Supramenable grupper

Tanja Rosenberg Nielsen
v. Mikael Rørdam

Bachelorprojekt i matematik.
Institut for matematiske fag, Københavns Universitet

Bachelor Thesis in Mathematics.
Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen

11. januar 2013

Indhold

1 Indledning

Supramenabilitet for grupper er en stærkere egenskab end den mere kendte amenabilitet. En gruppe er supramenabel, hvis den ikke indeholder paradoksale delmængder. Alle abelske grupper, og mere generelt alle grupper, der er eksponentielt begrænsede, er supramenable. Alle supramenable grupper er oplagt amenable, men ikke alle amenable grupper er supramenable. Supramenabilitet kan også beskrives ved brug af uniforme afbildninger. Endvidere er supramenabilitet ækvivalent med, at alle ko-kompakte virkninger på lokalt kompakte hausdorffrum tillader et ikke-trivielt invariant radonmål. I projektet vil disse resultater blive gennemgået.

1.1 Resume

Projektet er delt i to, hvor første del er en diskussion af amenable grupper, mens anden halvdel behandler supramenable grupper. I første del formuleres og bevises Tarskis sætning, hvoraf det følger, at en gruppe er amenabel, hvis og kun hvis den ikke er paradoksal. Herefter vises, at en gruppe er amenabel, hvis og kun hvis den bærer et såkaldt venstre-invariant middel. Desuden gennemgås andre betingelser på en gruppe, der er ækvivalente med, at gruppen er amenabel. Herudover gives en række eksempler på grupper, der er amenable. Slutteligt beskrives amenabilitet for en diskret gruppe, når gruppen virker på et kompakt hausdorffrum.

I kapitlet om supramenable grupper vises det, at en gruppe, der indeholder en fri undersemigruppe, aldrig er supramenabel. Herefter gives nogle eksempler på grupper, der er supramenable. I det efterfølgende afsnit vises, at eksponentielt begrænsede grupper er supramenable, hvorfor det følger, at abelske grupper, der har polynomisk vækst, er supramenable og dermed også amenable. Herefter gives et eksempel på en gruppe, der er amenabel, men ikke er supramenabel. Derfor er samlingen af amenable grupper ægte indeholdt i samlingen af supramenable grupper. Kapitlet fortsættes med beviset for, at supramenabilitet er ækvivalent med, at alle ko-kompakte virkninger af en diskret gruppe på et lokalt kompakt hausdorffrum tillader et ikke-trivielt invariant radonmål. Til sidst beskrives supramenable grupper ved brug af uniforme afbildninger.

1.2 Abstract

The project falls in to parts. The first one is a discussion of amenable groups while the other one gives a treatment of supramenable groups. In the first part the theorem of Tarski is formulated and proofed. From this follows that

a group is amenable if and only if it is not paradoxical. Then it is shown, that a group is amenabel, if and only if it carries an invariant mean. Also a review of other conditions equivalent to amenability is given. In addition some examples of amenable groups are given. Finally amenability of discrete groups is described when the group acts on a compact Hausdorff space.

In the part about supramenable groups it is shown that a group which contains a free subsemigroup is not amenable. Then some examples of supramenable groups are given. In the following section it is shown that exponentially bounded grups are supramenable. It follows that abelian groups which have polynomial growth are supramenable and therefore also amenable. Then an example of a group which is amenable but not supramenable is given so the inclusion of the set of amenable groups in the set of supramenable groups is strict. The chapter continues with the proof of supramenable groups being equivalent to the fact that every co-compact action of a discrete group on a locally compact Hausdorff space admits a non-zero invariant Radon measure. At last supramenability is discriped in terms of uniform maps.

2 Amenabilitet

Dette kapitel indeholder bl.a. en definition af amenabilitet, Tarskis sætning, eksempler på amenable grupper samt en række betingelser, der er ækvivalente med amenabilitet. Materialet til dette kapitel er primært hentet fra [SW] kapitel 8-10.

Definition 2.1. Lad G være en gruppe og lad μ være et endeligt additivt mål på $\mathbb{P}(G)$, sådan at $\mu(G) = 1$ og μ er venstre-invariant, dvs. $\mu(gA) = \mu(A)$ for $g \in G, A \subseteq G$. En gruppe G siges at være amenabel, hvis den bærer et sådant mål.

2.1 Tarskis sætning

I dette afsnit formuleres og bevises de resultater, der er nødvendige for at bevise Tarskis sætning, som siger, at hvis en gruppe G virker på en mængde X og $E \subseteq X$, så findes et endeligt additivt G-invariant mål $\mu\colon \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ med $\mu(E) = 1$, hvis og kun hvis E ikke er G-paradoksal.

Definition 2.2. Antag, at en gruppe G virker på en mængde X. Definer en udvidet virkning på følgende måde: Lad $X^* = X \times \mathbb{N}$ og lad $G^* = \{(g, \pi) \mid g \in G, \pi \text{ er en permutation af } \mathbb{N}\}$. Lad nu G^* virke på X^* ved $(g, \pi)(x, n) = (g(x), \pi(n))$. Hvis $A \subseteq X^*$, kaldes de $n \in \mathbb{N}$, der opfylder, at A mindst har ét element, der har andenkoordinat n, niveauerne for A.

Definition 2.3. Lad G, X, G^*, X^* være som i Definition 2.2. En delmængde A af X^* kaldes begrænset, hvis den kun har endeligt mange niveauer. Ækvivalensklassen mht. til G^*-ækvidekomposabilitet af en begrænset mængde $A \subseteq X^*$ kaldes typen af A og skrives $[A]$. Samlingen af typer af begrænsede mængder betegnes med $\mathscr{S}$.

Det kan nemt tjekkes, at $(\mathscr{S}, +)$ er en kommutativ semigruppe, hvis operationen $+$ defineres som følger: For $[A], [B] \in \mathscr{S}$, sæt $[A] + [B] = [A \cup B']$, hvor $B' = \{(b, m + k) \mid (b, m) \in B\}$ og k er så stor, at niveauerne for B' er disjunkte med niveauerne af A. Desuden er $[\emptyset] = 0$ en identitet for operationen $+$. Semigruppen $(\mathscr{S}, +)$ kaldes typesemigruppen. Semigruppen har en naturlig ordning givet ved $\alpha \leq \beta$ hvis og kun hvis, der findes $\gamma \in \mathscr{S}$, så $\alpha + \gamma = \beta$ for $\alpha, \beta \in \mathscr{S}$. Operationenerne i semigruppen opfylder desuden mange velkendte egenskaber. F.eks. at for $n, m \in \mathbb{N}$ og $\alpha \in \mathscr{S}$, er $(n + m)\alpha = n\alpha + m\alpha$, $n\alpha \leq m\alpha$, hvis $n \leq m$ og $n(m\alpha) = (nm)\alpha$.

Sætning 2.4 (forkortningsreglen). Hvis der for $\alpha, \beta \in \mathscr{S}$ og et $n \in \mathbb{N}$ gælder at $n\alpha = n\beta$, så er $\alpha = \beta$.

Beviset udelades her, men kan findes i [SW, side 114-115].

Korollar 2.5. Hvis $\alpha \in \mathscr{S}$ og $n \in \mathbb{N}$ opfylder at $(n+1)\alpha \leq n\alpha$, så er $2\alpha = \alpha$.

Bevis. Ved at substituere det antagede i sig selv n gange fås at

$$\begin{aligned} n\alpha &\geq (n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq (n+1)\alpha + \alpha = n\alpha + 2\alpha \geq \cdots \\ &\geq (n+1)\alpha + (n-1)\alpha = n\alpha + n\alpha = 2n\alpha. \end{aligned}$$

Da også $n\alpha \leq 2n\alpha$ gælder, at $n\alpha = 2n\alpha = n(2\alpha)$, og så giver forkortningsreglen, at $\alpha = 2\alpha$ som ønsket. □

Lemma 2.6. Lad $(\mathscr{T}, +, 0, \varepsilon)$ være en kommutativ semigruppe med identitet 0 og et specificeret element ε. Antag desuden $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og at elementerne i $\mathscr{T}$ er begrænsede (dvs. at for hvert $\alpha \in \mathscr{T}$ findes $n \in \mathbb{N}$, så $\alpha \leq n\varepsilon$). Hvis $\mathscr{T}_0$ er en endelig delmængde af $\mathscr{T}$, der indeholder ε, findes en funktion $\mu\colon \mathscr{T}_0 \to [0, \infty]$, så
(i) $\mu(\varepsilon) = 1$,
(ii) og hvis $\psi_i, \theta_j \in \mathscr{T}_0$ opfylder $\psi_1 + \cdots + \psi_m \leq \theta_1 + \cdots \theta_n$, så er $\sum_{i=1}^m \mu(\psi_i) \leq \sum_{j=1}^n \mu(\theta_j)$.

Bevis. Påstanden bevises ved induktion efter $|\mathscr{T}_0|$.

Induktionsstart: Hvis $|\mathscr{T}_0| = 1$ er $\mathscr{T}_0 = \{\varepsilon\}$, og da er $\mu(\varepsilon) = 1$ den ønskede funktion, for *(ii)* er i dette tilfælde blot at vise, at $m\varepsilon \leq n\varepsilon$ medfører at $m \leq n$ for $n, m \in \mathbb{N}$, hvilket følger af antagelserne; antag for modstrid, at $m\varepsilon \leq n\varepsilon$ og $m > n$, da følger, at

$$m > n \Rightarrow m \geq n+1 \Rightarrow (n+1)\varepsilon \leq m\varepsilon \leq n\varepsilon,$$

hvilket er i modstrid med lemmaets antagelse. Derfor er $m \not> n$ dvs. $m \leq n$. Dette er det eneste sted i beviset, hvor antagelsen om, at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$, benyttes.

Induktionsskridt: Antag at $|\mathscr{T}_0| > 1$ og lad $\alpha \in \mathscr{T}_0 \backslash \{\varepsilon\}$. Antag, at der findes en funktion ν på $\mathscr{T}_0 \backslash \{\alpha\}$, der opfylder lemmaet; det skal vises, at der findes en funktion på $\mathscr{T}_0$, der ligledes opfylder lemmaet. Pr. antagelse er alle elementer i $\mathscr{T}$ begrænset af et $n\varepsilon$, så ν antager kun endelige værdier.

Definer en ny funktion μ på $\mathscr{T}_0$ ved at lade μ stemme overens med ν på $\mathscr{T}_0 \backslash \{\alpha\}$ og sætte

$$\mu(\alpha) = \inf_{r \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l)}{r} \right\},$$

hvor $r \in \mathbb{N}$ og $\beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q \in \mathscr{T}_0 \backslash \{\alpha\}$ og opfylder $\gamma_1 + \cdots + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + \cdots, \beta_p$. Funktionen μ opfylder selvfølgelig (i), fordi ν gør det. Hvis det antages, at (ii) er opfyldt, så er

$$\varepsilon \leq \varepsilon + \alpha \Rightarrow 1 \leq 1 + \mu(\alpha) \Rightarrow \mu(\alpha) \geq 0,$$

så billedet af μ er indeholdt i $[0, \infty]$. Derfor er det nok at vise, at (ii) er opfyldt. Antag at

$$\psi_1 + \cdots + \psi_m + s\alpha \leq \theta_1 + \cdots + \theta_n + t\alpha, \tag{2.1.1}$$

hvor $\psi_i, \theta_j \in \mathscr{T}_0 \backslash \{\alpha\}$ og $s, t \in \mathbb{N}$.

$\underline{s = 0, t = 0 :}$ I dette tilfælde er (ii) opfyldt, da ν opfylder (ii) på $\mathscr{T}_0 \backslash \{\alpha\}$.

$\underline{s = 0, t > 0 :}$ Det skal vises, at $\sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) \leq t\mu(\alpha) + \sum_{j=1}^n \nu(\theta_j)$, dvs. at

$$\mu(\alpha) \geq w := \frac{\sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) - \sum_{j=1}^n \nu(\theta_j)}{t}.$$

Lad $\gamma_1 + \cdots + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + \cdots, \beta_p$ være en ulighed, der definerer $\mu(\alpha)$. Det er nok at vise, at

$$\frac{\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l)}{r} \geq w.$$

Nu regnes på ligning (2.1.1)

$$\begin{aligned}
&\psi_1 + \cdots + \psi_m \leq \theta_1 + \cdots + \theta_n + t\alpha \Leftrightarrow \\
&r(\psi_1 + \cdots + \psi_m) \leq r(\theta_1 + \cdots + \theta_n + t\alpha) \Leftrightarrow \\
&r\sum_{i=1}^m (\psi_i) + t\gamma_1 + \cdots + t\gamma_q \leq r\sum_{j=1}^n (\theta_j) + tr\alpha + t\gamma_1 + \cdots + t\gamma_q \\
&\leq r\sum_{j=1}^n (\theta_j) + t\beta_1 + \cdots + t\beta_p = r\sum_{j=1}^n \theta_j + t\sum_{k=1}^p \beta_k.
\end{aligned}$$

Af induktionsantagelsen følger, at

$$\begin{aligned}
&r\sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) + t\sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l) \leq r\sum_{j=1}^n \nu(\theta_j) + t\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) \Rightarrow \\
&r\sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) - r\sum_{j=1}^n \nu(\theta_j) \leq t\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - t\sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l) \Rightarrow \\
&\frac{\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l)}{r} \geq \frac{\sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) - \sum_{j=1}^n \nu(\theta_j)}{t} = w,
\end{aligned}$$

som ønsket.

