (pxp)^{-\frac{1}{2}}$. Der gælder, at $\sigma_{pAp}(h) \subseteq [0, t^{-\frac{1}{2}}]$ så $\|h\| \leq t^{-\frac{1}{2}}$. Elementet $a = php$ opfylder det ønskede. □

Sætning A.3.3. *Lad A være en unital C^*-algebra. Da er følgende tre betingelser ækvivalente:*

(i) *For alle $x, y \in A \setminus \{0\}$ findes $a, b \in A$, så $y = axb$.*

(ii) *For alle positive elementer $x, y \in A \setminus \{0\}$ findes $a \in A$, så $y = a^* x a$.*

(iii) *For alle $x \in A \setminus \{0\}$ findes en projektion $p \in \overline{xAx^*}$, så $p \sim 1$.*

Bevis. (i) ⇒ (iii). Der findes $a, b \in A$, så $1 = ax^*xb = cd$, hvor $c = ax^*$ og $d = xb$. Dvs. $(dc)^2 = xbax^*xbax^* = xbax^* = dc$, så dc er en idempotent i $\overline{xAx^*}$. Heraf følger jvf. [MRL, Exercise 3.10, 3.11] at der findes en projektion $p \in \overline{xAx^*}$, så $p \sim 1$.

(iii) ⇒ (ii). For $0 < t < \|x\|$ er $(x-t)_+ \neq 0$, så der findes en projektion $p \in \overline{(x-t)_+ A (x-t)_+}$ så $p \sim 1$. Benyt Lemma A.3.2 til at finde $b \in A$ med $\|b\| \leq t^{-\frac{1}{2}}$ så $p = b^* x b$, og benyt derefter Lemma A.3.1 til at finde $z \in A$ med $z^* p z = y$ og $\|z\| = \|y\|^{\frac{1}{2}}$. Sæt $a = bz$. Da er $y = a^* x a$ og $\|a\| \leq \|b\| \|z\| \leq \|y\|^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}$.

(ii) ⇒ (i). Ved at repræsentere A på et Hilbertrum H kan vi ved hjælp af Polardekompositionen finde en partiel isometri $v \in B(H)$, så $y = v|y|$. Bemærk, at $v|y|^{\frac{1}{2}}$ tilhører A, mens v ikke tilhører A normalt. Jvf. (ii) findes $z \in A$, så $z^* x^* x z = |y|^{\frac{1}{2}}$. Sæt $b = z$ og $a = v|y|^{\frac{1}{2}} z^* x^*$. Dvs. $axb = v|y|^{\frac{1}{2}} z^* x^* x z = v|y|^{\frac{1}{2}} |y|^{\frac{1}{2}} = y$. □

En unital, simpel C^*-algebra A, som opfylder de ækvivalente betingelser ovenfor, og som ikke er isomorf med $\mathbb{C}$ kaldes *purely infinite*.

Vi skal nu gennemgå nogle nyttige egenskaber for purely infinite C^*-algebraer.

Proposition A.3.4. *Lad A være en unital, purely infinite C^*-algebra. Lad x, y være positive elementer i $A \setminus \{0\}$, og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da findes $a \in A$ med $y = a^* x a$ og $\|a\| \leq \left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon$.*

Bevis. I beviset for (iii) ⇒ (ii) skal man blot vælge t tilstrækkeligt tæt på $\|x\|$. □

Definition A.3.5. Lad A være en C^*-algebra. For $p \in \mathcal{P}_n(A)$ og $q \in \mathcal{P}_m(A)$ defineres $p \precsim q$, hvis der findes en projektion $q_0 \in \mathcal{P}_m(A)$, så $p \sim_0 q_0 \leq q$.

Definition A.3.6. En projektion p forskellig fra 0 i en C^*-algebra A kaldes *properly infinite*, hvis der findes parvis orthogonale projektioner $e, f \in A$ så $e \leq p$, $f \leq p$ og $p \sim e \sim f$.

