Bachelorprojekt
Banach-Tarski Paradokset

Adam P. W. Sørensen (010885)
Vejleder: Mikael Rørdam

31. maj 2007

Abstract

The project is about paradoxical decompositions. First, free groups of rank two are shown to be paradoxical. Then a specific group is shown to be a free group of rank two and its paradoxical decomposition is lifted to a paradoxical decomposition of the unit sphere, thus proving the Hausdorff paradox. Then the concept of equidecomposability is used to move from the Hausdorff paradox to the Banach-Tarski paradox in the form that all solid balls in $\mathbb{R}^3$ are paradoxical. This is used to prove the strong form of the Banach-Tarski paradox, that any two bounded sets with non-empty interior are equidecomposable. From here on the focus is on non-paradoxical groups and sets. Tarskis theorem that a non G-paradoxical set, E, can be equipped with a G-invariant measure normalising E is proved. Then amenable groups, which by Tarskis theorem are the same as the non-paradoxical groups, are considered. It is proved that amenable groups cannot act paradoxically on sets. It is also proved that the isometric groups on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^2$ are amenable. This shows that $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^2$ are not paradoxical. Furthermore, it is shown that if G is an amenable group acting on $\mathbb{R}^n$, then there exists a finite additive G-invariant extension of the Lebesgue measure to all $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. This shows that no bounded subset of $\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}^2$ whith non-empty interior can be paradoxical.

Indhold

1 Indledning

Bachelorprojekt omhandler Banach-Tarski paradokset. Det siger, at en kugle kan deles i endeligt mange stykker, der kan flyttes rund, herved kan der laves to kugler, der begge er ligeså stor som den oprindelige kugle. I første del af bachelorprojektet bliver begrebet paradoksalitet indført. Det giver en formel måde at formulerer Banach-Tarski paradokset på. Først vises nogle generelle resultater om paradoksale grupper og mængder. Herefter findes en konkret gruppe, som er paradoksal. Den bruges til at vise Hausdorff paradokset. Anden del af bachelorprojektet bruges på at vise Banach-Tarski paradokset. Begrebet G-ækvidekomposibilitet indføres og bruges til at gå fra Hausdorff paradokset til Banach-Tarski paradokset. I bachelorprojektets tredje del, såvel som fjerde, ses på generelle resultater om ikke paradoksale mængder og grupper. I tredje del bliver der således indført typesemigruppen og Tarskis sætning bliver vist. Tarskis sætning siger, at hvis X ikke er G-paradoksal, findes for alle $E \subseteq X$ et endeligt additiv G-invariant mål på $\mathcal{P}(X)$ der normaliserer E. I fjerde del ses på amenable grupper. Tarskis sætning viser, at de amenable grupper er mængden af ikke paradoksale grupper. Et interessant resultat fra teorien, om amenable grupper, er at hvis G er en amenabel gruppe af isometrier på $\mathbb{R}^n$, så findes en endeligt additiv G-invariant udvidelse af Lebesgue målet til hele $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Idet det også vises at G_1 er amenabel, giver det at der findes en endelige additiv isometri invariant udvidelse af Lebesgue målet til hele $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Læseren forudsættes at have kendskab til topologi, gruppe teori samt mål og integral teori.

Jeg vil vil gerne takke min vejleder Mikael Rørdam for god vejledning.

2 Paradoksale Grupper og Mængder

Banach-Tarski paradokset siger, at en kugle kan skæres ud i endeligt mange stykker, der kan flyttes og drejes og derved kan man samle to kugler, der hver især er lige så stor, som den man startede med.

For at kunne tale om at flytte mængder på en formel måde, indfører vi gruppe virkning på en mængde.

Definition 2.1. *En gruppe G siges at virke på en mængde X, hvis der til hvert $g \in G$ findes en bijektion, som vi også vil kalde g, fra X til X og bijektionerne opfylder følgende, for alle $x \in X$:*

(i) $e(x) = x$, *hvor e er identitets elementet i G.*

(ii) $(gh)(x) = g(h(x))$, *for alle $g, h \in G$.*

Eksempler på gruppe virkning.

Eksempel 2.2. *Isometrierne fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$, kaldet G_n, er alle afbildninger af formen $x \mapsto Ax + b$, hvor A er en symetrisk $n \times n$ matrix med $\det(A) = \pm 1$ og $b \in \mathbb{R}^n$. Isometrierne på $\mathbb{R}^n$ er en gruppe med funktionssammensætning som gruppe operation og $x \mapsto x$ som identitet. Isometrierne virker på $\mathbb{R}^n$. Undergruppen SO_n der består af afbildninger af formen $x \mapsto Ax$, hvor A er en $n \times n$ matrix med $\det(A) = 1$, vil vi også interesere os for. Det er rotationer på enheds sfæren i $\mathbb{R}^n$. Der gælder, at $SO_n \cong \{A \mid A \text{ er } n \times n \text{ matrix med } \det A = 1\}$ og det er i den form, vi vil se på SO_n.*

Eksempel 2.3. *En gruppe G virker på sig selv med venstre multiplikation, forstået på den måde at vi til hvert $g \in G$ knytter bijektionen $g\colon G \to G$ givet ved $g(h) = gh$.*

Vi vil nu definere, hvad det vil sige at være paradoksal.

Definition 2.4. *Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X og lad $E \subseteq X$. Så bliver E kaldt for G-paradoksal, hvis der findes parvis disjunkte delmængder $A_1, A_2 \dots A_n, B_1, B_2 \dots B_m$ af E og gruppe elementer $g_1, g_2 \dots g_n$, $h_1, h_2 \dots h_m$ i G, så*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j.$$

Nogle gange, vil vi bare skrive X er paradoksal i stedet for X er G-paradoksal, hvis der ikke er tvivl om hvad G er. Ligeleds vil vi nogle gange sige, at G er paradoksal i stedet for at G er G-paradoksal. Med definitionen af paradoksalitet, kan Banach-Tarski paradokset udtrykkes som: Enhver kugle i $\mathbb{R}^3$ er G_3-paradoksal.

Vi vil se på frie grupper. En fri gruppe, F, med genrator mængde M, består af alle reducerede ord i $\{\sigma, \sigma^{-1} \mid \sigma \in M\}$. Et reduceret ord, er et ord $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, der opfylder $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}^{-1}$ for alle $1 \leq i \leq n-1$. Gruppe operationen på F er ord sammensætning, så hvis $w_1, w_2 \in F$, $w_1 = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ og $w_2 = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$, så er w_1w_2 den reducerede form af $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$. Identitets elementet er det tomme ord, e. Vi kalder $|M|$ for F's rang.

Sætning 2.5. *En fri guppe F af rang 2 er paradoksal, når den virker på sig selv med venstre multiplikation.*

Bevis. Lad τ og ρ være generatorer for F. Sæt
$W(\tau)$ = De reducerede ord i F der begynder med τ,
$W(\tau^{-1})$ = De reducerede ord i F der begynder med τ^{-1},
$W(\rho)$ = De reducerede ord i F der begynder med ρ,
$W(\rho^{-1})$ = De reducerede ord i F der begynder med ρ^{-1}.
Så er

$$F = W(\tau) \cup W(\tau^{-1}) \cup W(\rho) \cup W(\rho^{-1}) \cup \{e\},$$

da det eneste reducerede ord i F, der ikke starter med enten τ, τ^{-1}, ρ eller ρ^{-1}, er det tomme ord.

Vi sætter nu $A_1 = W(\tau), A_2 = W(\tau^{-1}), B_1 = W(\rho), B_2 = W(\rho^{-1})$ og $g_1 = e, g_2 = \tau, h_1 = e, h_2 = \rho$. Så er A_1, A_2, B_1 og B_2 parvis disjunkte mængder og

$$F = g_1A_1 \cup g_2A_2 = h_1B_1 \cup h_2B_2.$$

For at vise den første lighed ser vi på et $h \in F$. Der er to muligheder:

- $h \in F \setminus W(\tau)$
  Så vil $\tau^{-1}h \in W(\tau^{-1})$, da h ikke starter med τ, så $\tau^{-1}h$ er et reduceret ord. Vi har så

$$\begin{aligned} g_2(\tau^{-1}h) = \tau(\tau^{-1}h) = h \Rightarrow \\ h \in g_2(W(\tau^{-1})) = g_2A_2. \end{aligned}$$

- $h \in W(\tau)$
  Så har vi

$$h \in W(\tau) = A_1 = eA_1 = g_1A_1.$$

Samlet har vi, at alle $h \in F$ ligger i enten g_1A_1 eller g_2A_2 så $F \subseteq g_1A_1 \cup g_2A_2$. Men så har vi at $F = g_1A_1 \cup g_2A_2$, da g_1A_1 og g_2A_2 er indeholdt i F. På tilsvarende måde fås $F = h_1B_1 \cup h_2B_2$. Så F er paradoksal. $\square$

Grupper som er paradoksale, når de virker på sig selv, spiller en vigtig rolle. Deres paradoksale dekomposition kan bruges til, at give en dekomposition af de mængder gruppen virker på, under passende forudsætninger.

Proposition 2.6. *Hvis G er en G-paradoksal gruppe, der virker på en mængde X uden non-trivielle fixpunkter (dvs for alle $g \in G \setminus \{e\}$ og alle $x \in X$ er $gx \neq x$), så er X G-paradoksal.*

Bevis. Lad $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m \subseteq G$ og $g_1, g_2, \ldots g_n, h_1, h_2, \ldots h_m \in G$ være parvis disjunkte mængder og gruppeelementer, der opfylder $G = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j$. Sådanne findes da G er G-paradoksal. For hvert $x \in X$ betragter vi x's G-bane: $G_x = \{gx \mid g \in G\}$. Lad nu M være en mængde, der indeholder præcist et element fra hver bane. For at lave M bruger vi udvalgsaktiomet. Vi vil nu vise, at $\{gM \mid g \in G\}$ er en klassedeling af X. Først viser vi at $\bigcup_{g \in G} gM = X$. Lad $x \in X$, så findes et $h \in G$ så $hx \in M$, og så vil $x = h^{-1}(hx) \in \bigcup_{g \in G} gM$. Det var for et vilkårligt $x \in X$, så $\bigcup_{g \in G} gM \supseteq X$. Da $M \subseteq X$ er også $\bigcup_{g \in G} gM \subseteq X$, så $\bigcup_{g \in G} gM = X$. For at vise, at $\{gM \mid g \in G\}$ er parvis disjunkte, antager vi, at der findes $g, h \in G$ med $g \neq h$ og $gM \cap hM \neq \emptyset$. Vi vil så nå frem til en modstrid. Vores antagelse giver, at der findes $x, y \in M$ så $gx = hy$. Nu gælder at $x = (g^{-1}h)y$ og dermed $x \in G_y$. Da $y \in G_y$ og M kun indeholder et element fra hver bane, er $x = y$. Dermed er $gx = hx$ og så er $g^{-1}hx = x$ og, da G virker frit på X, følger det at $g = h$. Det er en modstrid og altså er $gM \cap hM = \emptyset$ for $g \neq h$.

Sæt nu:

$$A_i^* = \{gM \mid g \in A_i\}, i = 1, 2, \ldots, n, \quad B_j^* = \{gM \mid g \in B_j\}, j = 1, 2, \ldots, m.$$

De er parvis disjunkte, da $\{gM \mid g \in G\}$ er en klassedeling og $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ er parvis disjunkte. Der gælder at

$$g_i A_i^* = g_i\{gM \mid g \in A_i\} = \{g_i gM \mid g \in A_i\} = \{hM \mid h \in g_i A_i\},$$

så

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A_i^* = \{gM \mid g \in \bigcup_{i=1}^n g_i A_i\} = \{gM \mid g \in G\} = X.$$

Ligeledes ses at

$$\bigcup_{j=1}^m h_j B_j^* = X.$$

Altså er X G-paradoksal. $\square$

Vi ser, at hvis vi har en fri gruppe, F, af rang 2, så giver sætning 2.5 at F er paradoksal. Hvis F virker frit på en mængde, X, giver Proposition 2.6 så, at X er F-paradoksal.

Der gælder en, lidt stærkere, invers til proposition 2.6, der ikke bruger udvalgsaktiomet.

Proposition 2.7. *Hvis G er en gruppe, der virker på en mængde X og X er G-paradoksal, så er G G-paradoksal.*

Bevis. Lad $A_1, A_2, \dots A_n, B_1, B_2 \dots B_m \subseteq X$ og $g_1, g_2, \dots, g_n, h_1, h_2, \dots, h_m \in G$ være parvis disjunkte mængder og gruppeelementer, så $X = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j$. De findes da X er G-paradoksal.

For et fast $x \in X$ sætter vi

$$A_i^* = \{g \mid gx \in A_i\}, i = 1, 2, \dots, n, \quad B_j^* = \{g \mid gx \in B_j\}, j = 1, 2, \dots, m.$$

De er parvis disjunkte mængder, da $A_1, A_2, \dots A_n, B_1, B_2 \dots B_m$ er det. Vi har at

$$g_i A_i^* = \{g_i g \mid gx \in A_i\} = \{h \mid g_i^{-1} hx \in A_i\} = \{h \mid hx \in g_i A_i\},$$

og så får vi at

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A_i^* = \{h \mid hx \in \bigcup_{i=1}^n g_i A_i\} = \{h \mid hx \in X\} = G.$$

På samme måde vises, at

$$\bigcup_{j=1}^m h_i B_i^* = G.$$

Samlet er G G-paradoksal. □

Vi vil nu finde en fri gruppe af rang 2, så vi kan bruge vores sætninger.