<u>$s > 0, t \geq 0$:</u> Det skal vises, at $s\mu(\alpha) + \sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) \leq t\mu(\alpha) + \sum_{j=1}^n \nu(\theta_j)$, men det er som før nok at vise, at $s\mu(\alpha) + \sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) \leq z_1 + \cdots + z_t + \sum_{j=1}^n \nu(\theta_j)$, hvor $z_1, \ldots, z_t$ er vilkårlige af de tal, hvis største nedre grænse er $\mu(\alpha)$. Udtrykket kan forsimples yderligere, idet alle z_i kan sættes lig det mindste. Dvs. lad $\gamma_1 + \cdots + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + \cdots, \beta_p$ være en ulighed, der definerer $\mu(\alpha)$, og lad

$$z = \frac{\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l)}{r}.$$

Da skal det vises, at $s\mu(\alpha) + \sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) \leq tz + \sum_{j=1}^n \nu(\theta_j)$. Nu regnes på ligning (2.1.1)

$$\begin{aligned}
&\psi_1 + \cdots + \psi_m + s\alpha \leq \theta_1 + \cdots + \theta_n + t\alpha \Leftrightarrow \\
&r(\psi_1 + \cdots + \psi_m + s\alpha) \leq r(\theta_1 + \cdots + \theta_n + t\alpha) \Leftrightarrow \\
&r\sum_{i=1}^m (\psi_i) + rs\alpha + t\gamma_1 + \cdots + t\gamma_q \leq r\sum_{j=1}^n (\theta_j) + rt\alpha + t\gamma_1 + \cdots + t\gamma_q \\
&\leq r\sum_{j=1}^n (\theta_j) + t\beta_1 + \cdots + t\beta_p = r\sum_{j=1}^n \theta_j + t\sum_{k=1}^p \beta_k.
\end{aligned}$$

Uligheden

$$r\sum_{i=1}^m \psi_i + t\sum_{l=1}^q \gamma_l + rs\alpha \leq r\sum_{j=1}^n \theta_j + t\sum_{k=1}^p \beta_k$$

definerer $\mu(\alpha)$, så

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha) &\leq \frac{r\sum_{j=1}^n \nu(\theta_j) + t\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - r\sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) - t\sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l)}{rs} \\
&= \frac{1}{s}\left(\sum_{j=1}^n \nu(\theta_j) - \sum_{i=1}^m \nu(\psi_i)\right) + \frac{t}{rs}\left(\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l)\right).
\end{aligned}$$

Heraf følger, at

$$\begin{aligned}
s\mu(\alpha) + \sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) \leq &\left(\sum_{j=1}^n \nu(\theta_j) - \sum_{i=1}^m \nu(\psi_i)\right) \\
&+ t\left(\frac{\sum_{k=1}^p \nu(\beta_k) - \sum_{l=1}^q \nu(\gamma_l)}{r}\right) + \sum_{i=1}^m \nu(\psi_i) = \sum_{j=1}^n \nu(\theta_j) + tz,
\end{aligned}$$

som var det, der skulle vises. Hermed er sætningen bevist. □

Sætning 2.7. Lad $(\mathscr{T}, +, 0, \varepsilon)$ være en kommutativ semigruppe med identitet 0 og et specificeret element ε. Da er følgende to påstande ækvivalente:

(1) For alle $n \in \mathbb{N}$ er $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$.
(2) Der findes et mål $\mu\colon \mathscr{T} \to [0,\infty]$, så $\mu(\varepsilon) = 1$ og $\mu(\alpha+\beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$ for alle $\alpha, \beta \in \mathscr{T}$.

Bevis. (2) $\Rightarrow$ (1): Antag at μ er et mål som beskrevet i (2) og lad $\alpha \leq \beta$. Så findes et γ, så $\alpha + \gamma = \beta$, og derfor gælder, at

$$\mu(\alpha) \leq \mu(\alpha) + \mu(\gamma) = \mu(\alpha + \gamma) = \mu(\beta).$$

Antag, at der findes et $n \in \mathbb{N}$, så $(n+1)\varepsilon \leq n\varepsilon$, så er

$$\mu((n+1)\varepsilon) \leq \mu(n\varepsilon) \Rightarrow (n+1)\mu(\varepsilon) \leq n\mu(\varepsilon) \Rightarrow n+1 \leq n,$$

hvilket er en modstrid. Derfor er $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$, som ønsket.

(1) $\Rightarrow$ (2): Tricket er at udnytte kompaktheden af produktrummet $[0,\infty]^{\mathscr{T}}$, der består af funktioner fra $\mathscr{T}$ ind i $[0,\infty]$, sammen med observationen, at hvis μ ikke er et mål på $\mathscr{T}$ som i (2), da kan dette ses i en endelig delmængde $\mathscr{T}_0$ af $\mathscr{T}$. Antag uden tab af generalitet, at elementerne i $\mathscr{T}$ er begrænsede. Når der findes et mål på de begrænsede elementer, kan dette nemlig udvides ved at tilskrive de ubegrænsede elementer mål ∞.

For hver endelig $\mathscr{T}_0$, der indeholder ε, lad $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ bestå af alle funktioner $f \in [0,\infty]^{\mathscr{T}}$, der opfylder, at (a) $f(\varepsilon) = 1$ og (b) $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ for $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathscr{T}_0$. Bemærk at $\mathscr{T}_0$ opfylder Lemma 2.6. Egenskab (b) er en konsekvens af (ii) fra Lemma 2.6, fordi

$$\alpha + \beta \leq (\alpha+\beta) \Rightarrow f(\alpha) + f(\beta) \leq f(\alpha+\beta),$$
$$(\alpha+\beta) \leq \alpha + \beta \Rightarrow f(\alpha+\beta) \leq f(\alpha) + f(\beta),$$

hvoraf (b) følger. Så Lemma 2.6 garanterer, at $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ ikke er tom.

Kompaktheden af $[0,\infty]^{\mathscr{T}}$ kan forstås som: Hvis en samling af lukkede delmængder af $[0,\infty]^{\mathscr{T}}$ har den endelige skæringsegenskab (dvs. ethvert snit af endeligt mange medlemmer af samlingen ikke er tomt), så er snittet af alle mængderne i samlingen ikke tomt.

For hver endelig $\mathscr{T}_0$, der indeholder ε, er $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ afsluttet. Dette gælder, fordi

$$\begin{aligned} f \notin \mathscr{M}(\mathscr{T}_0) &\Leftrightarrow f(\varepsilon) \neq 1 \vee \exists \alpha, \beta \in \mathscr{T}_0\colon f(\alpha+\beta) \neq f(\alpha) + f(\beta) \\ &\Leftrightarrow f \in V_\varepsilon \cup \left(\bigcup_{\alpha,\beta \in \mathscr{T}_0} U_{\alpha,\beta} \right), \end{aligned}$$

hvor $V_\varepsilon = \{f \in \mathscr{M}(\mathscr{T}_0) \mid f(\varepsilon) \neq 1\}$ og $U_{\alpha,\beta} = \{f \in \mathscr{M}(\mathscr{T}_0) \mid f(\alpha + \beta) \neq f(\alpha) + f(\beta)\}$. Mængderne $V_\varepsilon, U_{\alpha,\beta}$ er åbne, hvorfor deres forening også er åben. Altså er komplementærmængden til $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ åben, så $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$ er afsluttet.

Bemærk, at $\mathscr{M}(\mathscr{T}_1) \cap \cdots \cap \mathscr{M}(\mathscr{T}_\mathrm{n}) \supseteq \mathscr{M}(\mathscr{T}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{T}_\mathrm{n}) = \mathscr{M}(\bigcup_{i=1}^n \mathscr{T}_\mathrm{i})$, hvor hvert $\mathscr{T}_\mathrm{i}$ er en endelig delmængde af $\mathscr{T}$, der indeholder ε. Da $\bigcup_{i=1}^n \mathscr{T}_\mathrm{i}$ også er endelig giver Lemma 2.6, at $\mathscr{M}(\bigcup_{i=1}^n \mathscr{T}_\mathrm{i})$ ikke er tom. Heraf følger, at mængden $\{\mathscr{M}(\mathscr{T}_0) \mid \mathscr{T}_0$ er en endelig delmængde af $\mathscr{T}$, der indholder $\varepsilon\}$ har den endelige skæringsegenskab. Derfor må der findes et μ, der ligger i hver $\mathscr{M}(\mathscr{T}_0)$, og et sådant μ har de ønskede egenskaber; da $\mu \in \mathscr{M}(\{\varepsilon\})$ er $\mu(\varepsilon) = 1$, og da $\mu \in \mathscr{M}(\{\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha + \beta\})$ er $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$ for hvert $\alpha, \beta \in \mathscr{T}$. Hermed er sætningen bevist. □

Definition 2.8. Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X og antag at $E \subseteq X$. E er G-paradoksal, hvis der for to positive heltal m, n findes parvist disjunkte delmængder $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ af E og elementer $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ sådan at $E = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{i=1}^m h_j B_j$.

Hvis og kun hvis $E \subseteq X$ er G-pardoksal og $\varepsilon = [E \times \{0\}] \in \mathscr{S}$, er $2\varepsilon = \varepsilon$. Dette følger af [SW, kor. 3.6 og side 110].

Sætning 2.9 (**Tarskis sætning**)**.** Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X og antag at $E \subseteq X$. Da findes der et endeligt additivt, G-invariant mål $\mu\colon \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$ med $\mu(E) = 1$, hvis og kun hvis E ikke er G-paradoksal.

Bevis. $\Rightarrow$: Denne retning vises ved kontraposition så antag, at E er G-paradoksal. Det skal vises, at der ikke findes et mål μ med de ønskede egenskaber. Lad derfor μ være et endeligt additivt, G-invariant mål med $\mu(E) < \infty$. Da skal det vises, at $\mu(E) \neq 1$.

Da E er G-paradoksal findes elementer $g_1, g_2, \ldots g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m \in G$ og parvist disjunkte mængder $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m \subseteq E$, så $E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) = \bigcup_{i=1}^m h_j(B_j)$. Så gælder

$$\begin{aligned}
\mu(E) &\geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(h_j B_j) \\
&\geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^n g_i A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^m h_j B_j\right) = \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E).
\end{aligned}$$

Da $\mu(E) < \infty$, følger det af ovenstående, at $\mu(E) = 0 \neq 1$. Så der findes intet mål μ med de ønskede egenskaber, hvilket var det, der skulle vises.

$\Leftarrow$: Antag, at E ikke er G-paradoksal. Lad $\mathscr{S}$ være typesemigruppen af G's virkning på X. Da er $2\varepsilon \neq \varepsilon$, hvor $\varepsilon = [E \times \{0\}]$. Nu giver en kontraponeret version af Korollar 2.5, at der for $\varepsilon \in \mathscr{S}$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $(n+1)\varepsilon \not\leq n\varepsilon$. Dette er netop påstand (1) i Sætning 2.7, så sætningen giver, at der findes et endeligt additivt mål ν på $\mathscr{S}$, så $\nu(\varepsilon) = 1$. Det ønskede mål $\mu\colon \mathbb{P}(G) \to [0, \infty]$ er da givet ved $\mu(A) = \nu([A \times \{0\}])$ for $A \subseteq G$. Målet μ er oplagt endeligt additivt, da ν er endeligt additivt, $\mu(E) = \nu([E \times \{0\}]) = \nu(\varepsilon) = 1$ og μ er G-invariant, idet $[E \times \{0\}] = [gE \times \{0\}]$. □

Hvis Tarskis sætning (2.9) anvendes med $E = X = G$ ses det, at en gruppe ikke er paradoksal hvis og kun hvis, den er amenabel. Så mængden af amenable grupper er sammenfaldende med mængden af ikke-paradoksale grupper.

2.2 Venstre-invariant middel

Lad $B(G) = \{f\colon G \to \mathbb{R} \mid f \text{ begrænset}\}$ betegne de begrænsede reelle funktioner på gruppen G, og definer for hvert $g \in G$ en transformation $\tau_g\colon B(G) \to B(G)$ ved $(\tau_g I)(f) = I(\tau_g f)$, hvor $(\tau_g f)(g_0) = f(g^{-1}g_0)$ for alle $g_0 \in G$ og I på $B(G)$. Transformationen τ_g er en virkning, fordi

$$(\tau_{gh} f)(g_0) = f((gh)^{-1}g_0) = f(h^{-1}g^{-1}g_0) = (\tau_h f)(g^{-1}g_0) = (\tau_g(\tau_h f))(g_0) \Rightarrow$$
$$(\tau_{gh} I)(f) = I(\tau_{gh} f) = I(\tau_g(\tau_h f)) = (\tau_g \tau_h I)(f) \Rightarrow \tau_{gh} = \tau_g \tau_h.$$

Sætning 2.10. Lad μ være et endeligt additivt, venstre-invariant mål på $\mathbb{P}(G)$, hvor $\mu(G) = 1$. Da findes en funktional $I_\mu\colon B(G) \to \mathbb{R}$, der opfylder
(1) I_μ er lineær,
(2) $I_\mu(f) \geq 0$, hvis $f(g) \geq 0$ for alle $g \in G$,
(3) $I_\mu(1_G) = 1$,
(4) I_μ er venstre-invariant (dvs. $\tau_g I_\mu = I_\mu$ for alle $g \in G$).