En unital C^*-algebra A kaldes *properly infinite*, hvis 1_A er en properly infinite projektion.

Lemma A.3.7. *Lad A være en unital og purely infinite C^*-algebra. Enhver projektion i A forskellig fra nul er properly infinite.*

Bevis. Ethvert element $x \in A$ kan skrives på formen $x = x_1 + ix_2$, hvor x_1, x_2 er selvadjungerede elementer i A. Hvis $x \in \mathbb{C}1$ vil $x_1, x_2 \in \mathbb{C}1$, så da $A \neq \mathbb{C}1$ findes altså et selvadjungeret element $h \in A$, så $h \notin \mathbb{C}1$.
Antag til modstrid, at $\sigma(h)$ kun består af ét element $\lambda \in \mathbb{R}$. Dvs. $\sigma(h - \lambda 1) = \{0\}$, hvilket betyder, at $\|h - \lambda 1\| = r(h - \lambda 1) = 0$. Heraf er $h = \lambda 1$, hvilket strider mod, at $h \notin \mathbb{C}1$.
Dvs. $\sigma(h)$ indeholder mindst to punkter $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Antag uden tab af generalitet, at $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ og definer funktionerne

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} t, & 0 < t \leq \lambda_1 \\ \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} t + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \lambda_1 < t < \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og

$$g(t) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} t - \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) < t \leq \lambda_2 \\ -\frac{1}{\lambda_1} t + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1}, & \lambda_2 < t < \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Da er $f, g \in C(\sigma(h)), f \neq 0 \neq g$ og $fg = 0$. Sæt $a = f(h)$ og $b = g(h)$. Så er a, b positive elementer i A forskellige fra 0, og $ab = 0$.

Hermed findes projektioner $p_1 \in \overline{aAa}$ og $p_2 \in \overline{bAb}$, så $p_1 \sim 1 \sim p_2$, idet A er purely infinite. Et grænseværdiargument giver, at $p_1 p_2 = 0$, da $ab = 0$. Dvs. 1 er properly infinite.

Lad nu $p \in A$ være en vilkårlig projektion forskellig fra 0. Da A er purely infinite findes en projektion $q \in pAp$, så $q \sim 1$. Dvs. $1 \precsim p$. Heraf fås, jvf. [MRL, Exercise 4.7]

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idet 1 er properly infinite. Men $1 \precsim p$, så $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dermed er $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, hvilket er ensbetydende med af p er properly infinite jvf. [MRL, Exercise 4.7]. □

Definition A.3.8. Lad A være en unital C^*-algebra. Et element $x \in A$ siges at være fuldt, hvis det ikke er indeholdt i noget ægte, lukket, to-sidet ideal i A.

Lemma A.3.9. *Lad A være en unital C^*-algebra. Lad p, q være properly infinite, fulde projektioner i $\mathcal{P}_\infty(A)$. Da er $[p]_0 = [q]_0$, hvis og kun hvis $p \sim_0 q$.*

Bevis. [5] Hvis $p \sim_0 q$ er $[p]_0 = [q]_0$, så vi skal vise, at $p \sim_0 q$, hvis $[p]_0 = [q]_0$.

Der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $q \in \mathcal{P}_n(A)$. Da q er en fuld projektion findes jvf. [MRL, Exercise 4.8] $m \in \mathbb{N}$, så

$$1_n \precsim q \oplus q \oplus \cdots \oplus q \text{ (m summander) } \precsim q,$$