Sætning 2.8. *SO_3 har en fri undergruppe af rang 2.*

Bevis. Vi ser på rotationerne

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

der er om henholdsvis z- og x -aksen, alle med vinklen $\arccos \frac{1}{3}$ radianer. Vi vil vise, at de reducerede ord i $\phi^{\pm 1}$ og $\rho^{\pm 1}$ danner en fri gruppe. Vi skal altså vise, at der ikke findes et element i gruppen SO_3, der på to måder kan skrives som et reduceret ord i $\phi^{\pm 1}$ og $\rho^{\pm 1}$. Hvis der fandtes sådan to ord, ville der også findes et ikke tomt reduceret ord, der er lig identiteten som gruppeelement. For hvis w_1, w_2 er to forskellige reducerede ord. der er ens som gruppeelementer, vil den reducerede form af $w_1 w_2^{-1}$ være et ord, der som gruppeelement er identiteten. Den reducerede form af $w_1 w_2^{-1}$ kan ikke ikke være det tomme ord, da w_1 og w_2 er forskellige reducerede ord. Det er altså nok at vise, at der ikke findes noget ikke tomt reduceret ord, der er lig identiteten. Yderligere er det nok at se på ord, som ender på $\phi^{\pm 1}$. Thi hvis $w = w_0 \rho^{\pm 1}$ er et reduceret ord, der virker som identiteten, vil $v = \phi^{-1} w \phi = \phi^{-1} w_0 \rho^{\pm 1} \phi$ være et, ikke nødvendigvis reduceret, ord, der virker som identiteten og ender på ϕ. Sætter vi w_1 til at være den reducerede form af $\phi^{-1} w_0$, er $v' = w_1 \rho^{\pm 1} \phi$ den reducerede form af v, da w_1 ikke kan slutte på $\rho^{\mp 1}$. Altså et ikke tomt ord, der virker som identiteten og slutter på ϕ.

Vi vil vise, at for alle ord w over $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ der slutter på $\phi^{\pm 1}$ gælder:

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},$$

og 3 går ikke op i b. Det giver at $b \neq 0$, som medfører $b\sqrt{2} \neq 0$. Altså er

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

og så er w ikke identiteten, som ønsket. Vi vil vise det ved induktion over w's længde.

Vores basis tilfælde er $w = \phi^{\pm 1}$. Vi har

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3},$$

både 1, 2, -2 og 0 er heltal og 3 går hverken op i 2 eller -2, så for $w = \phi$ og $w = \phi^{-1}$ har vi det ønskede.

I induktions skridtet vil vi i første omgang vise, at hvis w er et ord i $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ så er

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},$$

men ikke noget om hvorvidt 3 går op i b. Antag at det gælder for ord af længde n, og lad w være et ord af længde $n+1$. Vi ser på de to tilfælde $w = \phi^{\pm 1} v$ og $w = \rho^{\pm 1} v$, hvor v er et reduceret ord af længde n.

For $w = \phi^{\pm 1} v$ har vi

$$\begin{aligned} w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \phi^{\pm 1} v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi^{\pm 1} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k} = \begin{pmatrix} a \mp 4b \\ (b \pm 2a)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}}. \end{aligned}$$

Da $a, b, c \in \mathbb{Z}$ vil $a \mp 4b \in \mathbb{Z}$, $b \pm 2a \in \mathbb{Z}$ og $3c \in \mathbb{Z}$, som ønsket.

For $w = \rho^{\pm 1} v$ har vi

$$\begin{aligned} w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \rho^{\pm 1} v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho^{\pm 1} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, k \in N \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k} = \begin{pmatrix} 3a \\ (b \mp 2c)\sqrt{2} \\ c \pm 4b \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}}, \end{aligned}$$

og $3a \in \mathbb{Z}$, $b \mp 2c \in \mathbb{Z}$ og $c \pm 4b \in \mathbb{Z}$.

Samlet har vi vist, at for et vilkårligt reduceret ord, w, i $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ gælder at

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k},$$

hvor $a, b, c \in Z$ og $k \in \mathbb{N}$.

For at vise at 3 ikke går op b ser vi på seks tilfælde:

(i) $w = \phi^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v'$.

(ii) $w = \phi^{\pm 1} \rho^{\pm 1} v'$.

(iii) $w = \phi^{\pm 1} \rho^{\mp 1} v'$.

(iv) $w = \rho^{\pm 1} \rho^{\pm 1} v'$.

(v) $w = \rho^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v'$.

(vi) $w = \rho^{\pm 1} \phi^{\mp 1} v'$.

Hvor v' er et, muligvis tomt, reduceret ord over $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$. Vi vil kun vise (i) og (v), de andre følger på en tilsvarende måde.

(i) $w = \phi^{\pm 1}\phi^{\pm 1}v'$

Vores induktionsantagelse er, at 3 ikke går op i den anden indgang i vektoren $\phi^{\pm 1}v'(1,0,0)$. Vi har

$$v' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, k \in N,$$

hvis $v' = e$ er $a = 3, b = 0, c = 0, k = 1$, ellers følger det af det foregående. Det giver at

$$\phi^{\pm 1}v' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi^{\pm 1} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k} = \begin{pmatrix} a \mp 4b \\ (b \pm 2a)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}},$$

hvor $3 \nmid (b \pm 2a)$ per induktions antagelse. Nu har vi

$$\begin{aligned} w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \mp 4b \\ (b \pm 2a)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}} \\ &= \begin{pmatrix} a \mp 4b \mp 4(b \pm 2a) \\ (\pm 2(a \mp 4b) + b \pm 2a)\sqrt{2} \\ 9c \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+2}}. \end{aligned}$$

Hvis vi med $\equiv_3$ betegner ækvivalens modulo 3, gælder

$$\begin{aligned} \pm 2(a \mp 4b) + b \pm 2a &\equiv_3 \pm 2a - 8b + b \pm 2a \equiv_3 \pm 4a - 7b \\ &\equiv_3 \pm 4a - 7b + 2b - 2b \equiv_3 2(b \pm 2a) - 9b \\ &\equiv_3 2(b \pm 2a) \not\equiv_3 0, \end{aligned}$$

det sidste gælder da $\mathbb{Z}_3$ er et legeme. Altså $3 \nmid (\pm 2(a \mp 4b) + b \pm 2a)$, som ønsket.

(v) $w = \rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1}v'$

Igen er induktionsantagelsen, at 3 ikke går op i den anden indgang i vektoren $\phi^{\pm 1}v'(1,0,0)$, og igen får vi:

$$v' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N},$$

og

$$\phi^{\pm 1} v' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{3^k} = \begin{pmatrix} a \mp 4b \\ (b \pm 2a)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}}.$$

Per induktions antagelse vil $3 \not| (b \pm 2a)$. Videre har vi

$$\begin{aligned} w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \mp 4b \\ (b \pm 2a)\sqrt{2} \\ 3c \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}} \\ &= \begin{pmatrix} 3(a \mp 4b) \\ ((b \pm 2a) \mp 6c)\sqrt{2} \\ \pm 4(b \pm 2a) + 3c \end{pmatrix} \frac{1}{3^{k+2}}, \end{aligned}$$

og

$$(b \pm 2a) \mp 6c \equiv_3 b \pm 2a.$$

Så $3 \not| ((b \pm 2a) \mp 6c)$, som ønsket. $\square$

Vi kan nu vise Hausdorff paradokset.

Sætning 2.9 (Hausdorff Paradokset)**.** *Der findes en tællelig mængde $D \subseteq S^2$ så $S^2 \setminus D$ er SO_3-paradoksal.*

Bevis. Lad ϕ og ρ være som i sætning 2.8. Så giver sætning 2.5 at den fri gruppe, F, der består af alle reducerede ord i $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ er paradoksal. Hvert element i $F \setminus \{e\}$ fikserer skæringspunkterne mellem sin rotations akse og S^2 og ikke andre punkter. Lad D være mængden af punkter $F \setminus \{e\}$ fikserer. Da F er tællelig og D har to elementer for hvert element i $F \setminus \{e\}$, er D tællelig.

Vi vil nu vise, at F virker på $S^2 \setminus D$. Antag F ikke virker på $S^2 \setminus D$, det betyder, at der findes et $p \in S^2 \setminus D$ og et $g \in F \setminus \{e\}$ så $gp \in D$. Så er gp fixpunkt for et element i $F \setminus \{e\}$, altså findes et $h \in F \setminus \{e\}$ så $hgp = gp$, men så er $p = g^{-1}hgp$ og altså fixpunkt for elementet $g^{-1}hg \in F \setminus \{e\}$. Det giver at $p \in D$. Det er en modstrid, så F virker på $S^2 \setminus D$.

Da elementerne i $F \setminus \{e\}$ ikke har nogen fixpunkter i $S^2 \setminus D$ virker F frit på $S^2 \setminus D$. Proposition 2.6 giver da, at $S^2 \setminus D$ er F-paradoksal og altså også SO_3-paradoksal. $\square$

Vi har ikke brugt at radius af S^2 er 1, så det samme gælder for vilkårlige sfærer med centrum i origo.

3 Banach-Tarski paradokset

Vi vil nu indføre et nyt koncept, der hjælper os med at gå fra Hausdorff paradokset til Banach-Tarski paradokset.

Definition 3.1. *Lad G være en gruppe der virker på en mængde X og lad $A, B \subseteq X$. Vi siger, at A og B er G-ækvidekomposible, skrives $A \sim_G B$, hvis de kan skrives som*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

hvor

$$A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

og der findes $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ så $g_i A_i = B_i, 1 \leq i \leq n$.

At to mængder A og B er ækvidekomposible giver, at der findes en bijektion $\varphi\colon A \to B$ af formen:

$$\varphi(x) = \begin{cases} g_1 x, & x \in A_1 \\ g_2 x, & x \in A_2 \\ \quad\vdots & \\ g_n x, & x \in A_n \end{cases},$$

hvor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er parvis disjunkte delmængder af A med $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$, og $g_1, g_2, \ldots, g_n$ er elementer i G. En sådan bijektion vil vi kalde en G-kongruens. Hvis der findes en G-kongruens fra A på B vil $A \sim_G B$.

Hvis $C \subseteq A$ og φ er en G-kongruens fra A til B, så vil $C \sim_G \varphi(C)$ da funktionen $\psi\colon C \to \varphi(C)$ givet ved:

$$\psi(x) = \begin{cases} g_1 x, & x \in A_1 \cap C \\ g_2 x, & x \in A_2 \cap C \\ \quad\vdots & \\ g_n x, & x \in A_n \cap C \end{cases},$$

er en G-kongruens.

Proposition 3.2. *Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X, da er relationen $\sim_G$ en ækvivalensrelation. Der gælder altså:*

(i) $A \sim_G A$, for alle $A \subseteq X$.

(ii) Hvis $A \sim_G B$ så er $B \sim_G A$, for alle $A, B \subseteq X$.

(iii) Hvis $A \sim_G B$ og $B \sim_G C$ så er $A \sim_G C$, for alle $A, B, C \subseteq X$.

Bevis. Der er tre ting der skal vises.

(i) Hvis e er identitetselementet i G, så har vi at $eA = A$ og da A er en klassedeling af A, er $A \sim_G A$.

(ii) Lad $A_1, A_2, \ldots, A_n$ og $B_1, B_2, \ldots, B_n$ være klassedelinger af A og B henholdsvis. Lad endvidere $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ være så $g_i A_i = B_i$ for alle $1 \leq i \leq n$. Sådanne mængder og gruppeelementer findes da $A \sim_G B$. Sætter vi $h_i = g_i^{-1}, 1 \leq i \leq n$, vil $h_i B_i = g^{-1} g A_i = A_i$ for alle $1 \leq i \leq n$. Da $A_1, A_2, \ldots, A_n$ og $B_1, B_2, \ldots, B_n$ stadig er klassedelinger, har vi at $B \sim_G A$.

(iii) Lad $A_1, A_2, \ldots, A_n$ og $B_1, B_2, \ldots, B_n$ være klassedelinger af A og B, og lad $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ være så $g_i A_i = B_i$ for alle $1 \leq i \leq n$. Lad ligeledes $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_m$ og $C_1, C_2, \ldots, C_m$ være klassedelinger af B og C, og lad $h_1, h_2 \ldots h_m \in G$ være så $h_j \tilde{B}_j = C_j$ for alle $1 \leq j \leq m$. Disse ting findes da $A \sim_G B$ og $B \sim_G C$. Vi sætter

$$\tilde{A}_{i,j} = g_i^{-1}(B_i \cap \tilde{B}_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m,$$

og

$$\tilde{C}_{i,j} = h_j(B_i \cap \tilde{B}_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Vi har

$$(h_j g_i)(\tilde{A}_{i,j}) = h_j(g_i \tilde{A}_{i,j}) = h_j(g_i g_i^{-1}(B_i \cap \tilde{B}_j)) = h_j(B_i \cap \tilde{B}_j) = \tilde{C}_{i,j}.$$

Altså er $A \sim_G C$ hvis $\tilde{A}_{i,j}$'erne og $\tilde{C}_{i,j}$'erne er klassedelinger af henholdsvis A og C. Vi vil kun vise, at $\tilde{C}_{i,j}$'erne er en klassedeling af C, da $\tilde{A}_{i,j}$'erne ses at være en klassedeling af A på samme måde.
Foreningen af $\tilde{C}_{i,j}$'erne giver hele C da

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i,j} \tilde{C}_{i,j} &= \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} h_j \left(B_i \cap \tilde{B}_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \left(\tilde{B}_j \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{m} h_j \left(\tilde{B}_j \cap B\right) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \tilde{B}_j = \bigcup_{j=1}^{m} C_j = C.
\end{aligned}$$

For at se at mængderne er parvis disjunkte, ser vi på to index par $(i, j) \neq (l, k)$. Enten er $j \neq k$ og så gælder

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{i,j} \cap \tilde{C}_{l,k} &= h_j B_i \cap h_j \tilde{B}_j \cap h_k B_l \cap h_k \tilde{B}_k = h_j \tilde{B}_j \cap h_k \tilde{B}_k \cap h_j B_i \cap h_k B_l \\
&= C_j \cap C_k \cap h_j B_i \cap h_k B_l = \emptyset \cap h_j B_i \cap h_k B_l = \emptyset,
\end{aligned}$$

ellers er $j = k$ og $i \neq l$ og så har vi tilsvarende

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,j} \cap \tilde{C}_{l,k} &= h_j B_i \cap h_j \tilde{B}_j \cap h_j B_l \cap h_j \tilde{B}_j \\ &= h_j(B_i \cap B_l) \cap h_j \tilde{B}_j \cap h_j \tilde{B}_j = \emptyset \cap C_j = \emptyset.\end{aligned}$$

Altså er $\tilde{C}_{i,j}$'erne en klassedeling af C og dermed er $A \sim_G C$. □

Beviset for (ii) viser også at hvis $\varphi\colon A \to B$ er en G-kongruens, så er φ^{-1} en G-kongruens fra B til A. Fra (iii) følger, at hvis $\psi\colon B \to C$ er en G-kongruens, så er $\psi \circ \varphi$ en G-kongruens fra A til C.