Før sætning 2.10 bevises, er der brug for to lemmaer. Betegn delmængden af $B(G)$, der består af alle de simple funktioner, med $B_{\text{end}}(G) = \{f \in B(G) \mid f(G) \text{ er endelig}\}$.

Lemma 2.11. Mængden $B_{\text{end}}(G)$ er tæt i $B(G)$ mht. supremumsnormen.

Bevis. Lad $f \in B(G)$ og $\varepsilon > 0$. Sæt $\overline{f(G)} = K$ og bemærk at K er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}$, idet K er afsluttet og begrænset på $\mathbb{R}$. Derfor findes $N \in \mathbb{N}$ og parvist disjunkte mængder $V_1, \ldots, V_N \subseteq \mathbb{R}$ så $f(G) \subseteq K \subseteq$

$\bigcup_{j=1}^N V_j$. For tilstrækkeligt stort N kan mængderne vælges, så $\operatorname{diam}(V_j) \leq \varepsilon$ for alle $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Sæt nu $A_j = f^{-1}(V_j)$ for hvert $j \in \{1, \ldots, N\}$. Da er $G = A_1 \cup \cdots \cup A_N$, hvor A_j'erne er parivst disjunkte. For hvert $g \in G$ findes et $j \in \{1, \ldots, N\}$, så $g \in A_j$; lad $\lambda_j \in V_j$, da gælder, at $|f(g) - \lambda_j| \leq \varepsilon$, da $\operatorname{diam}(V_j) \leq \varepsilon$. Sæt nu $f_0 = \sum_{j=1}^N \lambda_j 1_{A_j}$, hvor $\lambda_j \in V_j$ for hvert $j \in \{1, \ldots N\}$. Bemærk at $f_0 \in B_{\text{end}}(G)$, da f_0 kun antager endeligt mange værdier på G, nemlig $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Så er $||f - f_0||_\infty \leq \varepsilon$, da der for hvert $g \in G$ findes $j \in \{1, \ldots N\}$, så $g \in A_j$ og dermed $f_0(g) = \lambda_j \in V_j$.

Nu følger, at $\overline{B_{\text{end}}(G)} = B(G)$, hvilket vil sige, at $B_{\text{end}}(G)$ er tæt i $B(G)$, som var det ønskede resultat. $\square$

Lad μ være som i Sætning 2.10 og lad $f \in B_{\text{end}}(G)$. Så er $f(G) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, hvor $\lambda_j \in \mathbb{R}$ for hvert $j \in \{1, \ldots, N\}$. Sæt nu $A_j = f^{-1}(\lambda_j)$ for $1 \leq j \leq N$, og bemærk at A_j'erne er parvist disjunkte. Definer så $I_\mu^0 \colon B_{\text{end}}(G) \to \mathbb{R}$ ved

$$I_\mu^0(f) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mu(A_j).$$

Det kan forholdsvis nemt tjekkes, at I_μ^0 er lineær; det kan f.eks. gøres, som i [EH, sætn. 6.4]. Det er oplagt at $I_\mu^0(f) \geq 0$, hvis $f(g) \geq 0$ for alle $g \in G$. Desuden er $I_\mu^0(1_G) = \mu(G) = 1$. Sutteligt er I_μ^0 venstre-invariant, da der for alle $g \in G$ gælder, at $\tau_g 1_{A_j} = 1_{gA_j}$, så, da μ er venstre-invariant, er

$$I_\mu^0(\tau_g f) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mu(gA_j) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mu(A_j) = I_\mu^0(f),$$

hvor $f \in B_{\text{end}}(G)$ med $f(G) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ og $A_j = f^{-1}(\lambda_j)$.

Lemma 2.12. Der gælder, at $|I_\mu^0(f)| \leq ||f||_\infty$, for alle $f \in B_{\text{end}}(G)$, dvs. $I_\mu^0 \colon B_{\text{end}}(G) \to \mathbb{R}$ er begrænset og dermed uniformt kontinuert.

Bevis. Ethvert $f \in B_{\text{end}}(G)$ kan skrives på formen $f = \sum_{j=1}^N \lambda_j 1_{A_j}$, hvor $A_j = f^{-1}(\lambda_j)$, så $A_j \cap A_i = \emptyset$, når $j \neq i$, og $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Derfor følger at

$$| I_\mu^0(f) | = \sum_{j=1}^N |\lambda_j| \mu(A_j) \leq ||f||_\infty \sum_{j=1}^N \mu(A_j) = ||f||_\infty \mu(G) = ||f||_\infty,$$

som ønsket. $\square$

Nu gives beviset for Sætning 2.10.

Bevis for sætning 2.10. Nu kan sætningen bevises. Lemma 2.11 giver, at $B_{\text{end}}(G) \subseteq B(G)$ er en tæt delmængde, mens Lemma 2.12 giver, at afbildningen $I_\mu^0\colon B_{\text{end}}(G) \to \mathbb{R}$ er uniformt kontinuert. Da følger det af [CB, sætn. 6.21 og bem. 6.22], at der findes netop én kontinuert funktion $I_\mu\colon B(G) \to \mathbb{R}$, så $I_\mu|_{B_{\text{end}}(G)} = I_\mu^0$, og så I_μ bevarer egenskaberne for I_μ^0. Dvs. I_μ^0 udvider til en funktional $I_\mu\colon B(G) \to \mathbb{R}$, der opfylder (1) – (4). □

Betingelse (2) og (3) i Sætning 2.10 kan erstattes af betingelsen

$$\inf_{g\in G}\{f(g)\} \leq I_\mu(f) \leq \sup_{g\in G}\{f(g)\}.$$

Derfor kaldes den lineære funktional I_μ for et venstre-invariant middel på G. En amenabel gruppe har altid et venstre-invariant middel. Omvendt, hvis $F\colon B(G) \to \mathbb{R}$ er et venstre-invariant middel, kan $\mu\colon \mathbb{P}(G) \to \mathbb{R}$ definers ved $\mu(A) = F(1_A)$, hvor $A \subseteq G$. Da er μ det mål, der sikrer, at G er amenabel. Derfor er en gruppe G amenabel, hvis og kun hvis G bærer et venstre-invariant middel.

2.3 Amenable grupper

I dette afsnit gives en række eksempler på grupper, der er amenable.

Eksempel 2.13. Endelige grupper er amenable.

Det kan rimelig nemt tjekkes, at $\mu(A) = \frac{|A|}{n}$, hvor $|G| = n < \infty$ og $A \subseteq G$, er det ønskede mål på den endelige gruppe G.

Eksempel 2.14. En undergruppe af en amenabel gruppe er selv amenabel.

Antag at G er en amenabel gruppe med et mål μ, der bekræfter dette, og lad H være en undergruppe i G. Lad M være en mængde af repræsentanter for samlingen af højre sideklasser af H i G. Definer nu ν på $\mathbb{P}(H)$ ved

$$\nu(A) = \mu\left(\bigcup_{g\in M} Ag\right).$$

Det kan igen tjekkes, at ν er det ønskede mål på undergruppen H.

Eksempel 2.15. Hvis N er en normal undergruppe i den amenable gruppe G, så er kvotientgruppen G/N amenabel.

Hvis μ er et mål, der sikrer amenabiliteten af G, så kan det igen nemt tjekkes, at $\nu\colon \mathbb{P}(G/N) \to [0,1]$ givet ved $\nu(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$, hvor $A \subseteq G/N$ og $\pi\colon G \to G/H$ er den kanoniske projektion, er som ønsket.

Eksempel 2.16. Lad G være en gruppe og $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G$ undergrupper, så $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ og alle G_n er amenable, da er G også amenabel.

Det er lidt sværere at vise, hvorfor gruppen G i Eksempel 2.16 er amenabel. Et bevis for en lidt mere generel påstand gives i [SW, side 150].

Sætning 2.17. Hvis N er en normal undergruppe i G og både kvotientgruppen G/N og undergruppen N er amenable, da er gruppen G amenabel.

Bevis. Lad ν_1 og ν_2 være mål på N hhv. G/N, der sikrer amenabilitet. For hvert $A \subseteq G$ lad $f_A \colon G \to \mathbb{R}$ være defineret ved $f_A(g) = \nu_1(N \cap g^{-1}A)$. Hvis g_1 og g_2 definerer samme sideklasse af N i G gælder at $f_A(g_1) = f_A(g_2)$, idet

$$\begin{aligned} g_2^{-1}g_1 = h \in N \Rightarrow f_A(g_2) &= \nu_1(N \cap g_2^{-1}A) = \nu_1(N \cap hg_1^{-1}A) \\ &= \nu_1(h(N \cap g_1^{-1}A)) = \nu_1(N \cap g_1^{-1}A) = f_A(g_1), \end{aligned}$$

hvor invariansen af ν_1 anvendtes ved næstsidste lighedstegn. Derfor kan f_A betragtes som en funktion med definitionsmængde G/N.

Det giver derfor mening at definere μ på G ved $\mu(A) = \int_{G/N} f_A \, d\nu_2$. Da

$$f_G(g) = \nu_1(N \cap g^{-1}G) = \nu_1(N \cap G) = \nu_1(N) = 1,$$

er $f_G = id_G$ og dermed er $\mu(G) = \int_{G/N} f_G \, d\nu_2 = \nu_2(G/N) = 1$. Lad nu A og B være to disjunkte delmængder af G. For $g \in G$ gælder, at

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset \Rightarrow g^{-1}(A \cap B) = (g^{-1}A) \cap (g^{-1}B) = \emptyset \Rightarrow N \cap (g^{-1}A \cap g^{-1}B) \\ = (N \cap g^{-1}A) \cap (N \cap g^{-1}B) = \emptyset. \end{aligned}$$

Med dette en mente betragtes

$$\begin{aligned} f_{A \cup B}(g) &= \nu_1(N \cap g^{-1}(A \cup B)) = \nu_1(N \cap (g^{-1}A \cup g^{-1}B)) \\ &= \nu_1((N \cap g^{-1}A) \cup (N \cap g^{-1}B)) = \nu_1(N \cap g^{-1}A) + \nu_1(N \cap g^{-1}B) \\ &= f_A(g) + f_B(g). \end{aligned}$$

Heraf følger, at μ er endeligt additiv, fordi integralet er lineært. Slutteligt skal det vises, at μ er venstre-invariant. Lad $g_0 \in G$ og lad for hvert $g \in G$ $\tau_g \colon G \to G$ være en virkning givet ved $(\tau_g f_A)(g_0) = f_A(g^{-1}g_0)$, så er

$$f_{gA}(g_0) = \nu_1(N \cap g_0^{-1}gA) = f_A(g^{-1}g_0) = (\tau_g f_A)(g_0).$$

Derfor, idet integralet er venstre-invariant, gælder

$$\mu(gA) = \int f_{gA} \, d\nu_2 = \int \tau_g f_A \, d\nu_2 = \int f_A \, d\nu_2 = \mu(A).$$

Nu er sætningen vist. □

Eksempel 2.18. Abelske grupper er amenable.

Det er på ingen måde trivielt at indse, at abelske grupper er amenable. Det vil i Afsnit 3.2 blive vist, at abelske grupper er eksponentielt begrænsede, og at eksponentielt begrænsede grupper er supamenable og dermed amenable.

Definition 2.19. En gruppe G siges at være løsbar, hvis der findes undergrupper $\{1\} \subseteq G_1 \subset \cdots \subseteq G_{k-1} \subseteq G$, så G_{j-1} er normal i G_j og kvotientgruppen G_j/G_{j-1} er abelsk for hvert $1 \leq j \leq k$.

Sætning 2.17 og Eksempel 2.18 giver tilsammen, at alle løsbare grupper er amenable. Dette følger af et simpelt induktionsargument. Antag at alting er som i Definition 2.19; gruppen $\{1\}$ er oplagt amenabel. Antag, at G_{j-1} er amenabel. Eksempel 2.18 giver, at G_j/G_{j-1} er amenabel, så det følger nu af Sætning 2.17, at G_j er amenabel. Da der kun er endeligt mange undergrupper, følger det, at G er amenabel.

2.4 Yderligere karakterisering af amenabilitet

I Afsnit 2.1 blev det via Tarskis sætning (2.9) vist, at amenabilitet af en gruppe er ækvivalent med, at gruppen ikke er paradoksal og i Afsnit 2.2, at der findes et venstre-invariant middel på en gruppe hvis og kun hvis, den er amenabel. Der er desuden en række andre betingelser, der er ækvivalente med amenabilitet. Nogle af disse præsenteres nedenfor.