[5] Beviset bygger på [MRL, Exercise 4.9]

da q er properly infinite.
Lad nu e være en vilkårlig projektion i $\mathcal{P}_\infty(A)$ og find $r \in \mathbb{N}$, så $e \in \mathcal{P}_r(A)$. Men 1_r er en fuld projektion i $\mathcal{P}_r(A)$, så der findes jvf. [MRL, Exercise 4.8] $k \in \mathbb{N}$, så

$$e \precsim 1_r \oplus \cdots \oplus 1_r (\text{k summander}) \sim_0 1_n \oplus \cdots \oplus 1_n (\text{k summander}) \precsim q \oplus \cdots \oplus q (\text{k summander}) \precsim q,$$

da q er properly infinite. Så for enhver projektion $e \in \mathcal{P}_\infty(A)$ er $e \precsim q$. Det giver specielt, at $p \precsim q$. [MRL, Exercise 4.7] giver hermed, at der findes en projektion $q_0 \in \mathcal{P}_\infty(A)$, så

$$q \sim_0 p \oplus q_0 \sim_0 q_0 \oplus p.$$

Heraf er $[q]_0 = [q_0]_0 + [p]_0$, hvilket medfører, at $[q_0]_0 = 0$, da $[q]_0 = [p]_0$. Så der findes $r \in \mathcal{P}_\infty(A)$, så $0 \oplus r \sim_0 q_0 \oplus r$. Men p er properly infinite og fuld, så iflg. det lige viste er $r \precsim p$. Dvs. der findes $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_\infty(A)$, så $p = p_1 \oplus p_2$ og $p_1 \sim_0 r$. Dermed er

$$p \sim_0 0 \oplus p = 0 \oplus p_1 \oplus p_2 \sim_0 0 \oplus r \oplus p_2 \sim_0 q_0 \oplus r \oplus p_2 \sim_0 q_0 \oplus p_1 \oplus p_2 = q_0 \oplus p \sim_0 q.$$

□

A.4 Semiprojektive C^*-algebraer

I dette afsnit, der er skrevet at Mikael Rørdam, vil vi gennemgå en sætning, der vedrører løft af en *-homomorfi fra en semiprojektiv C^*-algebra B ind C^*-algebraen A_ω, hvor ω er et frit filter på $\mathbb{N}$. (Sætning A.4.5). Denne sætning benyttes i Kapitel 5.4.

Definition A.4.1. [6] En C^*-algebra B kaldes semiprojektiv, hvis der for enhver C^*-algebra A med idealer $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ og for enhver *-homomorfi $\varphi : B \mapsto A/\overline{\bigcup_{n=1}^\infty I_n}$ findes $m \in \mathbb{N}$ og en *-homomorfi $\overline{\varphi} : B \mapsto A/I_m$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd} & A/I_m \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"] & A/\overline{\bigcup_{n=1}^\infty I_n} \end{tikzcd}$$

kommuterer, hvor $\pi : A/I_m \mapsto A/\overline{\bigcup_{n=1}^\infty I_n}$ er kvotientafbildningen.

Lemma A.4.2. *Lad A være en separabel C^*-algebra, lad $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ være et opadstigende net af idealer i A, og lad I være afslutningen af $\bigcup_\alpha I_\alpha$. Da findes en voksende følge $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots$ i Λ, så*

$$I = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty I_{\alpha_n}}.$$

Bevis. Bemærk først, at

$$\lim_\alpha \|a + I_\alpha\| = \|a + I\|$$

[6][Bla85, Definition 2.10]

for alle $a \in A$. Dette skyldes, at $\alpha \mapsto \|a+I_\alpha\|$ er aftagende og $\|a+I_\alpha\| \geq \|a+I\|$ for alle a, så $\lim_\alpha \|a+I_\alpha\|$ findes og er større end eller lig med $\|a+I\|$. Tag $a \in A$ og $\varepsilon > 0$, og find $x \in I$ så $\|a+x\| = \|a+I\|$. Find $\alpha \in \Lambda$ og $y \in I_\alpha$ så $\|x-y\| < \varepsilon$. Da er $\|a+I_\alpha\| \leq \|a+y\| < \|a+I\|+\varepsilon$.