Ækvidekomposibilitet giver også en lettere måde at arbejde med paradoksale mængder. Der gælder nemlig, at en mængde E er G-paradoksal hvis og kun hvis, der findes disjunkte mængder $A, B \subseteq E$ så $A \sim_G E \sim_G B$. Vi kan nu få følgende

Proposition 3.3. *Lad G være en gruppe der virker på en mængde X, og lad A være en paradoksal delmængde af X. Hvis $B \subseteq X$ med $A \sim_G B$ er B G-paradoksal.*

Bevis. Lad $\varphi\colon A \to B$ være en G-kongruens og lad $A_1, A_2 \subseteq A$ være disjunkte mængder, så $A_1 \sim_G A \sim_G A_2$. Da gælder

$$\varphi(A_1) \sim_G A_1 \sim_G A \sim_G B,$$

og

$$\varphi(A_2) \sim_G A_2 \sim_G A \sim_G B.$$

Da der også gælder

$$\varphi(A_1) \cap \varphi(A_2) = \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(\emptyset) = \emptyset,$$

har vi samlet to disjunkte delmængder af B med $\varphi(A_1) \sim_G B \sim_G \varphi(A_2)$, så B er G-paradoksal. □

Relationen $\sim_G$ giver anledning til en ordningen af delmængder af X.

Definition 3.4. *Hvis G er en gruppe, der virker på en mængde X, siger vi om to mængder $A, B \subseteq X$, at $A \preccurlyeq B$, hvis der findes et $B_1 \subseteq B$ så $A \sim_G B_1$*

Der gælder naturligvis at $A \preccurlyeq A$, da $A \sim_G A$. Relationen $\preccurlyeq$ er også transitiv. For hvis $A \preccurlyeq B$ og $B \preccurlyeq C$ med $B_1 \subseteq B$ og $C_1 \subseteq C$ så $A \sim_G B_1$ og $\varphi\colon B \to C_1$ er G-kongruens har vi

$$A \sim_G B_1 \sim_G \varphi(B_1) \subseteq C_1 \subseteq C,$$

dermed er $A \preccurlyeq C$. Hvis så bare $A \preccurlyeq B$ og $B \preccurlyeq A$ medfører $A \sim_G B$, er $\preccurlyeq$ en partiel ordning. Følgende sætning giver, at det gælder.

Sætning 3.5 (Banach-Schröder-Bernstein)**.** *Lad G være en gruppe der virker på en mængde X og lad $A, B \subseteq X$. Da gælder*

$$A \preccurlyeq B \text{ og } B \preccurlyeq A \Rightarrow A \sim_G B$$

Bevis. Lad $B_1 \subseteq B$ og lad $f\colon A \to B_1$ være en G-kongruens. Lad ligeledes $A_1 \subseteq A$ og lad $g\colon A_1 \to B$ være en G-kongruens. Sæt $C_0 = A \setminus A_1$ og definer rekursivt

$$C_n = g^{-1}(f(C_{n-1})), \quad n \in \mathbb{N},$$

og sæt

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Vi har da, at $gC_n = gg^{-1}fC_{n-1} = fC_{n-1}$. Sætter vi $\bar{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, har vi

$$A \setminus C = A \setminus \left(A \setminus A_1 \cup \bar{C}\right) = (A \setminus (A \setminus A_1)) \cap (A \setminus \bar{C}) = A_1 \cap (A \setminus \bar{C}),$$

og da $A_1 \subseteq A$ er $A_1 \cap (A \setminus \bar{C}) = A_1 \setminus \bar{C}$. Nu får vi

$$\begin{aligned} g(A \setminus C) &= g\left(A_1 \setminus \bar{C}\right) = g(A_1) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} g(C_n) \\ &= B \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f(C_n) = B \setminus f(C), \end{aligned}$$

også får vi

$$A \setminus C \sim_G g(A \setminus C) = B \setminus f(C).$$

Da vi også har $C \sim_G f(C)$ gælder $(A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C)$ og her med $A \sim_G B$, som ønsket. $\square$

Sætningen nedenfor giver, at de to mængder, der bruges til at se at en mængde er paradoksal, kan vælges så de er disjunkte.

Korollar 3.6. *Hvis G er en gruppe, der virker på en mængde X og $E \subseteq X$, så er E G-paradoksal hvis og kun hvis, der findes disjunkte mængder $A, B \subseteq E$ med $A \cup B = E$ og $A \sim_G E \sim_G B$.*

Bevis. Hvis der findes sådanne mængder A og B er E-paradoksal, da det bare er et ekstra krav at $A \cup B = E$.

Hvis omvendt E er paradoksal, findes der disjunkte mængder $A, B \subseteq E$ med $A \sim_G E \sim_G B$, men ikke nødvendigvis med $A \cup B = E$. Vi har $E \sim_G B \subseteq E \setminus A$ så, $E \preccurlyeq E \setminus A$ og da $E \setminus A \preccurlyeq E$ giver Banach-Schröder-Bernstein (sætning 3.5) at $E \sim_G E \setminus A$. Altså har vi $A \sim_G E \sim_G E \setminus A$ og $A \cup (E \setminus A) = E$ som ønsket. $\square$

Vi vil nu vise en sætning, som sætter os i stand til at gå fra Hausdorff paradokset til Banach-Tarski paradokset.

Sætning 3.7. *Hvis D er en tællelig delmængde af S^2, så er $S^2 \setminus D \sim_{SO_3} S^2$.*

Bevis. Lad l være en linje gennem origo der ikke rammer D, en sådan linje findes da D er tællelig. For hvert $p \in D$ sætter vi nu $A(p)$ til at være mængden af vinklerne θ, hvorom det gælder, at der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $\rho(p) \in D$, hvor ρ er rotationen om l med $n\theta$ radianer. Da D er tællelig, er der kun tælleligt mange $\theta \in [0; 2\pi]$ så p føres over i et andet element i D, med en rotation omkring l på θ radianer. Enhver af de vinkler giver anledning til, at vinklerne $\theta + 2\pi z, z \in \mathbb{Z}$ og $\frac{\theta}{n}, n \in \mathbb{N}$ også kommer til at ligge i $A(p)$. Det er de eneste vinkler, der kommer til at ligge i $A(p)$. Altså bliver $A(p)$ en tællelige forening af tællelige mængder, og således tællelig. Sætter vi nu

$$A = \bigcup_{p \in D} A(p),$$

er A en tællelig forening af tællelige mængder, og altså tællelig. Altså findes et $\theta \notin A$, da $\mathbb{R}$ er overtællelig. Lad nu ρ være rotationen om l med θ radianer og sæt

$$\bar{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D).$$

Der gælder at

$$\rho^n(D) \cap D = \emptyset, \quad n \in \mathbb{N},$$

da ρ er valgt, så ρ^n drejer punkter i D væk fra D. Altså er

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(D) = \bar{D} \setminus D.$$

Vi har at $S^2 = \bar{D}(\cup S^2 \setminus \bar{D}) \sim_{SO_3} \rho(\bar{D}) \cup (S^2 \setminus \bar{D})$ og

$$\begin{aligned} \rho(\bar{D}) \cup S^2 \setminus \bar{D} &= \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho(\rho^n(D)) \right) \bigcup S^2 \setminus \bar{D} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(D) \right) \bigcup S^2 \setminus \bar{D} \\ &= \bar{D} \setminus D \bigcup S^2 \setminus \bar{D} = S^2 \setminus D. \end{aligned}$$

Samlet har vi $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$, som ønsket. □

Vi kan nu vise

Sætning 3.8 (Banach-Tarski Paradokset)**.** *S^2 er SO_3-paradoksal. Det samme er alle sfærer med centrum i 0.*
Enhver solid kugle er G_3-paradoksal og det samme er $\mathbb{R}^3$.

Bevis. Hausdorff paradokset (sætning 2.9) giver, at der findes en tællelig mængde $D \subseteq S^2$ så $S^2 \setminus D$ er SO_3-paradoksal. Sætning 3.7 siger at $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$, og så giver proposition 3.3 at S^2 er SO_3-paradoksal. Da vi på intet tidspunkt bruger, at radius af S^2 er 1, gælder det samme for alle sfærer med centrum i origo.

Da G_3 indeholder alle translationer, er det nok at betragte kugler med centrum i $\bar{0}$. Hvis vi associerer hvert punkt, p, på kugleoverfladen, med de punkter der ligger mellem det og centrum, altså mængden $\{\alpha p \mid 0 < \alpha \leq r\}$, hvor r er radius af kuglen, giver den paradoksal dekomposition af kugle overfladen en paradoksal dekomposition for kuglen undtaget $\bar{0}$. Hvis vi kan vise, at for en kugle, B, med centrum i $\bar{0}$ er $B \sim_{G_3} B \setminus \{\bar{0}\}$, vil proposition 3.3 give at B er G_3-paradoksal.

Lad $p = (0, 0, \frac{r}{2})$, og lad l være en linje gennem p og ikke gennem $\bar{0}$ og lad ρ være en rotation om l af uendelig orden. Sæt $D = \{\rho^n(\bar{0}) \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Så er $\rho D = \{\rho^n(\bar{0}) \mid n = 1, 2, \ldots\} = D \setminus \{\bar{0}\}$ og det giver at $B = (B \setminus D) \cup D \sim_{G_3} (B \setminus D) \cup \rho D$. Vi har at så

$$B \sim_{G_3} (B \setminus D) \cup (D \setminus \{\bar{0}\}) = B \setminus \{\bar{0}\}.$$

Som ønsket.

For at se at $\mathbb{R}^3$ er paradoksal, associerer vi hvert punkt $p \in S^2$ med mængden $\{\alpha p \mid 0 < \alpha\}$. Så giver den paradoksale dekompositionen af S^2 en paradoksal dekomposition for $\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. Med D og ρ som før (tag fx $r = 1$) har vi

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \setminus D \cup D \sim_{G_3} \mathbb{R}^3 \setminus D \cup \rho D = \mathbb{R}^3 \setminus D \cup D \setminus \{\bar{0}\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}.$$

Og så er $\mathbb{R}^3$ G_3-paradoksal, per proposition 3.3. □

I beviset for at alle kugler er G_3 pardoksale, bruger vi translationer til, at flytte vilkårlige kugler ned i origo. Man kunne så spørge om kugler med centrum i origo, er SO_3-paradoksale. Det bevis der lige er givet, kan ikke bruges til at vise det, da rotationen der bruges til, at absorbere $\bar{0}$, ligger i G_3. Der kan heller ikke findes noget andet bevis. For hvis og A og B er disjunkte delmængder af en kugle, K, vil enten A eller B ikke indeholde $\bar{0}$. Lad os sige at $\bar{0} \notin B$. Så kan der ikke findes et $x \in B$ og et $\rho \in SO_3$ så $\rho x = \bar{0}$, da SO_3

består af lineære afbildninger. Altså vil kan B ikke være ækvidekoposibel med K, så K er ikke SO_3 paradoksal.

Vi kan bruge fordoblingen af kugler, til at vise det, endnu mere kontra intuitive resultat, at vilkårlige begrænsede mængder med ikke tomt indre, er ækvidekomposible.

Sætning 3.9 (Banach-Tarski Paradokset (Stærk Version))**.** *Hvis* $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ *begge er begrænsede og har ikke tomt indre, så er* $A \sim_{G_3} B$

Bevis. Vi vil først vise at $A \preccurlyeq B$. Da B har ikke tomt indre, findes en kugle L så $L \subseteq B$. Da A er begrænset, findes en kugle K så $A \subseteq K$. Vi har så $L \preccurlyeq B$ og $A \preccurlyeq K$. Vælg nu $n \in \mathbb{N}$ så stor, at K kan dækkes af n overlappende kopier af L, og lad S være en mængde med n disjunkte kopier af L. Da er $K \preccurlyeq S$ og sætning 3.8 giver at $L \sim_{G_3} S$, dermed er $S \preccurlyeq L$, så vi har

$$A \preccurlyeq K \preccurlyeq S \preccurlyeq L \preccurlyeq B.$$

Dermed er $A \preccurlyeq B$. På samme måde ses at $B \preccurlyeq A$. Nu giver sætning 3.5 at $A \sim_{G_3} B$. □

Det er denne version af Banach-Tarski paradokset, der siger, at en (fuldstændigt sfærisk) ært kan skæres ud i endeligt mange stykker, der så kan samles til en kugle på størelse med solen.

4 Typesemigruppen og Tarskis Sætning

Definition 4.1. *Hvis G er en gruppe, der virker på en mængde X definerer vi: $X^* = X \times \mathbb{N}$ og $G^* = \{(g, \pi) \mid g \in G, \pi$ er en permutation af $\mathbb{N}\}$. Så virker G^* på X^*.*

For en delmængde $A \subseteq X^*$ kalder vi de $n \in \mathbb{N}$, hvorom det gælder, at der findes et $x \in X$ så $(x, n) \in A$, for A's niveauer.

Ækvidekomposibilitet med hensyn til G^* og ækvidekomposibilitet med hensyn til G er tæt forbundet, der gælder nemlig for $A, B \subseteq X$ at $A \sim_G B$ hvis og kun hvis $A \times \{n\} \sim_{G^*} B \times \{m\}$ for alle $n, m \in \mathbb{N}$. Thi hvis $\varphi \colon A \to B$ er en G-kongruens, så er $\psi \colon A \times \{n\} \to B \times \{m\}$, givet ved $\psi(x, n) = (\varphi(x), m)$ en G^*-kongruens, så $A \times \{n\} \sim_{G^*} B \times \{m\}$. Hvis omvendt $A \times \{n\} \sim_{G^*} B \times \{m\}$ for alle $n, m \in \mathbb{N}$, gælder specielt $A \times \{1\} \sim_{G^*} B \times \{1\}$, og så er $A \sim_G B$.

Definition 4.2. *Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X. Lad X^* og G^* være som i definition 4.1.*

(1) En delmængde $A \subseteq X^*$ kaldes begrænset hvis A kun har endeligt mange niveauer. Ækvivalens klassen af en begrænset mængde A kaldes A's type og skrives $[A]$. Mængden af alle typer af begrænsede mængder kaldes $\mathcal{S}$. Vi kalder $\mathcal{S}$ for typesemigruppen.

(2) For $[A], [B] \in \mathcal{S}$ sætter vi $[A] + [B] = [A \cup B']$, hvor $B' = \{(b, m + k) \mid (b, m) \in B\}$ med $k \in \mathbb{N}$ så stor at B' og A ikke har nogen fælles niveauer.

Bevis for at + er veldefinerede. Hvis B er en begrænset delmængde af X^* og $B' = \{(b, m + k) \mid (b, m) \in B\}$ for et $k \in \mathbb{N}$, er $B \sim_{G^*} B'$. Det ses ved G^*-kongruensen $\varphi(x, n) = (x, \pi(n))$, hvor π sender niveauerne i B, n, over i $n + k$. Altså er $[A] + [B]$ uafhængigt af hvor meget niveauerne i B forskydes.