Sætning 2.20 (**Alaoglus sætning**)**.** Antag at X er et normeret vektorrum, og at X^* er det duale rum til X bestående af begrænsede lineære funktionaler på X. Så er den lukkede enhedskugle $(X^*)_1 = \{F \in X^* \mid ||F|| \leq 1\}$ i X^* kompakt i weak* topologien, der for et net $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ er givet ved

$$F_\alpha \to F \Leftrightarrow \forall f \in X \colon F_\alpha(f) \to F(f).$$

Et bevis for ovenstående sætning er givet i [GBF, side 162].

Sætning 2.21. Gruppen G er amenabel, hvis G opfylder Markov-Kakutanis fixpunktssætning: Lad K være en kompakt konveks delmængde af et lokalt konvekst lineært topologisk rum X, og antag at G virker på K, sådan at hver transformation $\tau_g \colon K \to K$ er kontinuert og affin (dvs. $\tau_g(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2) = \lambda\tau_g(F_1) + (1-\lambda)\tau_g(F_2)$ for $F_1, F_2 \in K$ og $0 \leq \lambda \leq 1$). Da findes et $F \in K$, så $\tau_g(F) = F$ for hvert $g \in G$.

Bevis. Antag at Markov-Kakutani gælder. Udstyr $B(G)$ med supremumsnormen $||f||_\infty = \sup\{|f(g)| \mid g \in G\}$, så det bliver et normeret lineært rum. Lad

$X = B(G)^*$ betegne det duale rum til $B(G)$ givet ved $B(G)^* = \{F\colon B(G) \to \mathbb{R} \mid ||F|| < \infty, F \text{ lineær funktional}\}$, hvor $||F|| = \sup\{|F(f)| \mid f \in B(G), ||f||_\infty \leq 1\}$. Udtyr $B(G)^*$ med weak* topologien. I denne topologi er $B(G)^*$ et lokalt konvekst lineært topologisk rum.

Lad K være en delmængde af $B(G)^*$ bestående af funktionaler F, der opfylder at $\inf(f) \leq F(f) \leq \sup(f)$ for alle $f \in B(G)$. Bemærk at hvert $F \in K$ opfylder, at $\frac{|F(f)|}{||f||_\infty} \leq 1$, så K er indeholdt i den lukkede enhedskugle $(B(G)^*)_1 = \{F \in B(G)^* \mid ||F|| \leq 1\}$ i $B(G)^*$. Da $(B(G)^*)_1$ er kompakt i følge Alaoglus sætning (2.20) og K er afsluttet, er K en kompakt delmængde af $B(G)^*$. Herudover er K konveks; lad $F_1, F_2 \in K$ og $0 < \lambda < 1$, da er $F_3 = \lambda F_1 + (1-\lambda)F_2 \in B(G)^*$. Om F_1, F_2 gælder for alle $f \in B(G)$, at

$$\lambda \inf(f) \leq \lambda F_1(f) \leq \lambda \sup(f),$$

$$(1-\lambda)\inf(f) \leq (1-\lambda)F_2(f) \leq (1-\lambda)\sup(f).$$

Hvis de to uligheder lægges sammen, fås at $\inf(f) \leq F_3(f) \leq \sup(f)$ for alle $f \in B(G)$, så $F_3 \in K$, derfor er K konveks.

For hvert $g \in G$ er transformationen τ_g, som er givet ved $(\tau_g F)(f) = F(\tau_g f)$, hvor $\tau_g f(h) = f(g^{-1}h)$, kontinuert, fordi der for et net $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ gælder

$$\begin{aligned} F_\alpha \to F &\Rightarrow \forall f \in B(G)\ F_\alpha(f) \to F(f) \Rightarrow \forall f \in B(G)\ F_\alpha(\tau_g f) \to F(\tau_g f) \\ &\Rightarrow \forall f \in B(G)\ (\tau_g F_\alpha)(f) \to (\tau_g F)(f) \Rightarrow \tau_g F_\alpha \to \tau_g F. \end{aligned}$$

Da F er lineær og $(\tau_g F)(f) = F(\tau_g f)$, er τ_g også lineær og dermed affin. Transformationen τ_g afbilder fra K til K, fordi

$$\begin{aligned} \inf(\tau_g f) &= \{|\tau_g f(h)| \mid h \in G\} = \{f(g^{-1}h) \mid h \in G\} \\ &= \{f(k) \mid k \in g^{-1}G\} = \{f(k) \mid k \in G\} = \inf(f) \end{aligned}$$

og på samme vis $\sup(\tau_g f) = \sup(f)$. Alle antagelserne i Markov-Kakutanis fixpunksætning er derfor opfyldt, så den giver, at der findes $F \in K$, så $\tau_g F = F$ for alle $g \in G$. Et sådant F er et venstre-invariant middel på G, derfor er G amenabel. $\square$

Sætningen gælder også den anden vej, men beviset, der kan findes i [SW, side 159-160], udelades her.

Sætning 2.22 (Hahn-Banach). Lad V være et reelt vektorrum med en seminorm p, og lad $V_0 \subseteq V$ være et underrum. Hvis $F\colon V_0 \to \mathbb{R}$ er en lineær funktional så $F(v) \leq p(v)$ for alle $v \in V_0$, så findes en lineær funktional $\overline{F}\colon V \to \mathbb{R}$, så $\overline{F}_{|V_0} = F$ og $\overline{F}(v) \leq p(v)$ for alle $v \in V$.

Beviset for denne sætning kan findes i [GBF, side 149-150].

Sætning 2.23. En gruppe G er amenabel hvis og kun hvis G opfylder Hahn-Banachs udvidelsesegenskab: Antag at

(a) G er en gruppe af lineære operatorer på et reelt vektorrum V,

(b) F er en G-invariant lineær funktional på V_0, som er et G-invariant underrum af V,

(c) $F(v) \leq p(v)$ for alle $v \in V_0$, hvor p er en reel funktion på V så $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$ for $v_1, v_2 \in V$, $p(\alpha v) = \alpha p(v)$ for $\alpha \geq 0, v \in V$ og $p(g(v)) \leq p(v)$ for $g \in G, v \in V$.

Da findes en G-invariant lineær funktional $\overline{F}$ på V, så $\overline{F}_{|V_0} = F$ og $F(v) \leq p(v)$ for alle $v \in V$.

Bevis. $\Rightarrow$: Lad G være en amenabel gruppe. Lad V være et reelt vektorrum med en seminorm p, og lad $V_0 \subseteq V$ være et underrum. Antag at F_0 er en lineær funktional på V_0, så $F_0(v) \leq p(v)$ for alle $v \in V_0$. Ved Hahn-Banach (2.22) fås en lineær fuktional F på V, hvis restriktion til V_0 er F_0, så $F(f) \leq p(f)$ for alle $v \in V$. Definer for $v \in V$ en funktion $f_v \colon G \to \mathbb{R}$ ved $f_v(h) = F(h^{-1}(v))$. Da

$$F(h^{-1}(v)) \leq p(h^{-1}(v)) \leq p(v),$$

er f_v begrænset af $p(v)$.

Lad μ være et endelig additivt, venstre-invariant mål på G med $\mu(G) = 1$ og definer $\overline{F} \colon V \to \mathbb{R}$ ved $\overline{F}(v) = \int_G f_v \, d\mu$. Da er

$$\overline{F}(v) = \int_G f_v \, d\mu \leq \int_G p(v) \, d\mu = p(v)\mu(G) = p(v),$$

og $\overline{F}$ er lineær, fordi integralet er det. Desuden er $\overline{F}$ en udvidelse af F, idet der for $v \in V_0$ gælder at

$$f_v(h) = F(h^{-1}(v)) = F_0(h^{-1}(v)) = F_0(v),$$

som medfører at $\overline{F}(v) = \int_G F_0(v) \, d\mu = F_0(v)$, da $F_0(v)$ er en konstant. Desuden er $\overline{F}$ G-invariant. Dette følger, da der for transformationen τ_g givet ved $\tau_g f_v(h) = f_v(g^{-1}h)$ gælder, at

$$f_{g(v)}(h) = F(h^{-1}(g(v))) = F((h^{-1}g)(v)) = F((g^{-1}h)^{-1}(v)) = f_v(g^{-1}h) = \tau_g f_v(h).$$

Så G-invariansen af μ medfører, at

$$\overline{F}(g(v)) = \int_G f_{g(v)} \, d\mu = \int_G \tau_g f_v \, d\mu = \int_G f_v \, d\mu = \overline{F}(v).$$

Hermed er det ønskede vist.

$\Leftarrow$: Antag at udvidelsesegenskaben gælder. Lad $V = B(G)$ og lad V_0 betegne underrummet af konstante funktioner. Virkningen $G \curvearrowright B(G)$ er lineær og V_0 er oplagt G-invariant. Lad $F\colon V_0 \to \mathbb{R}$ være givet ved $F(\alpha 1_G) = \alpha$, da er F oplagt G-invariant og lineær. Lad $p(f) = \sup\{f(g) \mid g \in G\}$, da tjekkes det nemt at p opfylder betingelse (c). Da er antagelserne (a)-(c) opfyldt. Altså findes en venstre-invariant lineær funktional $\overline{F}$ på $B(G)$, så $\overline{F}(f) \leq p(f)$ for alle $f \in B(G)$ og $\overline{F}_{|V_0}(1_G) = F(1_G) = 1$. Hvis det kan vises, at $\overline{F}(f) \geq 0$, når $f(g) \geq 0$ for hvert $g \in G$, så er $\overline{F}$ en venstre-invariant middel på G, og dermed er G amenabel. Men hvis $f(g) \geq 0$ for alle $g \in G$, så er $-f(g) \leq 0$ for alle $g \in G$ og dermed er

$$\overline{F}(-f) \leq p(-f) = \sup\{-f(g) \mid g \in G\} \leq 0 \Rightarrow \overline{F}(f) = -\overline{F}(-f) \geq 0.$$

Så er det ønskede vist. □

Sætning 2.24. En gruppe G er amenabel, hvis den opfylder Diximers betingelse: Hvis $f_1, \ldots, f_n \in B(G)$ og $g_1, \ldots, g_n \in G$, da findes et $h \in G$, så $\sum_{i=1}^n f_i(h) - f_i(g_i^{-1}h) \leq 0$.

Bevis. Lad V_0 være underrummet i $B(G)$ udspændt af de konstante funktioner og alle funktioner på formen $f - \tau_g f$, hvor $f \in B(G)$, $g \in G$ og $\tau_g f(h) = f(g^{-1}h)$ for alle $g \in G$. I det følgende forkortes notationen, sådan at $\tau_g f = {}_g f$. Et element i V_0 er derfor på formen $f - {}_g f + \alpha 1_G$ for et $\alpha \in \mathbb{R}$. Af antagelsen følger, at der findes et $h_1 \in G$, så funktionsværdien af $(f_1 - {}_{g_1} f_1) - (f_2 - {}_{g_2} f_2) = (f_1 - {}_{g_1} f_1) + ((-f_2) - {}_{g_2}(-f_2))$ i h_1 er mindre end eller lig med 0. Tilsvarende findes $h_2 \in G$, så funktionsværdien $(f_2 - {}_{g_2} f_2) - (f_1 - {}_{g_1} f_1)$ er mindre end eller lig med 0 i h_2. Lad

$$f_1 - {}_{g_1} f_1 + \alpha 1_G = f_2 - {}_{g_2} f_2 + \beta 1_G$$

Da er $\alpha = \beta$, dvs. konstanten definerer elementet entydigt. Dette gælder, fordi ovenstående medfører, at

$$(f_1 - {}_{g_1} f_1) - (f_2 - {}_{g_2} f_2) = (\beta - \alpha) 1_G$$
$$(f_2 - {}_{g_2} f_2) - (f_1 - {}_{g_1} f_1) = (\alpha - \beta) 1_G$$

Hvis h_1 indsættes i første udtryk, står at læse, at $\beta - \alpha \leq 0$, og indsættes h_2 i andet udtryk, ses at $\alpha - \beta \leq 0$, hvilket medfører at $\alpha = \beta$. Derfor kan en lineær funktional F på V_0 defineres ved $F(f - {}_g f + \alpha 1_G) = \alpha$.

Påstanden er nu, at $F(v) \leq \sup v$ for hvert $v \in V_0$. Hvis $v = f - {}_g f + \alpha 1_G$, antager $-(f - {}_g f) = -f - {}_g(-f)$ en negativ værdi for et $h \in G$, så

$v = \alpha 1_G - (-(f - {}_g f))$ antager en værdi $v(h) \geq \alpha = F(v)$. Selvfølgelig er $\sup v \geq v(h)$, så i alt er $F(v) \leq \sup v$ for alle $v \in V_0$, som ønsket.