Tag en tæt følge $\{a_1, a_2, \dots\}$ i A. Benyt at Λ er opadfiltrerende til at finde en voksende følge $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots$ i Λ så

$$\|a_j + I_{\alpha_n}\| \leq \|a_j + I\| + n^{-1}, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Da vil

$$\lim_{n\to\infty} \|a_j + I_{\alpha_n}\| = \|a_j + I\|$$

for alle j, og dermed

$$\lim_{n\to\infty} \|a + I_{\alpha_n}\| = \|a + I\|$$

for alle $a \in A$.

Lad os vise, at $I = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty I_{\alpha_n}}$. Lad $a \in I$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Find n så $\|a + I_{\alpha_n}\| < \varepsilon$. Vi kan da finde $x \in I_{\alpha_n}$ så $\|a - x\| = \|a + I_{\alpha_n}\| < \varepsilon$. □

Lemma A.4.3. *Lad B være en separabel semiprojektiv C^*-algebra. Lad A være en C^*-algebra, lad $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ være et opadstigende net af idealer i A, og lad I være afslutningen af $\bigcup_\alpha I_\alpha$. Lad $\varphi : B \mapsto A/I$ være en *-homomorfi. Da vil φ løfte til en *-homomorfi $\varphi_0 \colon B \mapsto A/I_\alpha$ for et passende $\alpha \in \Lambda$.*

Bevis. Lad $\{b_1, b_2, \dots\}$ være en tæt følge i B. For hvert j vælg $a_j \in A$ så $a_j + I = \varphi(b_j)$, og lad A_0 være den separable del-C^*-algebra af A frembragt af $\{a_1, a_2, \dots\}$. Sæt $I_\alpha^{(0)} = I_\alpha \cap A_0$ og $I^{(0)} = I \cap A_0$. Da er $I_\alpha^{(0)}$ og $I^{(0)}$ idealer i A_0, og $A_0/I_\alpha^{(0)}$ hhv. A_0/I_0 er del-C^*-algebraer af A/I_α og A/I. Endvidere er $\varphi(B)$ indeholdt i A_0/I_0.

Benyt Lemma A.4.2 til at finde en voksende følge $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots$ så

$$I^{(0)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{\alpha_n}^{(0)}}.$$

Da B er semiprojektiv findes n og en *-homomorfi $\psi_0 \colon B \to A_0/I_{\alpha_n}^{(0)}$ som løfter *-homomorfien $\varphi \colon B \mapsto A_0/I^{(0)} \subseteq A/I$. Sammensætningen $\psi \colon A \mapsto A/I_{\alpha_n}$ af ψ_0 med inklusionsafbildningen $A_0/I^{(0)} \subseteq A/I$ er nu som ønsket. □

Lemma A.4.4. *Lad A være en C^*-algebra og lad ω være et frit filter på $\mathbb{N}$. For hvert $X \in \omega$ lad I_X være idealet i $l^\infty(A)$ bestående af alle følger $\{a_n\}$, hvor $a_n = 0$ for alle $n \in X$. Idet ω ordnes ved omvendt inklusion bliver $\{I_X\}_{X\in\omega}$ et opadstigende net af idealer i $l^\infty(A)$, som opfylder*

$$\overline{\bigcup_{X\in\omega} I_X} = I_\omega.$$

Bevis. Det er klart, at $I_X \subseteq I_\omega$ for alle $X \in \omega$. Antag omvendt, at $a = \{a_n\}$ tilhører I_ω. Lad $\varepsilon > 0$. Find $X \in \omega$ så $\|a_n\| \leq \varepsilon$ for alle $n \in X$. Sæt $b_n = a_n$, hvis $n \notin X$ og sæt $b_n = 0$ for $n \in X$. Da vil $b = \{b_n\}$ tilhøre I_X, og $\|a - b\| \leq \varepsilon$. □

Sætning A.4.5. *Lad B være en semiprojektiv separabel C^*-algebra. Lad A være en C^*-algebra, lad ω være et frit filter på $\mathbb{N}$, og lad $\varphi\colon B \mapsto A_\omega$ være en *-homomorfi. Da kan φ løftes til en *-homomorfi $\varphi_0\colon B \mapsto l^\infty(A)$.*