Vi vil nu vise, at hvis $A_1 \sim_{G^*} A$ og $B_1 \sim_{G^*} B$ så er $[A_1] + [B_1] = [A] + [B]$. Vi har at $[A_1] + [B_1] = [A_1 \cup B_1']$ og $[A] + [B] = [A \cup B']$, hvor B_1' og B' er niveau forskydninger af henholdsvis B_1 og B. Da $A_1 \sim_{G^*} A$, $B_1' \sim_{G^*} B_1 \sim_{G^*} B \sim_{G^*} B'$, $A_1 \cap B_1' = \emptyset$ og $A \cap B' = \emptyset$ er $A \cup B' \sim_{G^*} A_1 \cup B_1$. Altså er $[A] + [B]$ uafhængigt af valget af repræsentanter for ækvivalensklasserne. Samlet er + en veldefineret operation på $\mathcal{S}$. □

$(\mathcal{S}, +)$ har en række egenskaber der gør den meget anvendelig.

+ er kommutativ, thi hvis $[A], [B] \in \mathcal{S}$ så er

$$[A] + [B] = [A \cup B'] = [A' \cup B] = [B \cup A'] = [B] + [A],$$

hvor $'$ igen markerer en niveauforskydning, og vi har brugt at $A \sim_{G^*} A'$ og $B \sim_{G^*} B'$.

$+$ er associativ: Lad $[A], [B], [C] \in \mathcal{S}$ så gælder

$$\begin{aligned} ([A]+[B])+[C] &= [A \cup B'] + [C] = [(A \cup B') \cup C'] \\ &= [A \cup (B' \cup C')] = [A] + [B' \cup C'] = [A] + ([B]+[C]). \end{aligned}$$

Klassen $[\emptyset]$ er neutralt element for $+$, da $[A] + [\emptyset] = [A \cup \emptyset] = [A]$, for alle $A \in \mathcal{S}$.

Altså er $(\mathcal{S}, +)$ en kommutativ semigruppe med neutralt element. For et $E \subseteq X$ sætter vi $[E] = [E \times \{1\}]$.

På kommutative semigrupper er der en naturlig måde, at definere multiplikation med et naturligt tal, n, nemlig $n\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha$, for $\alpha \in \mathcal{S}$. Vi kan også definerer en ordning på $\mathcal{S}$. For $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ siger vi, at $\alpha \leq \beta$ hvis og kun hvis der findes et $\gamma \in \mathcal{S}$ så $\alpha + \gamma = \beta$. Da $\mathcal{S}$ har neutralt element er $\alpha \leq \alpha$. Der gælder også at hvis $\alpha \leq \beta$ og $\beta \leq \gamma$ så er $\alpha \leq \gamma$. Der gælder specielt for $(\mathcal{S}, +)$

Proposition 4.3. *Hvis A, B er begrænsede delmængder af X^* gælder*

$$[A] + [B] \geq [A \cup B]$$

med lighed hvis $A \cap B = \emptyset$.

Bevis. Vi vil først vise at $A \cup B \cup (A \cap B)' \sim_{G^*} A \cup B'$. Da $A \cup B \cup (A \cap B)' = A \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)'$ er det nok at vise at $A \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)' \sim_{G^*} A \cup B'$. Lad $\pi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en bijektion der forskyder niveauerne i $B \setminus A$ op til niveauerne i B', og lad π_2 forskyde niveauerne i $(A \cap B)'$ op i niveauerne i B'. Sætter vi $g_1 = (e, \pi_1), g_2 = (e, \pi_2)$ har vi $A \cup g_1(B \setminus A) \cup g_2(A \cap B)' = A \cup B'$. Nu får vi så

$$[A] + [B] = [A \cup B'] = [A \cup B \cup (A \cap B)'] = [A \cup B] + [A \cap B].$$

Heraf ser vi at $[A] + [B] \geq [A \cup B]$ og at hvis $A \cap B = \emptyset$ gælder der lighed. $\square$

Vi vil nu se på ordningen af $(\mathcal{S}, +)$. Hvis $A, B \in X^*$ er begrænsede, gælder $[A] \leq [B]$ hvis og kun hvis $A \preccurlyeq B$. Thi hvis $A \preccurlyeq B$ findes et $B_1 \subseteq B$ så $A \sim_{G^*} B_1$, men så er

$$[A] = [B_1] \leq [B_1] + [B \setminus B_1] = [B_1 \cup B \setminus B_1] = [B].$$

Hvis omvendt $[A] \leq [B]$ så findes en mængde $C \subseteq X^*$ så $[A] + [C] = [B]$, det giver at $A \cup C' \sim_{G^*} B$, så der findes en G^*-kongruens, φ fra $A \cup C'$ til B. Da er $A \sim_{G^*} \varphi(A) \subseteq B$ og så er $A \preccurlyeq B$. Nu giver Banach-Schröder-Bernstein (sætning 3.5) at $[A] \leq [B]$ og $[B] \leq [A]$ hvis og kun hvis $[A] = [B]$. Heraf ses at $\leq$ er en partiel ordning på $\mathcal{S}$. Der gælder også at en mængde, $E \subseteq X$, er paradoksal hvis og kun hvis $[E] = 2[E]$. For hvis E er paradoksal findes $A, B \subseteq E$ med $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$ og $A \sim_G E \sim_G B$, jf. korollar 3.6. Hermed får vi

$$[E] = [A \cup B] = [A] + [B] = [E] + [E] = 2[E].$$

Hvis omvendt $[E] = 2[E]$ er $E \times \{1\} \sim_{G^*} E \times \{1, 2\}$ altså findes $A, B \subseteq E$, $A \cap B = \emptyset$ så $A \times \{1\} \sim_{G^*} E \times \{1\}$ og $B \times \{1\} \sim_{G^*} E \times \{2\}$, men så gælder klart $A \sim_G E \sim_G B$ og altså er E paradoksal.

Vi vil nu vise, at for alle $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder at hvis $n\alpha = n\beta$ er $\alpha = \beta$. Da vi ikke har inverse elementer i semigrupper, er det ikke noget der gælder generelt for semigrupper. For at vise det for $\mathcal{S}$, har vi brug for noget grafteori. En graf er givet som $G = (V, E)$, hvor V er mængden af knuder og E er mængden af kanter. Der kan godt gå mere ned en kant mellem to knuder. En graf kaldes todelt, hvis der findes disjunkte ikke tomme $V_1, V_2 \subseteq V$, så $V = V_1 \cup V_2$ og alle kanter går mellem V_1 og V_2. En graf kaldes k-regulær, hvis hver knude er med i præcis k kanter. Königs sætning siger, at enhver k-regulær todelt graf ($k < \infty$) har en perfekt matching. En perfekt matching, M, er en mængde af kanter, der opfylder at enhver knude i grafen, er med i præcis en kant i M. Vi kan nu vise

Sætning 4.4. *Hvis $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ og $n \in \mathbb{N}$ så gælder at hvis $n\alpha = n\beta$ er $\alpha = \beta$*

Bevis. Antag $n\alpha = n\beta$. Så findes disjunkte mængder $E, E' \subseteq X^*$ så $E \sim_{G^*} E'$ og så $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, E' = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ hvor $\{A_i\}, \{B_i\}$ er klassedelinger af henholdsvis E og E'. Ydermere er $[A_1] = [A_2] = \ldots = [A_n] = \alpha$ og $[B_1] = [B_2] = \ldots = [B_n] = \beta$. Lad χ være en G^*-kongruens fra E til E'. Lad φ_i være en G^*-kongruens fra A_1 til A_i og ψ_j være en G^*-kongruens fra B_1 til B_j. For et hvert $a \in A_1$ definerer vi

$$\bar{a} = \{a, \varphi_2(a), \ldots, \varphi_n(a)\}.$$

Ligeledes sætter vi for hvert $b \in B_1$

$$\bar{b} = \{b, \psi_2(b), \ldots, \psi_n(b)\}.$$

Da er $\{\bar{a} \mid a \in A_1\}$ en klassedeling af A. Thi hvis $a_1, a_2 \in A_1$ med $a_1 \neq a_2$, så er $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 = \{a_1, \varphi_2(a_1), \ldots, \varphi_n(a_1)\} \cap \{a_2, \varphi_2(a_2), \ldots, \varphi_n(a_2)\} = \emptyset$, da alle φ_i er G^*-kongruenser og $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er parvis disjunkte. For et $x \in A$ findes et i så $x \in A_i$, så vil $x \in \varphi_i^{-1}(\bar{x})$, dermed er $\cup_{a \in A_1} \bar{a} = A$. På sammen måde ses at $\{\bar{b} \mid b \in B_1\}$ er en klasse deling af B_1.

Vi vil nu konstruere en graf med $\{\bar{a} \mid a \in A_1\}$ og $\{\bar{b} \mid b \in B_1\}$ som knuder. Ud fra hvert $\bar{a}$ skal der gå n kanter. Den i'te kant skal gå til det $\bar{b}$ der opfylder: $\chi(\varphi_i(a)) \in \bar{b}$. Da $\bar{b}$'erne er en klasse deling, findes et og kun et $\bar{b}$ som den i'te kant fra $\bar{a}$ skal gå over til. Der kommer også til at gå n kanter ud fra hvert $\bar{b}$. For hvert $1 \leq j \leq n$ går der en kant fra $\bar{b}$ til det $\bar{a}$ der opfylder $\chi^{-1}(\psi_j(b)) \in \bar{a}$. Det ses ved, at der findes et i så $\chi^{-1}(\psi_j(b)) \in A_i$, altså er der et $a \in A_1$ med $\chi^{-1}(\psi_j(b)) = \varphi_i(a)$ og dermed $\chi(\varphi_i(a)) = \psi_j(b) \in \bar{b}$ og der går en kant fra $\bar{a}$ til $\bar{b}$. Der kan godt være flere tal par (h, k) så $\chi(\varphi_h(a)) = \psi_k(b)$, derfor vil vi døbe hver kant $(\bar{a}, \bar{b}, i, j)$. En sådan kant er en kant mellem $\bar{a}$ og $\bar{b}$ og der gælder $\chi(\varphi_i(a)) = \psi_j(b)$.

Alle kanter i vores graf går mellem $\{\bar{a} \mid a \in A_1\}$ og $\{\bar{b} \mid b \in B_1\}$ så vores graf er to delt. Grafen er også n-regulær, så Königs sætning giver, at der findes en perfekt matching M. For hvert $\bar{a}$ findes altså præcist et $\bar{b}$ og et par i, j så $(\bar{a}, \bar{b}, i, j) \in M$. Sæt nu

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \{a \in A_1 \mid \exists b \in B_1 \colon (\bar{a}, \bar{b}, i, j) \in M\}, \\ D_{i,j} &= \{b \in B_1 \mid \exists a \in A_1 \colon (\bar{a}, \bar{b}, i, j) \in M\} \end{aligned}$$

Der gælder at $\bigcup_{i,j=1}^n C_{i,j} = A_1$ da alle knuder i grafen er med i en kant i M. Vi har også for $(i, j) \neq (h, k)$ at $C_{i,j} \cap C_{h,k} = \emptyset$. Antag nemlig til modstrid, at der findes et $a \in A_1$ så der eksisterer $b_1, b_2 \in B_1$ med $(\bar{a}, \bar{b}_1, i, j) \in M$ og $(\bar{a}, \bar{b}_2, h, k) \in M$. Så vil $b_1 \neq b_2$ da $(i, j) \neq (h, k)$ og ikke både $(\bar{a}, \bar{b}_1, i, j)$ og $(\bar{a}, \bar{b}_1, h, k)$ kan være i M. Men hvis $b_1 \neq b_2$ så indgår $\bar{a}$ i to kanter i M, det er også en modstrid og så findes et sådan a ikke og dermed er $C_{i,j} \cap C_{h,k} = \emptyset$. Samlet er $C_{i,j}$'erne en klassedeling af A_1. På samme måde ses at $D_{i,j}$'erne er en klassedeling af B_1. Vi har også

$$\begin{aligned} \chi(\varphi_i(C_{i,j})) &= \{\chi(\varphi_i(a)) \mid (\bar{a}, \bar{b}, i, j) \in M\} \\ &= \{\psi_j(b)) \mid (\bar{a}, \bar{b}, i, j) \in M\} \\ &= \psi_j(\{b \in B_1 \mid (\bar{a}, \bar{b}, i, j) \in M\}) = \psi_j(D_{i,j}) \end{aligned}$$

så $\psi_j^{-1}(\chi(\varphi_i(C_{i,j}))) = D_{i,j}$. Da ψ_j^{-1}, χ og φ_i alle er G^*-kongruenser, vil deres sammensætning også være en G^*-kongruens. Så vi har $C_{i,j} \sim_{G^*} D_{i,j}$ for alle $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq n$. Af det får vi $A_1 \sim_{G^*} B_1$ og dermed at $\alpha = \beta$. □

Som korollar får vi

Korollar 4.5. *Hvis* $\alpha \in \mathcal{S}$ *og* $n \in \mathbb{N}$ *opfylder* $(n + 1)\alpha \leq n\alpha$ *så er* $\alpha = 2\alpha$

Bevis. Vi har

$$n\alpha \geq (n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq (n+1)\alpha + \alpha \geq n\alpha + 2\alpha$$

Fortsætter vi på den måde, får vi $n\alpha \geq 2n\alpha$. Da der gælder, at $n\alpha \leq n\alpha + n\alpha = 2n\alpha$ har vi

$$n\alpha = 2n\alpha = n(2\alpha).$$

Så giver sætning 4.4 at $\alpha = 2\alpha$. □

Af det ser vi at en mængde, E, opfylder $[E] = 2[E]$ hvis og kun hvis der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $(n+1)[E] \leq n[E]$. Vi har nu følgende karakteristik: En mængde, E, er ikke paradoksal hvis og kun hvis $(n+1)E \not\leq n[E]$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi vil nu bruge typesemigruppen $\mathcal{S}$ til at vise, at hvis en mængde, $E \subseteq X$, ikke er G paradoksal, findes et mål på X der er G invariant og normaliserer E. Først har vi brug for et lemma.