Sæt nu $p(v) = \sup v$ for $v \in B(G)$ og anvend Hahn-Banach (2.22) til at opnå en lineær funktional $\overline{F}$ på $B(G)$, der udvider F og er begrænset af p. Definitionen af F sikrer, at $\overline{F}$ er venstre-invariant og $\overline{F}(1_G) = F(1_G) = 1$. Desuden gælder for $f(h) \geq 0$ for alle $h \in G$, at

$$\overline{F}(f) = -\overline{F}(-f) \geq -p(-f) \geq 0.$$

Derfor er $\overline{F}$ et venstre-invariant middel på G, så G er amenabel som ønsket. □

2.5 Virkninger på kompakte hausdorffrum

Formålet med dette afsnit er at bevise følgende sætning: Den diskrete gruppe G er amenabel, hvis og kun hvis der for hvert kompakt hausdorffrum K og hver virkning af G på K findes et G-invariant sandsynlighedsmål. Til dette formål kræves bl.a. Riesz' repræsentationssætning, som formuleres nedenfor.

For et lokalt kompakt hausdorffrum X, lad $C_c(X)$ betegne alle de kontinuerte funktioner på X, der har kompakt støtte givet ved $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$.

Definition 2.25. Et borelmål λ på et hausdorffrum X, siges at være et radonmål, hvis det er endeligt på kompakte mængder, ydre regulært på borelmængder (dvs. $\lambda(B) = \inf\{\lambda(U) \mid B \subseteq U, U \text{ åben}\}$ for enhver borelmængde $B \subseteq X$) og indre regulært på åbne mængder (dvs. $\lambda(U) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq U, K \text{ kompakt}\}$ for enhver åben mængde $U \subseteq X$).

Sætning 2.26 (Riesz' repræsentationssætning). Lad X være et lokalt kompakt hausdorffrum, og lad $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ være en lineær positiv funktional. Da findes netop ét radonmål λ på X, så der for alle $f \in C_c(X)$ gælder

$$\Lambda(f) = \int_X f \, d\lambda.$$

Beviset for ovenstående sætning, kan findes i [GBF, side 205-208]. Lad $C(K)$ betegne de kontinuerte funktioner på et kompakt hausdorffrum K. I tilfældet, hvor $X = K$ er et kompakt hausdorffrum, og dermed også lokalt kompakt, er $C_c(K) = C(K)$, fordi støtten er et afsluttet underrum i $C(K)$, og dermed kompakt for hvert $f \in C(K)$. Derfor lyder Riesz' repræsentationssætning (2.26) i det tilfælde, og under den ekstra antagelse, at funktionalen I opfylder, at $I(1) = 1$, som følger:

Sætning 2.27 (**Riesz' repræsentationssætning**). Lad K være et kompakt hausdorffrum og $I\colon C(K) \to \mathbb{C}$ en lineær positiv, funktional, der opfylder $I(1) = 1$. Da findes netop ét regulært sandsynlighedsmål μ på K, så der for $f \in C(K)$ gælder at

$$I(f) = \int_K f \; d\mu.$$

Det duale rum, $C(K)^*$, til $C(K)$ er givet ved

$$C(K)^* = \{I\colon C(K) \to \mathbb{C} \mid ||I|| < \infty, I \text{ lineær}\},$$

hvor $||I|| = \sup\{|I(f)| \mid f \in C(K), ||f||_\infty \leq 1\}$. Det duale rum $C(K)^*$ kan udstyres med weak* topologien, der er givet ved

$$I_\alpha \to I \Leftrightarrow \forall f \in C(K)\colon I_\alpha(f) \to I(f),$$

hvor $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ er et net. I denne topologi er $C(K)^*$ et lokalt konvekst rum.

Korollar 2.28. Delmængden $M = \{I\colon C(K) \to \mathbb{C} \mid I \text{ lineær, positiv}, I(1) = 1\}$ af $C(K)^*$ er kompakt i weak* topologien.

Bevis. Ved Alaoglus sætning (2.20) er den lukkede enhedskugle $(C(K)^*)_1 = \{I \in C(K)^* | \; ||I|| \leq 1\}$ kompakt i $C(K)^*$ i weak* topologien. Det er derfor tilstrækkeligt at vise, at M er en afsluttet delmængde af $C(K)^*$ i weak* topologien.

M er en delmængde af $(C(K)^*)_1$. Lad nemlig $I \in M$ og antag først, at $I(f) \in \mathbb{R}$ for $f \in C(K)$ med reelle værdier; i det komplekse tilfælde, skal $I(f)$ opdeles i reel- og imaginærdel. Da I er lineær og $I(1) = 1$, er

$$-||f||_\infty \leq f \leq ||f||_\infty \Rightarrow -||f||_\infty I(1) \leq I(f) \leq ||f||_\infty I(1) \Rightarrow |I(f)| \leq ||f||_\infty.$$

Så $||I|| = \sup\{|I(f)| \mid f \in C(K), ||f||_\infty \leq 1\} = 1$.

Det skal nu vises, at M er afsluttet, dvs. at M indeholder alle sine grænsepunkter. Lad derfor I_0 være et vilkårligt grænsepunkt for M, og lad $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ være et net i M med I_0 som grænsepunkt. Det skal vises, at I_0 er lineær, positiv og at $I_0(1) = 1$.

Da I_α er positiv, gælder der for alle $f \geq 0$, at $I_\alpha(f) \geq 0$. Og heraf følger, at

$$I_\alpha \to I_0 \Rightarrow \forall f \in C(K)\colon I_\alpha(f) \to I_0(f) \Rightarrow I_0(f) \geq 0.$$

Derfor er I_0 positiv. Lad nu $f = af_1 + bf_2$, for vilkårlige $a, b \in \mathbb{C}$ og $f_1, f_2 \in C(K)$ og se at

$$I_\alpha \to I_0 \Rightarrow I_\alpha(f) \to I_0(f)$$

$$I_\alpha \to I_0 \Rightarrow I_\alpha(f) = I_\alpha(af_1 + bf_2) = aI_\alpha(f_1) + bI_\alpha(f_2) \to aI_0(f_1) + bI_0(f_2)$$

Heraf følger, at $I_0(f) = aI_0(f_1) + bI_0(f_2)$. Da f var vilkårlig, er I_0 lineær. Betragt slutteligt

$$I_\alpha \to I_0 \Rightarrow I_\alpha(1) \to I_0(1) \Rightarrow 1 \to I_0(1) \Rightarrow I_0(1) = 1$$

Hermed er det ønskede vist. □

Lemma 2.29. Mængden $M = \{I \colon C(K) \to \mathbb{C} \mid I \text{ lineær, positiv, } I(1) = 1\}$ er konveks.

Bevis. Det skal vises, at der for alle $I_1, I_2 \in M$ og $0 < \lambda < 1$ gælder, at $I_3 = \lambda I_1 + (1-\lambda)I_2 \in M$. Lad $a, b \in \mathbb{C}$ og $f_1, f_2 \in C(K)$. I_3 er lineær, da

$$\begin{aligned}
I_3(af_1 + bf_2) &= \lambda I_1(af_1 + bf_2) + (1-\lambda)I_2(af_1 + bf_2) \\
&= \lambda a I_1(f_1) + \lambda b I_1(f_2) + (1-\lambda)aI_2(f_1) + (1-\lambda)bI_2(f_2) \\
&= a(\lambda I_1(f_1) + (1-\lambda)I_2(f_1)) + b(\lambda I_1(f_2) + (1-\lambda)I_2(f_2)) \\
&= aI_3(f_1) + bI_3(f_2).
\end{aligned}$$

I_3 er oplagt positiv, da I_1 og I_2 er positive, og $\lambda > 0$ og $1 - \lambda > 0$. Desuden er

$$I_3(1) = \lambda I_1(1) + (1-\lambda)I_2(1) = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Derfor er $I_3 \in M$ som ønsket. Så M er konveks. □

Nu er alle forberedelser gjort til at vise afsnittets hovedsætning om amenable grupper.

Sætning 2.30. Lad G være en diskret gruppe. Gruppen G er amenabel, hvis og kun hvis der for hvert kompakt hausdorffrum K og hver virkning af G på K findes et G-invariant sandsynlighedsmål.

Bevis. $\Rightarrow$: Antag at G er amenabel. Lad $g \in G$ og definer $\tau_g \colon M \to M$ ved $(\tau_g I)(f) = I(\tau_g f)$, hvor $(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x)$ for $I \in M$ og $f \in C(K)$. Det tjekkes, om $\Gamma \curvearrowright M$ opfylder Markov-Kakutanis fixpunktssætning. Det er allerede vist, at M er en kompakt, konveks delmængde af det lokalt konvekse, lineære topologiske rum $C(K)^*$. Det står derfor tilbage at vise, at τ_g er en virkning ($\tau_g \tau_h = \tau_{gh}$), der er kontinuert og affin. Det kan vises, at τ_g er en virkning, på samme måde, som i begyndelsen af Afsnit 2.2, og at denne virkning er kontinuert og lineær (og dermed affin), kan vises som i Sætning 2.21. Altså opfylder $\Gamma \curvearrowright M$ Markov-Kakutanis fixpunktssætning. Derfor findes et $I_0 \in M$ så $\tau_\gamma I_0 = I_0$ for alle $\gamma \in \Gamma$.

Riesz' repræsentationssætning (2.27) giver, at der findes netop ét sandsynlighedsmål μ på K, så der for $f \in C(K)$ gælder, at

$$I_0(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Nu skal det blot vises, at μ er G-invariant. Lad derfor $g \in G$ og sæt $\mu'(E) = \mu(g^{-1}E)$ for $E \subseteq K$. Det skal nu vises, at $\mu' = \mu$.

$$\int_K f \, d\mu = I_0(f) = (\tau_g I_0)(f) = I_0(\tau_g f) = \int_K \tau_g f \, d\mu = \int_K f \, d\mu'.$$

Da Riesz' repræsentationssætning (2.27) gav, at μ er entydig, står det klart, at $\mu = \mu'$, og dermed er det vist, at μ er invariant.

$\Leftarrow$: Antag at G ikke er amenabel. Det skal vises, at der findes et kompakt hausdorffrum K og en virkning af G på K, så der ikke findes noget G-invariant sandsynlighedsmål.

Den kanoniske virkning af en gruppe G på sin betakompaktifikation βG, opfylder dette, men det er ikke-trivielt at tjekke, og udelades her. $\square$

I Afsnit 3.4 gennemgås i detaljer det lignende resultat, at hvis G er en diskret gruppe, så er G supramenabel hvis og kun hvis der for hvert lokalt kompakt hausdorffrum X og hver virkning af G på X findes et ikke-trivielt G-invariant radonmål.

3 Supramenabilitet

Dette kapitel indeholder en definition af supramenabilitet samt en række eksempler på supramenable grupper. Herudover vises det, at eksponentielt begrænsede grupper er supramenable, hvoraf det følger, at abelske grupper er supramenable og dermed også amenable. Der gives desuden et eksempel på en gruppe, der er amenabel, men ikke supramenabel. Diskrete supramenable grupper karakteriseres herefter ved deres virkning på lokalt kompakte hausdorffrum, og slutteligt beskrives supramenabilitet ved brug af uniforme afbildninger. Kapitlet er primært skrevet ud fra Kapitel 12 i [SW] og Afsnit 2 og 3 i [KMR].

Definition 3.1. En gruppe G er supramenabel, hvis der for enhver ikke-tom delmængde $A \subseteq G$ findes et endeligt additivt, venstre-invariant mål $\mu\colon \mathbb{P}(G) \to [0,\infty]$ med $\mu(A) = 1$.

Af Tarskis sætning (2.9) følger, at supramenabilitet på G er ækvivalent med, at der ikke findes nogen ikke-tomme delmængder af G, der er paradoksale.

Det er selvfølgelig oplagt, at alle supamenable grupper også er amenable, men inklusionen er skarp, fordi der findes eksempler på grupper, der er amenable, men ikke supamenable. Et sådant eksempel bliver givet i Afsnit 3.3.

Sætning 3.2. Antag at en supramenabel gruppe G virker på en mængde X, og at E er en ikke-tom delmængde af X. Da findes der et endeligt additivt, G-invariant mål $\mu\colon \mathbb{P}(X) \to [0,\infty]$, sådan at $\mu(E) = 1$. Derfor findes der ingen ikke-tomme delmængder af X, der er G-paradoksale.

Bevis. Lad G være en supramenabel gruppe, der virker på en mængde X. Fasthold et $x \in A \subseteq X$. Tildel til hver delmængde $B \subseteq X$ en anden delmængde $B^* \subseteq G$, hvor $B^* = \{g \in G \mid gx \in B\}$. Bemærk, at identiteten på G ligger i mængden A^*, fordi $x \in A$. Derfor er A^* ikke tom. Da G er supramenabel findes et endeligt additivt, venstre-invariant mål $\nu\colon \mathbb{P}(G) \to [0,\infty]$, så $\nu(A^*) = 1$. Definer nu det ønskede mål μ på $\mathbb{P}(X)$ ved $\mu(B) = \nu(B^*)$. Da er $\mu(A) = \nu(A^*) = 1$. Lad $N, M \subseteq X$, hvor $N \cap M = \emptyset$. Da gælder det oplagt, at $N^* \cap M^* = \emptyset$ og dermed at

$$\mu(N \cup M) = \nu((N \cup M)^*) = \nu(N^* \cup M^*) = \nu(N^*) + \nu(M^*) = \mu(N) + \mu(M),$$

idet den endelige additivitet af ν anvendes. Derfor er μ også endeligt additiv. Det står nu kun tilbage at vise, at μ er G-invariant. Lad $h \in G$, da er

$$\begin{aligned}(hB)^* &= \{g \in G \mid gx \in hB\} = \{g \in G \mid h^{-1}gx \in B\} \\ &= \{g \in G \mid h^{-1}g \in B^*\} = \{g \in G \mid g \in hB^*\} = hB^*.\end{aligned}$$

Nu kan venstre-invariansen af ν bruges til at vise G-invariansen af μ:

$$\mu(gB) = \nu((gB)^*) = \nu(gB^*) = \nu(B^*) = \mu(B).$$

Der findes derfor et mål $\mu\colon \mathbb{P}(X) \to [0,\infty]$ med de ønskede egenskaber. Sidste del af sætningen følger direkte af Tarskis sætning (2.9). $\square$

Proposition 3.3. Hvis en gruppe G indeholder frie generatorer, σ, ρ, af en fri undersemigruppe i G, så er G ikke supramenabel.