Bevis. De to foregående lemmaer viser, at φ kan løftes til en *-homomorfi $\psi\colon B \mapsto l^\infty(A)/I_X$ for et passende $X \in \omega$. Idet kvotienten $l^\infty(A)/I_X$ naturligt kan identificeres med $l^\infty(\mathbb{N}\setminus X, A)$ kan vi definere *-homomorfien $\lambda\colon l^\infty(A)/I_X \mapsto l^\infty(A)$ ved

$$\lambda\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus X}\big) = (\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \widetilde{a}_n = \begin{cases} a_n, & n \notin X, \\ 0, & n \in X \end{cases}$$

som får diagrammet

$$\begin{tikzcd}
& l^\infty(A)/I_X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\pi_X"] & l^\infty(A) \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & A_\omega
\end{tikzcd}$$

til at kommutere (hvor π_X og π er kvotientafbildningerne).

Nu er $\varphi_0 = \lambda \circ \psi$ det ønskede løft. □

Litteratur

[Bla85] Bruce Blackadar, *Shape theory for C^*-algebras*, Mathematica Scandinavica **56** (1985), 249–275.

[Bla04] ______, *Semiprojectivity in simple C^*-algebras*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 38, Math. Soc. Japan, 2004.

[Cun77] Joachim Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, Communications in Mathematical Physics **57** (1977), 173–185.

[ER95] Edward G. Effros and Jonathan Rosenberg, *C^*-algebras with approximately inner flip*, Pacific Journal of Mathematics **77** (1995), 417–443.

[Hes95] Thomas Heshe, *Om Cuntz algebraer og klassifikation af deres induktive grænser*, Speciale, Århus Universitet, 1995.

[JS99] X. Jiang and H. Su, *On a simple unital projectionless C^*-algebra*, American Journal of Mathematics **121** (1999), 359–413.

[KP00] Eberhard Kirchberg and N. Christopher Phillips, *Embedding of exact C^*-algebras in the Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$*, Journal für die reine und angewandte Matematik **525** (2000), 17–53.

[KR86a] Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, vol. 1, Academic Press, London, 1986.

[KR86b] ______, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, vol. 2, Academic Press, London, 1986.

[KR02] Eberhard Kirchberg and Mikael Rørdam, *Infinite non-simple C^*-algebras: Absorbing the Cuntz algebra $\mathcal{O}_\infty$*, Advances in Mathematics **167** (2002), 195–264.

[MRL] F. Larsen M. Rørdam and N.J. Laustsen, *An Introduction to K-theory for C^*-Algebras*, London Mathematical Society Student Texts 49, Cambridge University Press, Cambridge.

[Mur90] Gerad J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, London, 1990.

[Pau86] V.I. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations*, Pitnam Research Notes in Math., vol. 146, Sci. Tech. Harlow, 1986.

[Ped79] Gert K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.

[Rør93] Mikael Rørdam, *Classifikation of inductive limits of Cuntz algebras*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **440** (1993), 175–200.

[Rør02] ______, *Classification of Nuclear C^*-algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, no. 126, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.

[SJ04] Adam Sierakowski and Troels Steenstrup Jensen, *Irrationale og rationale rotations C^*-algebraer*, Bachelorprojekt, Syddansk Universitet Odense, 2004.

[Tak79] Masamichi Takesaki, *Theory of operator algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Scienses, vol. 124, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1979.

[TW05] Andrew S. Toms and Wilhelm Winter, *Strongly self-absorbing C^*-algebras*, arXiv:math.OA/0502211 v2 (2005).

[Was94] Simon Wassermann, *Exact C^*-algebras and related topics*, Lecture Notes Series, vol. 19, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1994.

[Zhu93] Ke He Zhu, *An introduction to operator algebras*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.