Lemma 4.6. *Lad $(\mathcal{T}, +)$ være en semigruppe, der har neutralt element* 0. *Antag der findes et $\varepsilon \in \mathcal{T}$, så der for alle $\alpha \in \mathcal{T}$ findes et $n \in \mathbb{N}$ så $\alpha \leq n\varepsilon$. Hvis $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$, $\varepsilon \in \mathcal{T}_0$ og der findes $\nu\colon \mathcal{T}_0 \to [0, \infty[$ som opfylder:*

(1) $\nu(\varepsilon) = 1$,

(2) hvis $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in T_0$ med $\sum \phi_i \leq \sum \theta_j$ så er $\sum \nu(\phi_i) \leq \sum \nu(\theta_j)$.

Så kan vi, for et vilkårligt $\alpha \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0$, lave en funktion $\mu\colon T_0 \cup \{\alpha\} \to [0; \infty[$, så μ udvider ν og for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathcal{T}_0 \cup \{\alpha\}$ med $\sum \phi_i \leq \sum \theta_j$ er $\sum \mu(\phi_i) \leq \sum \mu(\theta_j)$.

Bevis. Da μ skal udvide ν, behøver vi kun definere $\mu(\alpha)$. Vi sætter

$$\mu(\alpha) = \inf\{\left(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)\right)/r\},$$

hvor vi tager infimum over alle $r \in \mathbb{N}$ og alle $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q \in \mathcal{T}_0$ med $\sum \gamma_l + r\alpha \leq \sum \beta_k$. Da der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $\alpha \leq n\varepsilon$ tager vi infimum over en ikke tom mængde, så $\mu(\alpha) < \infty$. Vi vil nu vise, at for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathcal{T}_0, s, t \in \mathbb{N}_0$ med $\sum \phi_i + s\alpha \leq \sum \theta_j + t\alpha$ er $\sum \mu(\phi_i) + s\mu(\alpha) \leq \sum \mu(\theta_j) + t\mu(\alpha)$. Det gælder for $s = t = 0$, da μ udvider ν. For at vise det for alle $s, t \in \mathbb{N}_0$ ser på to tilfælde.

(i) $s = 0$ (og $t > 0$). Lad $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m \in \mathcal{T}_0, t \in \mathbb{N}$ være vilkårlige, men så $\sum \phi_i \leq \sum \theta_j + t\alpha$. Vi skal så vise, at $\sum \mu(\phi_i) \leq \sum \mu(\theta_j) +$

$t\mu(\alpha)$. Det gælder hvis og kun hvis $\mu(\alpha) \geq \left(\sum \mu(\phi_i) - \sum \mu(\theta_j)\right)/t$, og da μ udvider ν, er det, det sammme som $\mu(\alpha) \geq \left(\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j)\right)/t$. Infimum bevarer uskarpe uligheder, så det er nok at vise, at for vilkårlige $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q \in \mathcal{T}_0, r \in \mathbb{N}$ som opfylder $\sum \gamma_l + r\alpha \leq \sum \beta_k$ er

$$(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l))/r \geq \left(\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j)\right)/t,$$

da $(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l))/r$ er et af de tal, vi tager infimum over. Nu regner vi

$$\begin{aligned} \sum \phi_i &\leq \sum \theta_j + t\alpha \Rightarrow \\ r\sum \phi_i &\leq r\sum \theta_j + rt\alpha \Rightarrow \\ r\sum \phi_i + t\sum \gamma_l &\leq r\sum \theta_j + t(\sum \gamma_l + r\alpha) \Rightarrow \\ r\sum \phi_i + t\sum \gamma_l &\leq r\sum \theta_j + t(\sum \beta_k). \end{aligned}$$

Nu har vi en ulighed, hvor alle led er elementer i $\mathcal{T}_0$. Vi bruger, at ν opfylder (1) og får

$$r\sum \nu(\phi_i) + t\sum \nu(\gamma_l) \leq r\sum \nu(\theta_j) + t\sum \nu(\beta_k).$$

Rykker vi rundt på det, får vi

$$(\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j))/t \leq (\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_j))/r,$$

som ønsket.

(ii) $s > 0$ (og $t \geq 0$). Lad igen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m \in \mathcal{T}_0, s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}_0$ være vilkårlige, men så $\sum \phi_i + s\alpha \leq \sum \theta_j + t\alpha$. Vi skal så vise, at $\sum \nu(\phi_i) + s\mu(\alpha) \leq \sum \nu(\theta_j) + t\mu(\alpha)$. Vælg nu $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q \in \mathcal{T}_0, r \in \mathbb{N}$ som før. Sætter vi $z = (\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l))/r$, er z et af de tal vi skal tage infimun over. Dermed er det nok at vise at

$$\sum \nu(\phi_i) + s\mu(\alpha) \leq \sum \nu(\theta_j) + tz.$$

Vi regner som før(ganger igennem med r, lægger $t\sum \gamma_l$ til på begge sider og vurderer $\sum \gamma_l + r\alpha \leq \sum \beta_k$) og får

$$r\sum \phi_i + rs\alpha + t\sum \gamma_l \leq r\sum \theta_j + t\sum \beta_k.$$

Af den ulighed ser vi at

$$(r\sum \nu(\theta_j) + t\sum \nu(\beta_k) - r\sum \nu(\phi_i) - t\sum \nu(\gamma_l))/rs$$

er et af de tal vi tager infimum over i definitionen af $\mu(\alpha)$, så

$$\mu(\alpha) \leq (r\sum\nu(\theta_j) + t\sum\nu(\beta_k) - r\sum\nu(\phi_i) - t\sum\nu(\gamma_l))/rs.$$

Regner vi på det får vi (vi ganger igennem med s, lægger $\sum\nu(\phi_i)$ til på begge sider og rykker rundt)

$$\begin{aligned} s\mu(\alpha) + \sum\nu(\phi_i) &\leq \sum\nu(\phi_i) + \Big(r\sum\nu(\theta_j) + t\sum\nu(\beta_k) \\ &\qquad -r\sum\nu(\phi_i) - t\sum\nu(\gamma_l)\Big)/r \\ &= \sum\nu(\phi_i) + \Big(t(\sum\nu(\beta_k) - \sum\nu(\gamma_l)) \\ &\qquad +r(\sum\nu(\theta_j) - r\sum\nu(\phi_i))\Big)/r \\ &= \sum\nu(\phi_i) + (trz + r(\sum\nu(\theta_j) - r\sum\nu(\phi_i)))/r \\ &= tz + \sum\nu(\theta_j), \end{aligned}$$

som ønsket.

Vi har vist at μ er en udvidelse af ν der opfylder at $\sum\mu(\phi_i) \leq \sum\mu(\theta_j)$ når $\sum\phi_i \leq \sum\theta_j$ for vilkårlige $\phi_i, \theta_j \in \mathcal{T}_0 \cup \{\alpha\}$. Nu mangler vi kun, at se at $\mu(\alpha) \geq 0$. Vi har at $\varepsilon \leq \alpha + \varepsilon$, heraf får vi $\mu(\varepsilon) \leq \mu(\alpha) + \mu(\varepsilon)$ og dermed $0 \leq \mu(\alpha)$. □

For at vise næste sætning har vi, foruden vores lemma, brug for Zorns Lemma. Zorns Lemma er ækvivalent med udvalgsaktiomet. Det siger, at hvis $(\mathcal{P}, \leq)$ er en ikke tom partielt ordnet mængder, og enhver total ordnet delmængde af $\mathcal{P}$ har en mojorant, så har $\mathcal{P}$ et maksimalt element.

Sætning 4.7. *Lad $(\mathcal{T}, +)$ være en semigruppe med identitet 0 og lad $\varepsilon \in \mathcal{T}$. Følgende er ækvivalente:*

(1) $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$.

(2) Der findes et $\mu\colon \mathcal{T} \to [0, \infty]$ *så* $\mu(\varepsilon) = 1$ *og* $\mu(\alpha) + \mu(\beta) = \mu(\alpha + \beta)$ *for alle* $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$.

Bevis. (2) $\Rightarrow$ (1). Lad μ være som i (2). For alle $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ har vi at $\alpha \leq \beta$ hvis og kun hvis $\alpha + \gamma = \beta$ for et $\gamma \in \mathcal{T}$, det giver at $\mu(\alpha) + \mu(\gamma) = \mu(\beta)$ og dermed $\mu(\alpha) \leq \mu(\beta)$. Så hvis der fandtes et $n \in \mathbb{N}$ så $(n+1)\varepsilon \leq n\varepsilon$ ville der gælde $\mu((n+1)\varepsilon) \leq \mu(n\varepsilon)$. Det giver at $n + 1 \leq n$. Det er en modstrid, så for alle $n \in \mathbb{N}$ er $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$ og (1) gælder.

(1) $\Rightarrow$ (2). Antag først, at for alle elementer $\alpha \in \mathcal{T}$ findes $n \in \mathbb{N}$ så $\alpha \leq n\varepsilon$. Sæt $\mathcal{P}$ til at være mængden af par (M, ν), hvor $M \subseteq \mathcal{T}, \varepsilon \in M$ og

$\nu\colon M \to [0;\infty[$ opfylder $\nu(\varepsilon) = 1$ og for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m \in M$ med $\sum \phi_i \le \sum \theta_j$ er $\sum \nu(\phi_i) \le \sum \nu(\theta_j)$. Da er $\mathcal{P}$ partielt ordnet, ved ordningen $(M, \nu) \le (M', \nu')$ hvis og kun hvis $M \subseteq M'$ og ν' udvider ν. Vi vil bruge Zorns Lemma på $\mathcal{P}$. For at bruge Zorns Lemma, skal vi vise, at $\mathcal{P}$ ikke er tom og at enhver total ordnet delmængde af $\mathcal{P}$ har en majorant. For at se at $\mathcal{P}$ ikke er tom sætter vi $M = \{\varepsilon\}$ og $\nu(\varepsilon) = 1$. Parret (M, ν) ligger så i $\mathcal{P}$, hvis $n\varepsilon \le m\varepsilon$ medfører $\nu(n\varepsilon) \le \nu(m\varepsilon)$. Da $\nu(\varepsilon) = 1$ er kravet $\nu(n\varepsilon) \le \nu(m\varepsilon)$ ækvivalent med $n \le m$. Hvis der fandtes $n, m \in \mathbb{N}$ med $n\varepsilon \le m\varepsilon$ og $n > m$ ville vi have at $(m + 1) \le n$, det giver os at $(m + 1)\varepsilon \le n\varepsilon \le m\varepsilon$, som er modstrid med vores antagelse (1). Dermed vil $(M, \nu) \in \mathcal{P}$ så $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Lad nu $A \subseteq \mathcal{P}$ være en totalt ordnet mængde. Vi vil vise at A har en majorant. Sæt $N = \cup_{(M,\nu)\in A} M$ og definer $\mu\colon N \to [0;\infty[$ ved

$$\mu(x) = \nu(x), \quad x \in M, (M, \nu) \in A.$$

Vi vil nu vise, at μ er uafhængig af valget af M og altså veldefineret. Hvis $x \in M_1 \cap M_2$ hvor $(M_1, \nu_1), (M_2, \nu_2) \in A$ så er enten $(M_1, \nu_1) \le (M_2, \nu_2)$ eller $(M_2, \nu_2) \le (M_1, \nu_1)$, lad os sige at $(M_1, \nu_1) \le (M_2, \nu_2)$. Så er ν_2 en udvidelse af ν_1, dermed er $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ og $\mu(x)$ er uafhængig af valget af M. Af det foregående ses også, at for et vilkårligt $(\nu, M) \in A$ er μ en udvidelse af ν. Da der også gælder at $M \subseteq N$, altså er (N, μ) den ønskede majorant, hvis $(N, \mu) \in \mathcal{P}$. Det eneste vi mangler for at vise, at $(N, \mu) \in \mathcal{P}$ er, at for vilkårlige $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m \in N$ med $\sum \phi_i \le \sum \theta_j$ er $\sum \mu(\phi_i) \le \sum \mu(\theta_j)$. Da der kun er endeligt mange ϕ_i og θ_j og A er totalt ordnet, findes $(M, \nu) \in A$ så alle $\phi_i, \theta_j \in M$. Det giver at $\sum \nu(\phi_i) \le \sum \nu(\theta_j)$ og dermed er $\sum \mu(\phi_i) \le \sum \mu(\theta_j)$, da μ udvider ν. Altså er $(N, \mu) \in \mathcal{P}$ og vi har vores mojorant. I følge Zorns Lemma findes der nu et $(M, \mu) \in \mathcal{P}$ så $(M', \mu') \le (M, \mu)$ for alle $(M', \mu') \in \mathcal{P}$.

Vi vil nu vise at $M = \mathcal{T}$. Antag at $M \subsetneq \mathcal{T}$, så findes et $\alpha \in \mathcal{T} \setminus M$ og så giver lemma 4.6 at μ kan udvides til et $\nu\colon M \cup \{\alpha\} \to [0;\infty[$, der opfylder, at for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in M \cup \{\alpha\}$ med $\sum \phi_i \le \sum \theta_j$ er $\sum \nu(\phi_i) \le \sum \nu(\theta_j)$. Altså vil $(M \cup \{\alpha\}, \nu) \in \mathcal{P}$. Men $M \cup \{\alpha\} \subsetneq M$ så $(M \cup \{\alpha\}, \nu) \not\le (M, \mu)$, det er en modstrid. Så må $M = \mathcal{T}$. For vilkårlige $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ har vi $\alpha + \beta \le (\alpha + \beta)$ så $\mu(\alpha) + \mu(\beta) \le \mu(\alpha + \beta)$, vi har også $\alpha + \beta \ge (\alpha + \beta)$, det giver at $\mu(\alpha) + \mu(\beta) \ge \mu(\alpha + \beta)$. Samler vi det får vi at $\mu(\alpha) + \mu(\beta) = \mu(\alpha + \beta)$. Ydermere er $\mu(\varepsilon) = 1$, da $(M, \mu) \in \mathcal{P}$, så μ er som ønsket.