Bevis. Antag at G indeholder frie generatorer, σ, ρ, og lad S være den frie undersemigruppe frembragt af σ, ρ. Lad $A = \sigma S = \{$ord, der begynder med $\sigma\}$, $B = \rho S = \{$ord, der begynder med $\rho\}$. Da er $A \cap B = \emptyset$ og $S = \sigma^{-1}A = \rho^{-1}B$ for $\sigma^{-1}, \rho^{-1} \in G$. Altså er S paradoksal mht. G. Ved Sætning 3.2 er G derfor ikke supamenabel. $\square$

3.1 Supramenable grupper

Som i Afsnit 2.3 om amenable grupper præsenteres her nogle sætninger, der identificerer, hvilke grupper, der er supramenable.

Sætning 3.4. Endelige grupper er supramenable.

Bevis. Lad G være en endelig gruppe og $A \subseteq G$, hvor A ikke er tom. Definer $\mu\colon \mathbb{P}(G) \to [0,\infty]$ ved $\mu(B) = \frac{|B|}{|A|}$, hvor $B \subseteq G$. Målet μ er endeligt additivt, da der for $B_1, B_2 \subseteq G$, hvor $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, gælder

$$\mu(B_1 \cup B_2) = \frac{|B_1 \cup B_2|}{|A|} = \frac{|B_1| + |B_2|}{|A|} = \frac{|B_1|}{|A|} + \frac{|B_2|}{|A|} = \mu(B_1) + \mu(B_2).$$

Målet μ er oplagt venstre-invariant, da $\mu(gB) = \frac{|gB|}{|A|} = \frac{|B|}{|A|} = \mu(B)$, og desuden gælder det, at $\mu(A) = \frac{|A|}{|A|} = 1$, så μ er det ønskede mål. $\square$

Sætning 3.5. En undergruppe af en supramenabel gruppe er supramenabel.

Bevis. Lad H være en undergruppe af en supramenabel gruppe G og lad $A \subseteq H$, hvor $A \neq \emptyset$. Der findes et mål $\mu\colon \mathbb{P}(G) \to [0,\infty]$, der er endeligt additivt, venstre-invariant og opfylder, at $\mu(A) = 1$. Det ønskede mål på H er blot restrinktionen, af μ til $\mathbb{P}(H)$. $\square$

Sætning 3.6. Hvis N er en normal undergruppe af en supramenabel gruppe G, så er kvotientgruppen G/N supramenabel.

Bevis. Antag at N er en normal undergruppe af en supramenabel gruppe G, og at $A \subseteq G/N$, hvor $A \neq \emptyset$. Lad μ være et endeligt additivt, venstre-invariant mål på $\mathbb{P}(G)$ med $\mu(\pi^{-1}(A)) = 1$, hvor $\pi\colon G \to G\backslash N$ betegner den kanoniske projektion. Definer nu $\nu\colon \mathbb{P}(G/N) \to [0,\infty]$ ved $\nu(B) = \mu(\pi^{-1}(B))$, hvor $B \subseteq G/N$. Lad $B_1, B_2 \subseteq G/N$, hvor $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, og bemærk at $\pi^{-1}(B_1) \cap \pi^{-1}(B_2) = \emptyset$. Da er ν endelig additiv, fordi

$$\begin{aligned}\nu(B_1 \cup B_2) &= \mu(\pi^{-1}(B_1 \cup B_2)) = \mu(\pi^{-1}(B_1) \cup \pi^{-1}(B_2)) \\ &= \mu(\pi^{-1}(B_1)) + \mu(\pi^{-1}(B_2)) = \nu(B_1) + \nu(B_2).\end{aligned}$$

Desuden er ν venstre-invariant, idet

$$\nu(gB) = \mu(\pi^{-1}(gB)) = \mu(\pi^{-1}(g)\pi^{-1}(B)) = \mu(\pi^{-1}(B)) = \nu(B),$$

for $g \in G/N$. Slutteligt er $\nu(A) = \mu(\pi^{-1}(A)) = 1$. Så ν er det søgte mål. $\square$

Sætning 3.7. Lad G være en gruppe og $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G$ undergrupper, så $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ og alle G_n er supramenable, da er G også supramenabel.

Bevis. Lad $A \subseteq G$ være ikke-tom. Og sæt $\mathscr{M} = \{\mu\colon \mathbb{P}(G) \to [0,\infty] \mid \mu \text{ er endeligt additiv og } \mu(A) = 1\}$. Mængden $\mathscr{M}$ er kompakt i $[0,\infty]^{\mathbb{P}(G)}$ i topologien givet ved

$$\mu_\alpha \to \mu \Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{P}(G)\colon \mu_\alpha(B) \to \mu(B),$$

hvor $(\mu_\alpha)_{\alpha=1}^{\infty}$ er en følge. Dette gælder, da $[0,\infty]^{\mathbb{P}(G)}$ er kompakt, og $\mathscr{M}$ er en afsluttet delmængde heri; lad $\mu \in \bar{\mathscr{M}}$, og lad $(\mu_\alpha)_{\alpha=1}^{\infty} \in \mathscr{M}$ være en følge, der går mod μ. Så

$$\mu_\alpha(A) \to \mu(A) \Rightarrow 1 \to \mu(A) \Rightarrow \mu(A) = 1.$$

For $B_1, B_2 \in \mathbb{P}(G)$ med $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ gælder $\mu_\alpha(B_1 \cup B_2) \to \mu(B_1 \cup B_2)$ og $\mu_\alpha(B_1) + \mu_\alpha(B_2) \to \mu(B_1) + \mu(B_2)$. Så den endelige additivitet af μ følger af den endelige additiviet af μ_α. Dermed er $\mu \in \mathscr{M}$, så $\mathscr{M}$ er afsluttet.

Lad nu

$$\mathscr{M}_n = \{\mu \in \mathscr{M} \mid \forall g \in G_n, \forall B \in \mathbb{P}(G)\colon \mu(gB) = \mu(B)\}.$$

Så med andre ord er $\mathscr{M}_n$ mængden af $\mu \in \mathscr{M}$, hvor μ er G_n-invariant. Bemærk at $\mathscr{M}_n$ er afsluttet i $\mathscr{M}$ og at $\mathscr{M}_1 \supseteq \mathscr{M}_2 \supseteq \cdots$. Desuden er

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{M}_k = \{\mu \in \mathscr{M} \mid \mu \text{ er } G\text{-invariant, endeligt additiv, } \mu(A) = 1\}.$$

Det er nu nok at vise, at $\mathscr{M}_n$ ikke er tom for hvert $n \in \mathbb{N}$, da $\mathscr{M}$ er kompakt. Da vil snittet af samtlige $\mathscr{M}_n$ nemlig heller ikke være tomt, og dermed eksisterer der et mål med de ønskede egenskaber på $\mathbb{P}(G)$.

Lad B være en ikke-tom delmængde af G. Så er $B = B \cap G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B \cap G_n)$. Derfor findes et $n \in \mathbb{N}$ så $B \cap G_n \neq \emptyset$. Det er herefter ok at antage, at $B \cap G_n \neq \emptyset$ for alle $n \geq 1$, idet $G_1, \dots, G_{n-1}$ kan kasseres, da de alle er indeholdt i G_n, som herefter omnummereres til G_1.

Fasthold $n \in \mathbb{N}$. Da G_n er supramenabel findes et mål $\nu\colon \mathbb{P}(G_n) \to [0, \infty]$, som er G_n-invariant, endeligt additivt og opfylder $\nu(A \cap G_n) = 1$. Definer $\mu\colon \mathbb{P}(G) \to [0, \infty]$ ved $\mu(B) = \nu(B \cap G_n)$. Påstanden er nu, at $\mu \in \mathscr{M}_n$. Selvfølgelig er $\mu(A) = \nu(A \cap G_n) = 1$ og for $B_1, B_2 \in \mathbb{P}(G)$, hvor $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ er

$$\begin{aligned}\mu(B_1 \cup B_2) &= \nu((B_1 \cup B_2) \cap G_n) = \nu((B_1 \cap G_n) \cup (B_2 \cap G_n)) \\ &= \nu(B_1 \cap G_n) + \nu(B_2 \cap G_n) = \mu(B_1) + \mu(B_2).\end{aligned}$$

Og slutteligt gælder for $g \in G_n$ og $B \subseteq \mathbb{P}(G)$, at

$$\mu(gB) = \nu(gB \cap G_n) = \nu(g(B \cap G_n)) = \nu(B \cap G_n) = \mu(B).$$

Da $n \in \mathbb{N}$ var vilkårlig, er $\mathscr{M}_n$ derfor ikke tom for hvert $n \in \mathbb{N}$, så det ønskede er vist. □

Sætning 3.8. Hvis en undergruppe H i G er supramenabel, og H har endeligt indeks i G, dvs. $[H : G] < \infty$, så er G supramenabel.

Bevis. Lad A være en ikke-tom delmængde af G, og lad $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$, hvor $m < \infty$, repræsentere alle højre sideklasser af H i G. Da er også $\bigcup_{i=1}^{m} g_i A \subseteq G$. Ved at bruge Sætning 3.2 på H's virkning på G ved venstremultiplikation opnås et endeligt additivt, H-invariant mål $\nu\colon \mathbb{P}(G) \to [0, \infty]$ med $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{m} g_i A\right) = 1$.

Bemærk at $0 < \sum_{i=1}^{m} \nu(g_i A) < \infty$, da der ellers ville gælde, at $\nu(g_j A) = \infty$, for et $j \in \{1, \dots, m\}$, hvilket ville være i modstrid med $\nu(\bigcup_{i=1}^{m} g_i A) = 1$. Lad nu $a = \sum_{i=1}^{m} \nu(g_i A)$ og definer $\mu\colon \mathbb{P}(G) \to [0, \infty]$ ved $\mu(B) = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{m} \nu(g_i B)$ for $B \subseteq G$. For $B_1, B_2 \subseteq G$, hvor $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, gælder

$$\begin{aligned}\mu(B_1 \cup B_2) &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{m} \nu(g_i(B_1 \cup B_2)) = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{m} \nu(g_i B_1 \cup g_i B_2)) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{m} \nu(g_i B_1) + \nu(g_i B_2) = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{m} \nu(g_i B_1) + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m} \nu(g_j B_2) \\ &= \mu(B_1) + \mu(B_2).\end{aligned}$$

Desuden er $\mu(A) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{m}\nu(g_iA) = \frac{a}{a} = 1$. For alle $g \in G$ repræsenterer mængden $\{g_ig\}_{i=1}^{m}$ samtlige højre sideklasser af H. Bemærk at $g_ig = h_{\pi(i)}g_{\pi(i)}$, hvor π er en permutation af $\{1,\ldots,m\}$ og $h_{\pi(i)} \in H$. Så for $h_{\pi(i)} \in H$, og i kraft af H-invariansen af ν, er

$$\mu(gB) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{m}\nu(g_igB) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{m}\nu(h_{\pi(i)}g_{\pi(i)}B) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{m}\nu(g_{\pi(i)}B) = \mu(B),$$

hvorfor μ er venstre-invariant og således det ønskede mål. □

3.2 Vækstbetingelser

I dette afsnit vises, at abelske grupper har polynomisk - og dermed ikke-eksponentiel - vækst. Desuden vises det, at eksponentielt begrænsede grupper er supramenable, hvoraf det så selvfølgelig følger, at abelske grupper er supramenable og dermed også amenable.

Definition 3.9. Hvis S er en endelig delmængde af en gruppe G, defineres vækstfunktionen $\gamma_S \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ved $\gamma_S(n) = \{$antallet af elementer i G, som er opnåelige som et reduceret ord af længde højst n ved brug af elementer fra $S \cup S^{-1}$ som bogstaver$\}$.

Det er selvfølgelig oplagt, at γ_S ikke er aftagende. Desuden er $\gamma_S(0) = 1$ og $\gamma_S(1) = |\{1\} \cup S \cup S^{-1}| < \infty$.