Vi ser nu på det tilfælde, hvor ikke alle elementer i $\mathcal{T}$ er begrænsede af ε. Sæt $\mathcal{T}_0$ til at være de begrænsede elementer i $\mathcal{T}$. Hvis $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_0$ vil $\alpha+\beta \in \mathcal{T}_0$, thi hvis $\alpha \le n\varepsilon$ og $\beta \le m\varepsilon$, er $\alpha + \beta \le n\varepsilon + m\varepsilon = (n + m)\varepsilon$. Så $\mathcal{T}_0$ er en semigruppe med identitet($0 \in \mathcal{T}_0$, da $0 \leq \varepsilon$). Per det foregående findes et $\mu\colon \mathcal{T}_0 \to [0,\infty[$ der er endeligt additiv og har $\mu(\varepsilon) = 1$. Vi definerer nu:

$$\mu'(\alpha) = \begin{cases} \mu(\alpha), & \alpha \in \mathcal{T}_0 \\ \infty, & \alpha \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0 \end{cases}.$$

Hvis $\alpha \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0$ eller $\beta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0$ så vil også $\alpha + \beta \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0$, for $\alpha + \beta \leq n\varepsilon$ giver $\alpha \leq n\varepsilon$ og $\beta \leq n\varepsilon$. Dermed er $\mu'(\alpha) + \mu'(\beta) = \infty = \mu'(\alpha + \beta)$ hvis α eller β er ubegrænsede. Da μ er endelig additiv og μ' udvider μ, har vi nu at μ' er endelig additiv. Nu er μ' som ønsket så (1) $\Rightarrow$ (2). $\square$

Vi er nu i stand til at bevis Tarskis Sætning.

Sætning 4.8 (Tarskis Sætning)**.** *Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X og $E \subseteq X$. Følgende er ækvivalente:*

(1) Der er et endeligt additivt G-invariant mål, $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ med $\mu(E) = 1$.

(2) E er ikke G paradoksal.

At μ er et endeligt additivt mål betyder, at $\mu(\emptyset) = 0$ og at $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ for disjunkte mængder A, B.

Bevis. (1) $\Rightarrow$ (2). Antag til modstrid at der findes et μ som i (1) og at E er G-paradoksal. Så findes disjunkte mængder $A, B \subseteq E$ så $A \sim_G E \sim_G B$, det givet at $\mu(A) = \mu(E) = \mu(B)$, da μ er G-invariant. Vi har så

$$\mu(E) \geq \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E),$$

som medfører $1 \geq 2$, en klar modstrid, så (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Lad $\mathcal{S}$ være type semigruppen for X og sæt $\varepsilon = [E]$. Da E ikke er G-paradoksal er $\varepsilon \neq 2\varepsilon$. Korollar 4.5 giver så, at for alle $n \in \mathbb{N}$ er $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$ og vi kan så bruge sætning 4.7 på $\mathcal{S}$, til at få et endeligt additivt $\nu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ med $\nu(\varepsilon) = 1$. Definer nu $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ved:

$$\mu(A) = \nu([A]), \quad A \subseteq X.$$

Så er $\mu(E) = \nu(\varepsilon) = 1$ og for disjunkte $A, B \subseteq X$ er

$$\mu(A \cup B) = \nu([A \cup B]) = \nu([A] + [B]) = \nu([A]) + \nu([B]) = \mu(A) + \mu(B).$$

Vi har også at $\mu(E) = \mu(E \cup \emptyset) = \mu(E) + \mu(\emptyset)$, så $\mu(\emptyset) = 0$. For at se at μ er G invariant bemærker vi, at for $g \in G$ og $A \in X$ er $gA \times \{0\} \sim_{G^*} A \times \{0\}$ så $[gA] = [A]$. Dermed er $\mu(gA) = \nu([gA]) = \nu([A]) = \mu(A)$. Altså er μ et endeligt additivt G-invariant mål der normaliserer E, så (2) $\Rightarrow$ (1). $\square$

5 Amenable Grupper

Definition 5.1. *En gruppe, G, kaldes amenabel, hvis der findes et endeligt additivt mål $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$, med $\mu(G) = 1$ og $\mu(gA) = \mu(A)$ for alle $A \subseteq G$ og $g \in G$. I så fald kaldes μ et mål på G.*

Hvis vi skal vise, at $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ er et endeligt additivt mål, følger $\mu(\emptyset) = 0$ af at $\mu(G) = 1$, da $\mu(G) = \mu(G \cup \emptyset) = \mu(G) + \mu(\emptyset)$, det giver at $\mu(\emptyset) = 0$.

For to isomorfe grupper, G og H gælder, at hvis G er amenabel er H også amenabel. For hvis μ er mål på G og $\varphi : H \to G$ er en isomorfi, så er $\nu(A) = \mu(\varphi(A))$ et mål på H. Der gælder nemlig $\nu(H) = \mu(G) = 1$, og for A, B disjunkte delmængder af H, er

$$\nu(A \cup B) = \mu(\varphi(A \cup B)) = \mu(\varphi(A) \cup \varphi(B)) = \mu(\varphi(A)) + \mu(\varphi(B)) = \nu(A) + \nu(B),$$

og for $h \in H$ har vi

$$\nu(hA) = \mu(\varphi(hA)) = \mu(\varphi(h)\varphi(A)) = \mu(\varphi(A)) = \nu(A).$$

Altså er ν et mål på H, så H er amenabel.

Vi kalder mængden af funktioner $f\colon G \to \mathbb{R}$, der opfylder at der findes et $c \in \mathbb{R}$ så $f(g) \leq c$ for alle $g \in G$, for $B(G)$. Hvis F er et reelt funktional på $B(G)$, der opfylder:

(i) $F(af + bg) = aF(f) + bF(g)$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og alle $f, g \in B(G)$,

(ii) $F(f) \geq 0$ for alle $f \in B(G)$, der opfylder $f(g) \geq 0$ for alle $g \in G$,

(iii) $F(1_G) = 1$, hvor 1_G er indikator funktionen for G, og

(iv) $F({}_gf) = F(f)$, for alle $g \in G$ og alle $f \in B(G)$, hvor ${}_gf(h) = f(g^{-1}h)$,

kaldes F et venstre invariant middel.

Hvis vi har en amenabel gruppe, G, kan vi konstruere integralet af alle funktioner i $B(G)$. Konstruktionen foregår ved først at definere integralet af simple funktioner. For en vilkårlig funktion $f \in B(G)$ findes en følge af simple funktioner, der konvergerer uniformt mod f. Integralet kan altså udvides fra simple funktioner til alle $f \in B(G)$ og det vil opfylde:

(i) $\int af + bg \, d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$,

(ii) $\int f d\mu \geq 0$, hvis $f(g) \geq 0$ for alle $g \in G$,

(iii) $\int 1_G d\mu = 1$, hvor 1_G er indikator funktionen for G, og

(iv) $\int {}_g f d\mu = \int f d\mu$, for alle $g \in G$, hvor ${}_g f(h) = f(g^{-1}h)$,

det sidste gælder da μ er G-invariant. Altså har alle amenable grupper et venstre invariant middel. Det omvendte gælder også.

Proposition 5.2. *Hvis G er en gruppe med et venstre invariant middel er G amenabel.*

Bevis. Kald G's venstre invariante middel F. Definer $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ ved

$$\mu(A) = F(1_A), \quad A \subseteq G.$$

Da er $\mu(G) = F(1_G) = 1$ og for A, B disjunkte delmængder af G gælder

$$\mu(A \cup B) = F(1_{A\cup B}) = F(1_A + 1_B) = F(1_A) + F(1_B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Nu mangler vi kun at μ er G-invariant. For et $A \subseteq G$ og et $g \in G$ har vi $1_{gA}(h) = 1_A(g^{-1}h) = {}_g 1_A(h)$ for alle $h \in G$. Det giver nu

$$\mu(gA) = F(1_{gA}) = F({}_g 1_A) = F(1_A) = \mu(A).$$

Altså er μ et mål på G, så G er amenabel. □

Som et korollar til Tarskis sætning (4.8) får vi:

Korollar 5.3. *G er amenable hvis og kun hvis G ikke er G-paradoksal.*

Bevis. Tarskis sætning (sætning 4.8) giver, at der findes et endeligt additivet G-invariant mål $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,\infty]$ med $\mu(G) = 1$ hvis og kun hvis G ikke er G-paradoksal. Det er det ønskede bortset fra, at vi kun vil have at billedemængden af μ er $[0,1]$. Det følger af, at for $A \subseteq G$ er $\mu(A) \leq \mu(G) = 1$. □

Korollar 5.4. *Hvis G er en amenabel gruppe, der virker på en mængde X, så er X ikke G-paradoksal.*

Bevis. Hvis X var G paradoksal ville G være G-paradoksal per proposition 2.7, men det er i modstrid med korollar 5.3. □

Vi vil nu se et konkret eksempel på en amenabel gruppe, nemlig $(\mathbb{Z}, +)$. Før vi kan vise, at $\mathbb{Z}$ er amenabel, har vi brug for at definere topologien for punktvis konvergens. Vi giver rummet af funktioner fra en gruppe, G, ind i $[0,1]$ topologien, T, der har alle endelige snit af mængder fra systemet

$$S(f,x,r) = \{g\colon G \to [0,1] : |g(x) - f(x)| < r\}, \quad f \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)}, x \in G, r > 0,$$

som basis. Topologien T svarer til produkt topologien på $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ [2]. Tychonoffs sætning giver, at $([0,1]^{\mathcal{P}(G)}, T)$ er et kompakt topologisk rum.

Sætning 5.5. $(\mathbb{Z}, +)$ *er en amenable gruppe.*

Beviset følger ideerne i Wagons bevis for, at alle abelske grupper er ameneble.

Bevis. Vi viser først, at vi kan lave mål, der næsten er som vi ønsker. Lad nemlig $\varepsilon > 0$ være giver, så findes et $\mu_\varepsilon : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to [0,1]$ så:

(i) $\mu_\varepsilon(\mathbb{Z}) = 1$,

(ii) $\mu_\varepsilon(A \cup B) = \mu_\varepsilon(A) + \mu_\varepsilon(B)$, for A, B disjunkte delmængder af $\mathbb{Z}$, og

(iii) $|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(A+1)| \leq \varepsilon$, for alle $A \subseteq \mathbb{Z}$.

For at vise eksistensen af μ_ε vælger vi et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ og sætter $N = \{1, 2, \ldots, n_0\}$. Vi definerer nu

$$\mu_\varepsilon(A) = \frac{\tau(A \cap N)}{n_0}, \quad A \subseteq \mathbb{Z},$$

hvor τ er tællemålet. Da opfylder μ_ε betingelserne (i), (ii) og (iii) thi:
(i)

$$\mu_\varepsilon(\mathbb{Z}) = \frac{\tau(\mathbb{Z} \cap N)}{n_0} = \frac{n_0}{n_0} = 1.$$

(ii) For $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ med $A \cap B = \emptyset$ har vi

$$\mu_\varepsilon(A \cup B) = \frac{\tau((A \cup B) \cap N)}{n_0} = \frac{\tau(A \cap N)}{n_0} + \frac{\tau(B \cap N)}{n_0} = \mu_\varepsilon(A) + \mu_\varepsilon(B),$$

hvor vi bruger, at τ er et mål.
(iii) For $A \subseteq \mathbb{Z}$ sætter vi $A_0 = A \cap \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$ og $A_1 = (A+1) \cap \{2, 3, \ldots, n_0\}$. Da er $\tau(A \cap N) = \tau(A_0) + 1_A(n_0)$ og $\tau((A+1) \cap N) = \tau(A_1) + 1_{A+1}(1)$. Ydermere gælder $\tau(A_1) = \tau((A+1) \cap \{2, 3, \ldots, n_0\}) = \tau(A \cap \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}) = \tau(A_0)$. Nu har vi

$$\begin{aligned} |\tau(A \cap N) - \tau((A+1) \cap N)| &= |\tau(A_0) + 1_A(n_0) - \tau(A_1) - 1_{A+1}(1)| \\ &= |1_A(n_0) - 1_{A+1}(1)| \leq 1. \end{aligned}$$

Heraf får vi

$$|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(A+1)| = \frac{|\tau(A \cap N) - \tau((A+1) \cap N)|}{n_0} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Altså findes et μ_ε for alle $\varepsilon > 0$.

Nu definerer vi, for alle $\varepsilon > 0$, $\mathcal{M}_\varepsilon$ til at være mængden af funktioner fra $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ind i [0,1] som opfylder (i), (ii) og (iii). For alle $\varepsilon > 0$ vil $\mu_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon$, så $\mathcal{M}_\varepsilon \neq \emptyset$. Der gælder også, at $\mathcal{M}_\varepsilon$ er lukket, for alle $\varepsilon > 0$. For at vise det, viser vi, at $\mathcal{M}_\varepsilon^c$ er åben. Hvis en funktion $f \in \mathcal{M}_\varepsilon^c$ opfylder f (mindst) ikke en af betingelserne (i), (ii), (iii). Hvis fx f ikke opfylder (ii), findes disjunkte mængder $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ så $f(A \cup B) \neq f(A) + f(B)$, lad os sige $f(A \cup B) > f(A) + f(B)$. Vælg nu r så $0 < r < f(A \cup B) - f(A) - f(B)$ og sæt

$$U = \{g : |g(A) - f(A)| < \frac{r}{4}, |g(B) - f(B)| < \frac{r}{4}, |g(A \cup B) - f(A \cup B)| < \frac{r}{2}\}.$$

Da er U åben i topologien for punktvis konvergens og $f \in U$. For et $g \in U$ gælder $g(A \cup B) > g(A) + g(B)$. Thi vi har, at $g(A) < f(A) + \frac{r}{4}$ og $g(B) < f(B) + \frac{r}{4}$ så $g(A) + g(B) < f(A) + f(B) + \frac{r}{2}$, vi har også at $g(A \cup B) > f(A \cup B) - \frac{r}{2}$, så hvis $g(A \cup B) \leq g(A) + g(B)$ ville vi have

$$f(A \cup B) - \frac{r}{2} < g(A \cup B) \leq g(A) + g(B) < f(A) + f(B) + \frac{r}{2},$$

det giver at

$$f(A \cup B) - f(A) - f(B) < r,$$

som er i modstrid med valget af r. Altså er $g(A \cup B) > g(A) + g(B)$, så $g \in \mathcal{M}_\varepsilon^c$ og dermed er $U \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon^c$. På samme måde kan vi vise, at hvis f ikke opfylder (i) eller (iii), findes en åbne omegn, V, om f, så $V \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon^c$. Det giver, at $\mathcal{M}_\varepsilon^c$ er en åben mængde og dermed er $\mathcal{M}_\varepsilon$ lukket.

Vi skal nu bruge noget topologi. Hvis $\{A_i \subseteq K \mid \alpha \in I\}$ er et system af lukkede delmængder af et kompakt rum K, vil $\bigcap_{\alpha \in I} A_i \neq \emptyset$, hvis $\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} \neq \emptyset$ for vilkårlige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in I$. Thi hvis $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \emptyset$ ville $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c = K$, så ville $\{A_\alpha^c \mid \alpha \in I\}$ kunne udtyndes til en endelig over dækning, da K er kompakt. Men hvis $\bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i}^c = K$ så er $\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} = \emptyset$, og det er en modstrid.

Da der for vilkårlige $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$ gælder at $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}_{\varepsilon_i} = \mathcal{M}_{\min \varepsilon_i} \neq \emptyset$, giver kompaktheden af $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ og det foregående, at $\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{M}_\varepsilon \neq \emptyset$. Lad nu $\mu \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{M}_\varepsilon$. Da gælder, at $\mu(\mathbb{Z}) = 1$, og for A, B disjunkte delmængder af $\mathbb{Z}$ er $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Der gælder også at $|\mu(A) - \mu(A+1)| < \varepsilon$ for alle $\varepsilon > 0$, så vi må have $\mu(A) = \mu(A+1)$. Det giver at μ er $\mathbb{Z}$-invariant, for hvis $A \subseteq \mathbb{Z}$ og $n \in \mathbb{Z}^+$ har vi

$$\mu(A) = \mu(A+1) = \mu(A+2) = \ldots = \mu(A+n),$$

og for $n \in \mathbb{Z}^-$

$$\mu(A+n) = \mu(A+n+1) = \mu(A+n+2) = \ldots = \mu(A).$$

Samlet er μ et mål på $\mathbb{Z}$, så $\mathbb{Z}$ er amenabel. $\square$

Vi vil nu vise, at nogle kendte klasser af grupper er amenable.

Sætning 5.6.

(i) Endelige grupper er amenable.

(ii) Undergrupper af amenable grupper er amenable.

(iii) Hvis N er en normal undergruppe af en amenable gruppe G, så er G/N amenabel.

(iv) Hvis N er en normal undergruppe af en gruppe G og både N og G/N er amenable, så er G amenabel.

(v) Hvis $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, hvor alle G_α er amenable og der for alle $\alpha, \beta \in I$ findes et $\gamma \in I$ så $G_\alpha \subseteq G_\gamma$ og $G_\beta \subseteq G_\gamma$, så er G amenabel.

(vi) Hvis G og H er amenable grupper, så er $G \times H$ amenabel.

(vii) Abelske grupper er amenable.

Bevis. (i): Lad G være en endelig gruppe. Definer $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ ved

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|G|}, \quad A \subseteq G.$$

Da er $\mu(G) = \frac{|G|}{|G|} = 1$ og for A, B disjunkte delmængder af G er $\mu(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|G|} = \frac{|A|+|B|}{|G|} = \mu(A) + \mu(B)$, endeligt er $\mu(gA) = \frac{|gA|}{|G|} = \frac{|A|}{|G|} = \mu(A)$, for alle $g \in G$ og $A \subseteq G$. Altså er μ et mål på G og dermed er G amenabel.

(ii): Lad μ være et mål på G og lad H være en undergruppe af G. Lad nu M være en mængde, der indeholder præcist et element fra hver højre sideklasse af H. For at lave M bruger vi udvalgsaktiomet. Vi kan nu definere $\nu\colon \mathcal{P}(H) \to [0,1]$ ved

$$\nu(A) = \mu(\bigcup_{g \in M} Ag), \quad A \subseteq H.$$

Da er $\nu(H) = \mu(\bigcup_{g \in M} Hg) = \mu(G) = 1$, vi har brugt at foreningen af de højre sidekalsser er hele G. Betragt nu to disjunkte mængder $A, B \subseteq H$. Vi har at $\bigcup_{g \in M} Ag \cap \bigcup_{g \in M} Bg = \emptyset$. Thi hvis der fandtes $g_1, g_2 \in M, a \in A$ og $b \in B$ så $ag_1 = bg_2$, ville $g_2 = b^{-1}ag_1 \in Hg_1$, og så ville $Hg_1 = Hg_2$. Det giver at $g_1 = g_2$, da M kun har et element fra hver sideklasse. Nu er $ag_1 = bg_1$ så $a = b$, som er i modstrid med at $A \cap B = \emptyset$. Nu kan vi se, at ν er endeligt additiv, ved at bruge at μ er det. Lad A, B være disjunkte delmængder af H, så er

$$\begin{aligned} \nu(A \cup B) &= \mu(\bigcup_{g \in M} (A \cup B)g) = \mu((\bigcup_{g \in M} Ag) \cup (\bigcup_{g \in M} Bg)) \\ &= \mu(\bigcup_{g \in M} Ag) + \mu(\bigcup_{g \in M} Bg) = \nu(A) + \nu(B). \end{aligned}$$

For at vise H-invariansen af ν, lader vi $h \in H$ og $A \subseteq H$, og får

$$\nu(hA) = \mu(\bigcup_{g \in M} (hA)g) = \mu(h(\bigcup_{g \in M} Ag)) = \mu(\bigcup_{g \in M} Ag) = \nu(A).$$

Samlet er ν et mål på H, som altså er amenabel.

(iii) Hvis $A \subseteq G/N$ kan A skrives på formen $A = \{Na \mid a \in M\}$, hvor $M \subseteq G$. Lader vi μ være et mål på G, kan vi definere $\nu \colon G/N \to [0, 1]$ ved

$$\nu(A) = \mu(\bigcup_{a \in M} Na), \quad A = \{Na \mid a \in M\}, M \subseteq G.$$

Så har vi $\nu(G/N) = \mu(\cup_{g \in G} Ng) = \mu(G) = 1$. For disjunkte delmængder, $A = \{Na \mid a \in M_1\}$ og $B = \{Na \mid a \in M_2\}$ af G/N er også $\bigcup_{a \in M_1} Na$ og $\bigcup_{a \in M_2} Na$ disjunkte, da sideklasser enten er ens eller disjunkte. Nu gælder

$$\begin{aligned} \nu(A \cup B) &= \mu((\bigcup_{a \in M_1} Na) \cup (\bigcup_{a \in M_2} Na)) \\ &= \mu(\bigcup_{a \in A_1} Na) + \mu(\bigcup_{a \in M_2} Na) = \nu(A) + \nu(B). \end{aligned}$$

Hvis $A \subseteq G/N$, $A = \{Na \mid a \in M\}$ og $Ng \in G/N$ er

$$(Ng)A = \{NgNa | a \in M\} = \{Nga | a \in M\} = \{gNa | a \in M\},$$

det sidste lighedstegn gælder, da N er normal. Nu ser vi

$$\nu((Ng)A) = \mu(\bigcup_{a \in M} gNa) = \mu(g \bigcup_{a \in M} Na) = \mu(\bigcup_{a \in M} Na) = \nu(A).$$

Altså er ν G/N-invariant og dermed et mål på G/N, som så er amenabel.

(iv) Lad ν_1, ν_2 være mål på henholdsvis N og G/N. For et hvert $A \subseteq G$ kan vi definere $f_A \colon G \to [0, 1]$ ved

$$f_A(g) = \nu_1(N \cap g^{-1}A), \quad g \in G.$$

Vi ser, at hvis $g_1, g_2 \in G$ opfylder $Ng_1 = Ng_2$ så er $f_A(g_1) = f_A(g_2)$. Thi hvis $Ng_1 = Ng_2$ findes et $h \in N$ så $g_1^{-1}g_2 = h$. Det giver

$$\begin{aligned} f_A(g_1) &= \nu_1(N \cap g_1^{-1}A) = \nu_1(N \cap hg_2^{-1}A) \\ &= \nu_1(h(h^{-1}N \cap g_2^{-1}A)) = \nu_1(N \cap g_2^{-1}A) = f_A(g_2), \end{aligned}$$

hvor vi til sidst bruger at ν_1 er N-invariant og at $h^{-1}N = N$. Vi kan altså for alle $A \subseteq G$ lave en funktion $f'_A : G/N \to [0,1]$, givet ved $f'_A(Ng) = f_A(g)$. Definer nu $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ ved

$$\mu(A) = \int f'_A d\nu_2, \quad A \subseteq G.$$

Så gælder $\mu(G) = \int f'_G d\nu_2 = \int 1 d\nu_2 = 1$. For disjunkte $A, B \subseteq G$ gælder

$$\begin{aligned} f_{A\cup B}(g) &= \nu_1(N \cap g^{-1}(A \cup B)) = \nu_1((N \cap g^{-1}A) \cup (N \cap g^{-1}B)) \\ &= \nu_1(N \cap g^{-1}A) + \nu_1(N \cap g^{-1}B) = f_A(g) + f_B(g), \end{aligned}$$

for alle $g \in G$. Hermed er $f'_{A\cup B} = f'_A + f'_B$ og så er

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \int f'_{A\cup B} d\nu_2 = \int f'_A + f'_B d\nu_2 \\ &= \int f'_A d\nu_2 + \int f'_B d\nu_2 = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

Endeligt har vi at for $h \in G$ og $A \subseteq G$ er

$$f_{hA}(g) = \nu_1(N \cap g^{-1}(hA)) = \nu_1(N \cap (h^{-1}g)^{-1}A) = f_A(h^{-1}g) = {}_hf_A(g),$$

dermed er

$$\mu(hA) = \int f'_{hA} d\nu_2 = \int {}_hf'_A d\nu_2 = \int f'_A d\nu_2 = \mu(A).$$

Samlet er μ et mål på G, som så er amenabel.

(v) For et hvert $\alpha \in I$ konstruerer vi $\nu_\alpha : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ ved

$$\nu_\alpha(A) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha), \quad A \subseteq G,$$

hvor μ_α er et mål på G_α. Der gælder at $\nu_\alpha(G) = \mu_\alpha(G_\alpha) = 1$ og hvis $A, B \subseteq G$ er parvis disjunkte er

$$\nu_\alpha(A\cup B) = \mu_\alpha((A\cap G_\alpha)\cup(B\cap G_\alpha)) = \mu_\alpha(A\cap G) + \mu_\alpha(B\cap G) = \nu_\alpha(A) + \nu_\alpha(B),$$

endelig har vi for $g \in G_\alpha$ og $A \subseteq G$ at

$$\nu_\alpha(gA) = \mu_\alpha(gA \cap G_\alpha) = \mu_\alpha(g(A \cap g^{-1}G_\alpha)) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha) = \nu_\alpha(A).$$

Vi sætter nu $\mathcal{M}_\alpha$ til at være mængden af endeligt additive funktioner, $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ så $\mu(G) = 1$ og $\mu(gA) = \mu(A)$ for alle $g \in G_\alpha$ og $A \subseteq G$. For alle $\alpha \in I$ er $\mathcal{M}_\alpha$ ikke tom, da $\nu_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$. Som i beviset for sætning 5.5, vil vi vise, at $\mathcal{M}_\alpha$ er lukket i produkttopologien på $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ ved at vise, at $\mathcal{M}_\alpha^c$ er åben. Tag et $f \in \mathcal{M}_\alpha^c$, så er f enten ikke endelig additv, $f(G) \neq 1$ eller der findes et $g \in G_\alpha$ og et $A \subseteq G$ så $f(gA) \neq f(A)$. Vi vil kun se på det sidste tilfælde og kun i formen $f(gA) > f(A)$, da de andre tilfælde følger på samme måde. Vælg $0 < r < f(gA) - f(A)$ og sæt

$$U = \{f' \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} : |f'(A) - f(A)| < \frac{r}{2}, |f'(gA) - f(gA)| < \frac{r}{2}\}.$$

Så U er en åben mængde i produkttopologien og for et $f' \in U$ er $f'(A) < f'(gA)$, thi

$$f'(A) < f(A) + \frac{r}{2} < f(gA) - r + \frac{r}{2} = f(gA) - \frac{r}{2} < f'(gA).$$

Altså kan vi for et hvert $f \in \mathcal{M}_\alpha^c$, finde en åben omegn, U, om f, så $U \subseteq \mathcal{M}_\alpha^c$. Hermed er $\mathcal{M}_\alpha^c$ åben og $\mathcal{M}_\alpha$ er lukket. Vi ser også, at for vilkårlige $\alpha, \beta \in I$ findes et $\gamma \in I$ så både G_α og G_β er undergrupper af G_γ. Altså er funktioner der er G_γ-invariante specielt både G_α- og G_β-invariant, så $\mathcal{M}_\gamma \subseteq \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}_\beta$, og så vil der for vilkårlige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$ findes et $\beta \in I$ så $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}_{\alpha_i} \supset \mathcal{M}_\beta \neq \emptyset$. Da $[0,1]^{\mathcal{P}(g)}$ er kompakt, per Thyconoffs sætning, har vi altså $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$. Det sidste får vi på samme måde, som vi gjorde i beviset for sætning 5.5. Lad nu $\mu \in \cap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$, da er μ endelig additiv, $\mu(G) = 1$ og for et vilkårlige $g \in G$ og $A \subseteq G$ er $\mu(gA) = \mu(A)$, da der findes et $\alpha \in I$ så $g \in G_\alpha$ og μ er G_α invariant. Samlet er μ et mål på G, dermed er G amenabel.

(vi) Lad G og H være amenable grupper og sæt $G^* = \{(g, e_H) | g \in G\}$. Så er G^* isomorf med G og altså amenabel. Yderligere er G^* en normal undergruppe af $G \times H$ og $(G \times H)/G \cong H$. Dermed er $(G \times H)/G$ amenabel. Nu giver (iv) at $G \times H$ er amenabel.

(vii) Vi betragter først endeligt genererede abeleske grupper. Hvis G er en sådan gælder

$$G \cong \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{k_m},$$

for $n \in \mathbb{N}_0$ og $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ [1]. Da $\mathbb{Z}$ er amenabel per sætning 5.5 og $\mathbb{Z}_k$ er endelig for alle $k \in \mathbb{N}$, og dermed også amenable per (i), giver (vi) at G er amenabel.