Lad G være en gruppe og lad S være en endelig delmængde af G. For $k \in N$ lad W_k betegne samlingen af reducerede ord i G af længde nøjagtig k ved brug af elementer fra $S \cup S^{-1}$ som bogstaver. Da er $W_{n+m} \subseteq W_n \cdot W_m$. Lad nemlig $w_{n+m} = s_1s_2\cdots s_ns_{n+1}\cdots s_{n+m} \in W_{n+m}$, hvor $s_1,\ldots s_{n+m} \in S$, så er

$$w_{n+m} = s_1s_2\cdots s_ns_{n+1}\cdots s_{n+m} = (s_1s_2\cdots s_n)(s_{n+1}\cdots s_{n+m}) \in W_n \cdot W_m.$$

Sæt nu $\bar{\gamma}_S(k) = |W_k|$. Så er $\gamma_S(k) = \bar{\gamma}_S(0) + \bar{\gamma}_S(1) + \cdots + \bar{\gamma}_S(k)$. Så

$$\begin{aligned}\gamma_S(n)\gamma_S(m) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\bar{\gamma}_S(j)\bar{\gamma}_S(i) \geq \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\bar{\gamma}_S(j+i) \geq \sum_{k=0}^{n+m}\bar{\gamma}_S(k)\\ &= \gamma_S(n+m).\end{aligned}$$

Heraf følger, at $\gamma_S(k) \leq \gamma_S(1)^k$, så γ_S er altid begrænset af en eksponentiel funktion. Det interessante er, om den virkelig opnår eksponentiel vækst.

Eksempel 3.10 (Grupper med frie undersemigrupper af rang 2)**.** Hvis en gruppe G indeholder en fri undersemigruppe af rang 2, og S indeholder to frie generatorer af en sådan semigruppe, er $\gamma_S(n) \geq 2^n$, som er antallet af af ord i S udelukkende med positive eksponenter og længde nøjagtig n. Så hvis en gruppe G indeholder en fri undersemigruppe af rang 2, så opnår vækstfunktionen eksponentiel vækst mht. til visse valg af S.

Eksempel 3.11 (Abelske grupper)**.** Antag at $S = \{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ er en endelig delmængde af den abelske gruppe G. Ethvert ord i S er, i G, lig med et ord på formen $g_1^{m_1} g_2^{m_2} \cdots g_r^{m_r}$, hvor $m_i \in \mathbb{Z}$. Dvs. antallet af gruppeelementer, der opstår fra et ord af længde n, er højst $(2n+1)^r$, da hvert $m_i \in [-n, n]$, som indeholder netop $2n + 1$ elementer. Derfor er $\gamma_S(n) \leq n(2n + 1)^r$ med sikkerhed. Det er et polynomium af grad $r + 1$, så abelske gruppe har polynomisk, og dermed ikke-eksponentiel, vækst for alle valg af S.

Definition 3.12. En gruppe G er eksponentielt begrænset, hvis der for enhver endelig delmængde S af G og ethvert $b > 1$ findes $n_0 \in \mathbb{N}$ sådan at $\gamma_S(n) < b^n$ når $n > n_0$ eller ækvivalent at $\lim_{n\to\infty} \gamma_S(n)^{\frac{1}{n}} = 1$. Hvis G ikke er eksponentielt begrænset, siges G at have eksponentiel vækst.

Sætning 3.13. Hvis en gruppe G er eksponentielt begrænset, G virker på en mængde X, og A er en ikke-tom delmængde af X, så er A ikke G-paradoksal.

Bevis. Lad G være en gruppe, der virker på mængden X og lad $A \subseteq X$ være ikke-tom. Antag at A er G-paradoksal. Da findes der to injektive stykvise G-transformationer, $F_1 \colon A \to A$ og $F_2 \colon A \to A$ med disjunkte billeder. Lad $S = \{g_1, \cdots, g_r\}$ bestå af alle de elementer fra G, der optræder som multiplikatorer i F_1 og F_2. Antag for modstrid at G er eksponentielt begrænset. Da findes $n \in \mathbb{N}$, så $\gamma_S(n) < 2^n$.

Betragt de 2^n funktioner H_i, der består af sammensætningen af n F_j'er, hvor $j \in \{1, 2\}$. For hvert $1 \leq i \leq 2^n$ vil $H_i \colon A \to A$, og når $i \neq j$ er $H_i(A) \cap H_j(A) = \emptyset$. Lad nemlig p betegne det første sted (mest til venstre), hvor H_i og H_j er forskellige, da F_1 og F_2 har disjunkte billeder, og funktionen, der opnås ved at restringere H_i og H_j til de første $p-1$ positioner er injektiv, følger det, at H_i og H_j også har disjunkte billeder.

Vælg nu et $x \in A$, da har mængden $\{H_i(x) \mid 1 \leq i \leq 2^n\}$ som følge af ovenstående netop 2^n elementer. Hvert H_i er desuden på formen wx, hvor w er et ord af længde n i S. Derfor er der 2^n ord konstrueret af elementer fra S af længde nøjagtig n. Da der oplagt også er kortere ord, må antagelsen om, at $\gamma_S(n) < 2^n$ være forkert. Dermed er G ikke eksponentielt begrænset, og sætningen er vist. $\square$

Sætning 3.14. Hvis G er eksponentielt begrænset, så er G supramenabel.

Bevis. Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X og lad $A \subseteq X$ være ikke-tom. Antag at G er eksponentielt begrænset. Da giver Sætning 3.13 ovenfor, at A ikke er G-paradoksal. Tarskis sætning (2.9) sikrer, at der findes et mål $\mu\colon \mathbb{P}(X) \to [0, \infty]$, der er endeligt additivt, G-invariant og opfylder at $\mu(A) = 1$. Heraf følger sætningen, hvis venstrevirkningen af G på sig selv betragtes, dvs. hvis $X = G$. □

Det blev i Eksempel 3.11 vist, hvorfor abelske grupper er eksponentielt begrænsede. I forening med den netop viste sætning (3.14) betyder det, at alle abelske grupper er supramenable og dermed også amenable.

3.3 ax+b-gruppen

I dette afsnit vises det, at $ax+b$-gruppen er en amenabel gruppe, der ikke er supramenabel. Og dermed at supramenable grupper er en ægte delmængde af amenable grupper.

Mængden

$$G = \{g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = ax + b, a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, b \in \mathbb{Q}\}$$

er en gruppe under kompositionen $\circ$. Neutralelementet er $e = x$. Det er velkendt, at kompositionen er associativ, og hvert element $g \in G$, hvor $g(x) = ax + b$, har en invers givet ved $g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Sætning 3.15. Gruppen G defineret ovenfor er amenabel.

Bevis. Lad $\varphi\colon G \to \mathbb{Q}/\{0\}$ være givet ved $\varphi(g) = a$ for alle $g \in G$, hvor $g(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{Q}/\{0\}$, $b \in \mathbb{Q}$. Funktionen φ er en gruppehomomorfi, fordi der for alle $g_1 = a_1x + b_1, g_2 = a_2x + b_2 \in G$ gælder, at

$$\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(a_1(a_2x + b_2) + b_1) = \varphi(a_1a_2x + b_1 + b_2) = a_1a_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2).$$

Desuden er φ oplagt surjektiv. Kernen $H := \ker \varphi = \{g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = x + b\}$, idet, der for $g = ax + b \in G$ gælder

$$\varphi(g) = 1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow g(x) = x + b.$$

Kernen for en gruppehomomorfi er en normal undergruppe, derfor er H normal i G. Da $b \in \mathbb{Q}$ entydigt definerer g findes en bijektion $\theta\colon H \to \mathbb{Q}$ givet ved $\theta(h) = b$, for alle $h \in H$, hvor $h = x + b$. Bijektionen θ er desuden en gruppehomomorfi, da der for alle $h_1 = x + b_1, h_2 = x + b_2 \in H$ gælder, at

$$\theta(h_1 \circ h_2) = \theta((x + b_2) + b_1) = \theta(x + b_1 + b_2) = b_1 + b_2 = \theta(h_1) + \theta(h_2).$$

Derfor er $H \cong \mathbb{Q}$. Homomorfisætningen giver, at der findes en entydig isomorfi $\bar{\varphi}\colon G/H \to \mathbb{Q}/\{0\}$. Dvs. $G/H \cong \mathbb{Q}/\{0\}$. I alt ved vi nu, at $\{1\} \lhd H \lhd G$, hvor $G/H \cong \mathbb{Q}/\{0\}$ er abelsk, og $H/\{0\} \cong \mathbb{Q}/\{0\}$ også er abelsk. Heraf følger, at G er en løsbar gruppe. Da det blev vist i Afsnit 2.3, at løsbare grupper er amenable, er det nu vist, at G er amenabel. $\square$

Sætning 3.16. Gruppen G er ikke supramenabel.

Bevis. Hvis det kan vises, at G indeholder frie frembringere, σ, ρ, af en fri undersemigruppe af G, så giver Proposition 3.3, at G ikke er supamenabel. Lad $\sigma(x) = 2x + 1$ og $\rho(x) = 2x$. Det skal vises, at ethvert ord i σ, ρ har en entydig fremstilling. Et vilkårligt ord g i G kan skrives som $g = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n$, hvor $g_j(x) = a_j x + b_j$ for $a_j \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}, b_j \in \mathbb{Q}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Så

$$g(x) = a_1 a_2 \ldots a_n x + [b_1 + b_2 a_1 + b_3 a_1 a_2 + \cdots + b_n a_1 \cdots a_{n-1}].$$

Ovenstående følger af induktion. Udsagnet er oplagt rigtigt, for $n = 1$. Antag, at det gælder for $n - 1$, da skal det vises, at det også gælder for n. Sæt $h = g_1 \circ \cdots \circ g_{n-1}$, da er

$$\begin{aligned} g(x) &= h(g_n(x)) = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}(a_n x + b_n) \\ &+ [b_1 + b_2 a_1 + b_3 a_1 a_2 + \cdots + b_{n-1} a_1 \cdots a_{n-2}] = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n x \\ &+ a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b_n + [b_1 + b_2 a_1 + b_3 a_1 a_2 + \cdots + b_{n-1} a_1 \cdots a_{n-2}]. \end{aligned}$$

Heraf opnås den ønskede form ved omarrangering af leddene.

Et ord i σ, ρ kan skrives $k = k_1 \circ k_2 \circ \cdots \circ k_n$, hvor $k_i \in \{\sigma, \rho\}$. Så hvis $k_i = a_i x + b_i$ for $i \in \{1, \ldots, n\}$, er $a_i = 2$ for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ og $b_i \in \{0, 1\}$. Af ovenstående følger, at

$$k(x) = 2^n x + [b_1 + 2b_2 + 4b_3 + \cdots + 2^{n-1} b_n] = 2^n x + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} b_i.$$

Hvis $k(x) = ax + b$ er kendt, kan n bestemmes ud fra ligningen $a = 2^n$ og $b_1, \cdots, b_n$ kan herefter bestemmes entydigt ude fra b. Dermed har ethvert ord i σ, ρ en entydig fremstilling, så σ, ρ er frie frembringere af en fri undersemigruppe af G. Derfor er G ikke supramenabel. $\square$

3.4 Virkninger på lokalt kompakte hausdorffrum

Formålet med dette afsnit er at karakterisere diskrete supramenable grupper ud fra deres virkninger på lokalt kompakte hausdorffrum.

Proposition 3.17. Lad G være en diskret gruppe og lad μ være et endeligt additivt mål på G. Lad V_μ betegne underrummet af $B_{\mathbb{C}}(G) = \{$begrænsede funktioner $f\colon G \to \mathbb{C}\}$, der består af alle $f \in B_{\mathbb{C}}(G)$, så $\mu(\text{supp}(f)) < \infty$, hvor $\text{supp}(f) = \overline{\{g \in G \mid f(g) \neq 0\}}$. Da eksisterer en entydig positiv, lineær funktional $I_\mu\colon V_\mu \to \mathbb{C}$, så $I_\mu(1_A) = \mu(A)$ for alle $A \subseteq G$, hvor $\mu(A) < \infty$. Hvis μ er G-invariant, så er I_μ det også.

Ovenstående proposition følger direkte af Sætning 2.10 i det tilfælde, hvor μ er endelig. Et bevis kan findes i [FPG].

Definition 3.18. Lad G være en diskret gruppe, som virker på et lokalt kompakt hausdorffrum X. Virkningen siges at være ko-kompakt, hvis der findes en kompakt delmængde K af X således at $\bigcup_{g\in G} gK = X$.

Hvis X er et lokalt kompakt hausdorffrum, og hvis en diskret gruppe G virker ko-kompakt på X, så findes pr. definition en kompakt delmængde $K' \subseteq X$ så $\bigcup_{g\in G} gK' = X$. Det er desuden velkendt, at for hver kompakt mængde $K' \subseteq X$ findes en anden kompakt mængde $K \subseteq X$, så $K' \subseteq K^\circ$. Så $X = \bigcup_{g\in G} gK' \subseteq \bigcup_{g\in G} gK^\circ$. Derfor findes der altid en kompakt mængde $K \subseteq X$, så $\bigcup_{g\in G} gK^\circ = X$, når virkningen er ko-kompakt.

Hvis $K \subseteq X$, er en kompakt mængde, der sikrer, at virkningen af en gruppe G på et lokalt kompakt hausdorffrum X er ko-kompakt, og λ er et ikke-trivielt radonmål på X, så er $0 < \lambda(K) < \infty$.