Hvis G er en vilkårlig abelsk gruppe, er G lig med foreningen af sine endeligt genererede undergrupper (der alle er amenable). Hvis vi tager to endeligt genererede under grupper, $S = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ og $T = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle$, så er både S og T undergrupper af $\langle g_1, g_2, \ldots g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle$. Altså opfylder G betingelserne i (v) og er så amenabel. □

Vi vil nu se på mængden af isometrier, G_n, fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$. Mængden af translationer, T_n, er afbildninger af formen $x \mapsto x+b$, altså isometrier hvor A er identitets matricen I. Mængden af isometrier hvor $b = 0$ skrives O_n. Både O_n og T_n er grupper med funktionssammensætning som gruppe operation. Vi har $T_n \cong \mathbb{R}^n$ og $O_n \cong \{A \mid A$ er en symetrisk $n \times n$ matrix med $\det A = \pm 1\}$. Afbildningen $\varphi\colon G_n \to O_n$ givet ved $\varphi(x \mapsto Ax + b) = x \mapsto Ax$, er en surjektiv gruppehomomorfi med kerne T_n. Det giver at T_n er en normal undergruppe af G_n og at $G_n/T_n \cong O_n$. Da $T_n \cong \mathbb{R}^n$ er den abelsk og dermed amenabel per sætning 5.6 (vii). Hvis O_n også er amenabel giver sætning 5.6 (iv) at G_n er amenabel. For $n = 1$ er $O_n \cong \{1, -1\}$, dermed giver sætning 5.6 (i) at den er amenabel. For $n = 2$ betragter vi determinant afbildningen. Det er surjektiv gruppehomomorfi mellem O_2 og $\{1, -1\}$ med kerne SO_2. Altså er SO_2 en normal undergruppe af O_2 og $O_2/SO_2 \cong \{1, -1\}$, så ifølge sætning 5.6 (iv) er O_2 amenabel hvis SO_2 er det. Elementer i SO_2 har formen

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ganger vi sådan to sammen ser vi at SO_2 er abelsk og dermed amenabel (sætning 5.6 (vii)). Så er O_2 amenabel. Samlet er G_1 og G_2 amenable grupper. Sætning 2.8 og korollar 5.3 viser, at G_3 har en ikke amenabel undergruppe og så giver sætning 5.6 (ii) at G_3 ikke er amenabel. At G_1 og G_2 er amenable giver sammen med korollar 5.4 at $\mathbb{R}$ ikke er G_1 paradoksal og at $\mathbb{R}^2$ ikke er G_2 paradoksal. Vi kan dog ikke sige noget om delmængder af $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$, da G_1 og G_2 ikke generelt virker på dem. Heller ikke det mål vi kan få ved at bruge Tarskis sætning hjælper. Da det normaliserer $\mathbb{R}$ henholdsvis $\mathbb{R}^2$, må det være 0 på begrænsede mængder. For at kunne sige noget om delmængder har vi brug for

Sætning 5.7. *For er gruppe G er følgende ækvivalente:*

(i) *G er amenabel.*

(ii) *Hvis G er en gruppe af lineære operatore på et vektorrum V og F er et lineært G-invariant funktional, defineret på et G-invariant underrum V_0*

af V. Hvis F ydermere er domineret af en G-invariant semilineær p, så findes en G-invariant udvidelse, $\bar{F}$, til hele V af F, så $\bar{F}$ er dominerede af p.

At $p\colon V \to \mathbb{R}$ er semilineær betyder, at $p(v_1 + v_2) \le p(v_1) + p(v_2)$, for alle $v_1, v_2 \in V$, og at $p(av) = ap(v)$, for alle $a \in \mathbb{R}$ og $v \in V$. At V_0 er et G-invariant underrum, betyder at hvis $v \in V_0$ og $g \in G$ så vil $gv \in V_0$.

For at vise sætningen, skal vi bruge Hahn-Banachs sætning. Den siger, at hvis F er et lineært funktional defineret på et underrum, M, af et vektorrum V, og F er domineret af en semilineær p, så kan F udvides til et lineært funktional på hele V, der også er begrænset af p.

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Vi antager, at G er en amenabel gruppe af linæere operatore på et vektorrum V og at F er et funktional som beskrevet i (ii). Hahn-Banachs sætning giver at der findes et funktional F_0 på V, der udvider F og er dominerede af p. For et hvert $v \in V$ definerer vi $f_v\colon G \to \mathbb{R}$ ved

$$f_v(h) = F_0(h^{-1}(v)), \quad h \in G.$$

For alle $h \in G$ har vi

$$f_v(h) = F_0(h^{-1}v) \le p(h^{-1}v) = p(v),$$

altså er f_v en begrænset funktion. Da G er amenabel findes et mål, μ, på G. Vi definerer nu $\bar{F}\colon V \to \mathbb{R}$ ved

$$\bar{F}(v) = \int f_v(h)d\mu(h), \quad v \in V.$$

Vi vil vise at $\bar{F}$ er lineær. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ og $v_1, v_2 \in V$ så har vi for alle $h \in G$ at

$$\begin{aligned} f_{av_1+bv_2}(h) &= F_0(h^{-1}(av_1 + bv_2)) = F_0(h^{-1}(av_1) + h^{-1}(av_2)) \\ &= aF_0(h^{-1}(v_1)) + bF_0(h^{-1}(v_2)) = af_{v_1}(h) + bf_{v_2}(h), \end{aligned}$$

hvor vi har brugt, at h^{-1} og F_0 er lineære. Nu kan vi se at

$$\begin{aligned} \bar{F}(av_1 + bv_2) &= \int f_{av_1+bv_2} d\mu = \int af_{v_1} + bf_{v_2} d\mu \\ &= a\int f_{v_1} d\mu + b\int f_{v_2} d\mu = a\bar{F}(v_1) + b\bar{F}(v_2), \end{aligned}$$

så $\bar{F}$ er lineær. At $\bar{F}$ er dominerede af p, ses da der for alle $v \in V$ gælder

$$\bar{F}(v) = \int f_v(h)d\mu(h) \le \int p(v)d\mu(h) = p(v).$$

For at vise, at $\bar{F}$ er G-invariant, tager vi vilkårlige $g \in G$ og $v \in V$ og får

$$f_{g(v)}(h) = F_0(h^{-1}g(v)) = F_0((g^{-1}h)^{-1}(v)) = f_v(g^{-1}h) = {}_gf_v(h).$$

Dermed er

$$\bar{F}(g(v)) = \int f_{gv} d\mu = \int {}_gf_v d\mu = \int f_v d\mu = \bar{F}(v),$$

da μ er G-invariant, så $\bar{F}$ er G-invariant. Samlet er $\bar{F}$ et G-invariant lineært funktional på V, så hvis $\bar{F}$ udvider F, er vi færdige. Vi ser på et $v_0 \in V_0$ og vi får, ved brug af at V_0 er G-invariant, at F_0 udvider F og at F er G-invariant, at

$$\begin{aligned}\bar{F}(v_0) &= \int f_{v_0}(h) d\mu = \int F_0(h^{-1}v_0) d\mu \\ &= \int F(h^{-1}v_0) d\mu = \int F(v_0) d\mu = F(v_0),\end{aligned}$$

så $\bar{F}$ udvider F.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sæt $V = B(G)$ og $V_0 = \{f \in V \mid f \text{ er konstant}\}$. Så virker G på V ved $g(f) = {}_gf$. Virkningen af G er lineær, da der for alle $g \in G$, $f_1, f_2 \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$ gælder

$$\begin{aligned}(g(af_1 + bf_2))(h) &= {}_g(af_1 + bf_2)(h) = (af_1 + bf_2)(g^{-1}h) \\ &= a(f_1(g^{-1}h)) + b(f_2(g^{-1}h)) = a({}_gf_1(h)) + b({}_gf_2(h)).\end{aligned}$$

Der gælder at V_0 er G-invariant, thi for $f \in V_0$, $f(h) = \alpha$, og alle $g, h \in G$ er

$${}_gf(h) = f(g^{-1}h) = \alpha = f(h).$$

Definer nu $F\colon V_0 \to \mathbb{R}$ ved $F(\alpha) = \alpha$, så er F et lineært G-invariant funktional. Sætter vi $p\colon V \to \mathbb{R}$ til at være

$$p(f) = \sup\{f(g) \mid g \in G\}, \quad f \in V,$$

så er p semilineær og G-invariant, og F er dominerede af p. I følge vores antagelse, findes et G-invariant lineært funktional $\bar{F}\colon V \to \mathbb{R}$, der udvider F og er dominerede af p. Da $\bar{F}$ udvider F, er $\bar{F}(1_G) = \bar{F}(1) = F(1) = 1$. Altså er $\bar{F}$ et venstre invariant middel på G, hvis bare $\bar{F}(f) \geq 0$ for $f \geq 0$. Men hvis $f \geq 0$ er $p(-f) \leq 0$, og så er $\bar{F}(-f) \leq p(-f) \leq 0$, dermed er $\bar{F}(f) = -\bar{F}(-f) \geq 0$, så $\bar{F}$ er et venstre invariant middel på G, så G er amenabel jf. proposition 5.2. $\square$

Vi kan nu vise

Sætning 5.8. *Hvis G er en amenabel gruppe af isometrier på $\mathbb{R}^n$, findes en endeligt additiv G invariant udvidelse af Lebesgue målet, λ, til hele $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Bevis. Vi sætter V_0 til at være mængden af Lebesgue integrablefunktioner og V til at være mængden af funktioner, der er dominerede af mindst en funktion fra V_0. Så vil G virke lineært på V ved $g(f) = {}_g f$. Hvis $f \in V_0$ vil ${}_g f \in V_0$, da Lebesgue integralet er isometri invariant, så V_0 er et G-invariant underrum af V. Definer nu $F\colon V_0 \to \mathbb{R}$ ved

$$F(f) = \int f d\lambda, \quad f \in V_0.$$

Da er F et lineært og G-invariant funktional på V_0. Vi vil nu finde et semilineært G-invariant funktional der dominerer F. Vi definerer $p\colon V \to \mathbb{R}$ ved

$$p(f) = \inf\{F(g) \mid g \in V_0, f(x) \leq g(x) \text{ for alle } x \in \mathbb{R}^n\}, \quad f \in V.$$

Vores valg af V sikre, at der altid er mindst et $g \in V_0$ så $f \leq g$, så vi tager infimum over en ikke tom mængde. Der gælder for alle $f, h \in V$, at

$$\begin{aligned}
p(f+h) &= \inf\{F(g) \mid g \in V_0, f+h \leq g\} \\
&\leq \inf\{F(g_1+g_2) \mid g_1, g_2 \in V_0, f \leq g_1, h \leq g_2\} \\
&= \inf\{F(g_1)+F(g_2) \mid g_1, g_2 \in V_0, f \leq g_1, h \leq g_2\} \\
&= \inf\{F(g_1) \mid g_1 \in V_0, f \leq g_1\} + \inf\{F(g_2) \mid g_2 \in V_0, h \leq g_2\} \\
&= p(f)+p(h),
\end{aligned}$$

uligheden gælder, da $f+h \leq g_1+g_2 \in V_0$ hvis $f \leq g_1$ og $h \leq g_2$, så vi tager infimum over en mindre mængde i linje 2 end i linje 1. For $a \in \mathbb{R}$ og $f \in V$ er

$$\begin{aligned}
p(af) &= \inf\{F(g) \mid g \in V_0, af \leq g\} = \inf\{F(g) \mid g \in V_0, f \leq \frac{1}{a}g\} \\
&= \inf\{F(ag) \mid g \in V_0, f \leq g\} = a\inf\{F(g) \mid g \in V_0, f \leq g\} = ap(f).
\end{aligned}$$

Altså er p semilineær. Lader vi $g_0 \in G$ og $f \in V$ ser vi, at p er G-invariant da

$$\begin{aligned}
p({}_{g_0}f) &= \inf\{F(g) \mid g \in V_0, {}_{g_0}f \leq g\} = \inf\{F(g) \mid g \in V_0, f \leq {}_{g_0^{-1}}g\} \\
&= \inf\{F({}_{g_0}g) \mid g \in V_0, f \leq g\} = \inf\{F(g) \mid g \in V_0, f \leq g\} = p(f).
\end{aligned}$$

Endelig har vi, at for et $f \in V_0$, er $p(f) = \inf\{F(g) | g \in V_0, f \leq g\} = F(f)$. Vi kan nu bruge sætning 5.7 til at udvide F til et lineært G-invariant funktional,

$\bar{F}$, på V, som er dominerede af p. Vi bemærker at $\bar{F}(f) \geq 0$ for $f \geq 0$, thi $\bar{F}(-f) \leq p(-f) = -p(f) \leq 0$, og så er $\bar{F}(f) = -\bar{F}(-f) \geq 0$. Vi definerer nu $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ved

$$\mu(A) = \begin{cases} \bar{F}(1_A), & 1_A \in V \\ \infty, & \text{ellers} \end{cases}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Hvis A og B er disjunkte og enten 1_A eller 1_B ikke ligger i V, vil $1_{A\cup B} \notin V$. Så $\mu(A \cup B) = \infty = \mu(A) + \mu(B)$. Hvis både A og B er i V, vil $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, da $\bar{F}$ er lineær. Vi har at $1_A \in V$ hvis og kun hvis ${}_g1_A \in V$ for alle $g \in G$, da Lebesgue målet er isometri invariant. Så μ er G-invariant, da $\bar{F}$ er G-invariant. Vi vil vise at μ udvider λ. For at se det, lader vi A være en Borel mængde. Hvis $\lambda(A) < \infty$ vil $1_A \in V_0$ og $\mu(A) = \int 1_A d\lambda = \lambda(A)$. Hvis $\lambda(A) = \infty$ vil $1_A \notin V$ og $\mu(A) = \infty = \lambda(A)$. Altså er μ et endeligt additivt G-invariant mål på $\mathbb{R}^n$ der udvider λ. □

Vi vil nu bruge vores udvidelse af Lebesgue målet til at vise

Korollar 5.9. *En begrænsede delmængde af $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^2$ med ikke tomt indre, er ikke paradoksal.*

Bevis. Lad E være en begrænsede delmængde med ikke tomt indre og lad μ være udvidelsen af Lebegues målet fra sætning 5.8. Da E har ikke har tomt indre, findes en kugle $K \subseteq E$ og da E er begrænsede findes en kugle L så $E \subseteq L$. Heraf ser vi

$$0 < \lambda(K) \leq \mu(A) \leq \lambda(L) < \infty.$$

Det giver at E ikke er paradoksal. For fandtes der disjunkte $A, B \subseteq E$ med $A \sim_G E \sim_G B$ ville

$$\mu(E) \geq \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E),$$

det kan ikke passe, da $\mu(E) \neq \infty$ og $\mu(E) \neq 0$. Altså er E ikke paradoksal. □

Litteratur

[1] David S. Dummit and Richard M. Foote, *Abstract algebra*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991. MR MR1138725 (92k:00007)

[2] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. MR MR0464128 (57 #4063)

[3] Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, With a foreword by Jan Mycielski, Corrected reprint of the 1985 original. MR MR1251963 (94g:04005)