Lemma 3.19. Lad G være en diskret gruppe, der virker ko-kompakt på et lokalt kompakt hausdorffrum X. For hver kompakt delmængde K af X, sådan at $\bigcup_{g\in G} gK^\circ = X$ og for hvert $x_0 \in X$ sæt

$$A(K, x_0) = \{g \in G \mid gx_0 \in K\}.$$

Hvis $A(K, x_0)$ ikke er paradoksal i G, så findes der et ikke-trivielt G-invariant radonmål λ på X.

Bevis. Antag at $A(K, x_0)$ ikke er paradoksal i G. Ved Tarskis sætning (2.9) findes et G-invariant, endeligt additivt mål μ på G så $\mu(A(K, x_0)) = 1$. Hver kompakt mængde $L \subseteq X$ er indeholdt i $\bigcup_{s\in S} s.K$ for en endelig delmængde S af G. Heraf følger, at $A(L, x_0) \subseteq \bigcup_{s\in S} s.A(K, x_0)$, idet

$$g \in A(L, x_0) \Rightarrow gx_0 \in L \Rightarrow \exists s \in S\colon gx_0 \in sK \Rightarrow \exists s \in S\colon s^{-1}gx_0 \in K$$
$$\Rightarrow \exists s \in S\colon s^{-1}g \in A(K, x_0) \Rightarrow \exists s \in S\colon g \in sA(K, x_0) \Rightarrow g \in \bigcup_{s\in S} sA(K, x_0).$$

Derfor er det nu nemt at se, at

$$\mu(A(L,x_0)) \leq \mu\left(\bigcup_{s\in S} sA(K,x_0)\right) \leq |S|\mu(A(K,x_0)) = |S| < \infty.$$

For hver $f \in C_c(X) = \{f\colon X \to \mathbb{C} \mid f \text{ kontinuert, } \mathrm{supp}(f) \text{ kompakt}\}$, lad $\hat{f} \in B_{\mathbb{C}}(G)$ være givet ved $\hat{f}(g) = f(gx_0)$ for $g \in G$. Bemærk at

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\hat{f}) &= \overline{\{g \in G \mid \hat{f}(g) \neq 0\}} = \overline{\{g \in G \mid f(gx_0) \neq 0\}} \\ &= \{g \in G \mid gx_0 \in \mathrm{supp}(f)\} = A(\mathrm{supp}(f), x_0). \end{aligned}$$

Da $\mathrm{supp}(f)$ er kompakt, kan udregningen ovenfor denne anvendes til at konkludere, at $\mu(\mathrm{supp}(\hat{f})) < \infty$, så $\hat{f} \in V_\mu$, hvor V_μ er som i Proposition 3.17.

Proposition 3.17 sikrer eksistensen af en positiv, lineær G-invariant funktional $I_\mu\colon V_\mu \to \mathbb{C}$, hvor $I_\mu(1_A) = \mu(A)$ for alle $A \subseteq G$, hvor $\mu(A) < \infty$. Definer $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ ved $\Lambda(f) = I_\mu(\hat{f})$. Da I_μ er G-invariant er Λ det også. Riesz repræsentationssætning (2.26) leverer et radonmål λ på X, så $\Lambda(f) = \int_X f\, d\lambda$.

Hvis $f \in C_c(X)$ er sådan at $f \geq 1_K$, så er $\hat{f} \geq 1_{A(K,x_0)}$ og

$$\Lambda(f) = I_\mu(\hat{f}) \geq I_\mu(1_{A(K,x_0)}) = \mu(A(K,x_0)) = 1.$$

Dette viser at $\lambda(K) \geq 1$, så λ er ikke-triviel. $\square$

Betakompaktifikationen, βG, af en diskret gruppe G har nogle egenskaber, der anvendes i de følgende beviser. Betragt virkningen af G på sin betakompaktifikation βG. Fasthold $A \subseteq G$, og lad K_A betegne afslutningen af A i βG. Da er K_A kompakt-åben i βG.

Sæt endvidere $X_A = \bigcup_{g\in G} gK_A$. Da er X_A en åben G-invariant delmængde af βG. Faktisk er X_A et lokalt kompakt hausdorffrum, og virkningen $G \curvearrowright X_A$ er ko-kompakt.

Proposition 3.20. Lad G, X_A og A være som ovenfor. Der findes et ikketrivielt G-invariant radonmål på X_A hvis og kun hvis A ikke er paradoksal i G.

Bevis. $\Leftarrow$: Antag at A ikke er paradoksal. I notationen fra forrige proposition ses det, at

$$A(K_A, e) = \{g \in G \mid ge \in K_A\} = \{g \in G \mid g \in K_A\} = K_A \cap G = A.$$

For at vise det sidste lighedstegn bemærkes det, at $A \subseteq K_A \cap G$ er oplagt, da $A \subseteq K_A$ og $A \subseteq G$. For at vise $K_A \cap G \subseteq A$, vælg $g \in K_A \cap G$, så

$g \neq A$. Mængden $\{g\}$ er åben, da G er diskret, så $\{g\} \cap A = \emptyset$, heraf følger, at $\{g\} \cap K_A = \emptyset$, dvs. $g \notin K_A$, men dette er en modstrid, da g pr. antagelse lå i $K_A \cap G$, så $K_A \cap G \subseteq A$. Det er derfor vist at $K_A \cap G = A$. Nu følger det af Lemma 3.19, at der findes et ikke-trivielt G-invariant radonmål på X_A.

$\Rightarrow$: Antag at der findes et ikke-trivielt G-invariant radonmål λ på X_A. Observer først at $0 < \lambda(K_A) < \infty$. Lad $\Omega_A = \{B \subseteq G \mid B \subseteq \bigcup_{s \in S} sA, S \subseteq G \text{ endelig}\}$. Hvis $B \in \Omega_A$, så er afslutningen, K_B, af B relativ til βG, en kompakt-åben delmængde af X_A, idet

$$K_B \subseteq \overline{\bigcup_{s \in S} sA} = \bigcup_{s \in S} \overline{sA} \subseteq \bigcup_{g \in G} gK_A \subseteq X_A.$$

Lighedstegnet i ovenstående gælder, fordi foreningen er endelig.

Lad μ være et G-invariant mål på G givet ved

$$\mu(B) = \begin{cases} \lambda(K_B) & B \in \Omega_A, \\ \infty & B \notin \Omega_A. \end{cases}$$

Hvis $B_1, B_2 \subseteq G$ er disjunkte, så er $B_2 \subseteq G \backslash B_1 \subseteq \beta G \backslash B_1$. Da B_2 er åben er

$$B_2 = B_2^\circ \subseteq (\beta G \backslash B_1)^\circ = \beta G \backslash K_{B_1}.$$

Da B_2 og $\beta G \backslash K_{B_1}$ er afsluttede, er

$$K_{B_2} = B_2 \subseteq \beta G \backslash K_{B_1},$$

så K_{B_1} og K_{B_2} er disjunkte. Derfor følger, at μ er endeligt additivt. Da $\mu(A) = \lambda(K_A) < \infty$ kan det konkluderes, at A ikke er paradoksal i G. □

Sætning 3.21. En diskret gruppe G er supramenabel hvis og kun hvis, at når G virker ko-kompakt på et lokalt kompakt hausdorffrum X, så tillader X et ikke-trivielt G-invariant radonmål.

Bevis. $\Leftarrow$: Antag at G ikke er supramenabel og lad $A \subseteq G$ være paradoksal. Nu giver Proposition 3.20 et eksempel på en ko-kompakt virkning på et lokalt kompakt hausdroffrum, hvor rummet ikke tillader et ikke-trivielt G-invariant radonmål. Sætningen siger nemlig at hvis G virker ko-kompakt på det lokalt kompakte hausdorffrum X_A, så findes ikke et ikke-trivielt, G-invariant radonmål på X_A, hvis A er en paradoksal delmængde i G.

$\Rightarrow$: Dette følger direkte af Lemma 3.19. □

3.5 Uniforme afbildninger

Målet med dette afsnit er at vise, at en diskret gruppe G ikke er supramenabel, hvis og kun hvis der findes en injektiv, uniform afbildning fra den fri gruppe med to generatorer, $\mathbb{F}_2$, ind i G.

Definition 3.22. Lad G og K være grupper. En afbildning $f\colon G \to K$ siges at være en uniform afbildning, hvis der for hver endelig mængde $S \subseteq G$ findes en endelig mængde $T \subseteq K$, så

$$\forall g, h \in G\colon gh^{-1} \in S \Rightarrow f(g)f(h)^{-1} \in T. \tag{3.5.1}$$

Hvis (3.5.1) gælder for et $S \subseteq G$ og et $T \subseteq K$, da holder (3.5.1) også for hvert heltal $n \geq 1$ for S^n og T^n i stedet for hhv. S og T. For antag, at (3.5.1) holder for endelige $S \subseteq G$ og $T \subseteq K$, og lad $gh^{-1} \in S^n$. Da er $gh^{-1} = s_1 s_2 \cdots s_n$, hvor $s_j \in S$, så $g = s_1 s_2 \cdots s_n h$. Sæt $g_j = s_j s_{j+1} \cdots s_n h$ for $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ og bemærk at $g_1 = g$ og $g_{n+1} = h$. Så er

$$g_j g_{j+1}^{-1} = s_j s_{j+1} \cdots s_n h h^{-1} s_n^{-1} \cdots s_{j+1}^{-1} = s_j \in S,$$

og dermed følger af antagelsen, at $f(g_j)f(g_{j+1})^{-1} \in T$. Da er som ønsket

$$\begin{aligned} f(g)f(h)^{-1} &= f(g_1)f(g_{n+1})^{-1} \\ &= f(g_1)f(g_2)^{-1}f(g_2)f(g_3)^{-1}f(g_3)\cdots f(g_n)^{-1}f(g_n)f(x_{n+1})^{-1} \\ &= \left[f(g_1)f(g_2)^{-1}\right]\left[f(g_2)f(g_3)^{-1}\right]\cdots\left[f(g_n)f(g_{n+1})^{-1}\right] \in T^n. \end{aligned}$$

Specielt, hvis G er endeligt frembragt, er $f\colon G \to K$ uniform, hvis (3.5.1) blot gælder for en endelig symmetrisk frembringermængde S af G og en endelig mængde $T \subseteq K$. Antag nemlig, at S er en endelig symmetrisk frembringermængde, for hvilken (3.5.1) gælder, da gælder (3.5.1) også for S^n for alle $n \geq 1$. Lad $S' \subseteq G$ være en vilkårlig endelig delmængde. Da findes $n \in \mathbb{N}$, så $S' \subseteq S^n$, og dermed kan det vælges, at $T' = T^n$, da gælder (3.5.1) også for S'.

Definition 3.23. Lad G være en gruppe og lad $A \subseteq G$. En afbildning $\sigma\colon A \to G$ er en kongruens, hvis den er injektiv, og der findes en endelig mængde $S \subseteq G$ så $\sigma(g)g^{-1} \in S$ for alle $g \in A$.

Når en sammensætning af kongruenser er defineret, følger det, at denne også er en kongruens. Lad nemlig $A \subseteq B_1 \subseteq B \subseteq C$ og lad $\sigma\colon A \to B_1$ og $\tau\colon B \to C$ være kongruenser, da er $\tau \circ \sigma\colon A \to C$ defineret. Det er klart, at $\tau \circ \sigma$ er injektiv. Da σ hhv. τ er kongruenser, findes endelige $S_1 \subseteq B_1$ og $S_2 \subseteq C$, så $\sigma(g)g^{-1} \in S_1$ for alle $g \in A$ og $\tau(h)h^{-1} \in S_2$ for alle $h \in B$. Det er klart at mængden $S_3 = \{s_2 s_1 \mid s_2 \in S_2, s_1 \in S_1\} \subseteq C$ også er endelig. For alle $g \in A$ er

$$(\tau \circ \sigma)(g)g^{-1} = \tau(\sigma(g))\sigma(g)^{-1}\sigma(g)g^{-1} \in S_3.$$

Derfor er $\tau \circ \sigma$ en kongruens.

Lemma 3.24. En delmængde A af en gruppe G er G-paradoksal, hvis og kun hvis der findes to kongruenser $\sigma^{\pm} \colon A \to A$ med disjunkte billeder.

Bevis. $\Rightarrow$: Antag at $A \subseteq G$ er pardoksal. Da findes parvist disjunkte mængder $A_1, A_2, \ldots, A_{n+m}$ i A og $t_1, t_2, \ldots, t_{n+m} \in G$ sådan at

$$\bigcup_{i=1}^{n} t_i A_i = A = \bigcup_{i=n+1}^{n+m} t_i A_i.$$

Lad nu

$$B_1 = t_1 A_1, B_2 = t_2 A_2 \backslash B_1, \ldots, B_n = t_n A_n \backslash (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}),$$

og for $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definer $\sigma^+ \colon A \to A$ ved $\sigma^+(s) = t_j^{-1} s$ for $s \in B_j$. Da er $\sigma^+(A) = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. For alle $g \in A$ gælder at $\sigma^+(g)g^{-1} \in \{t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}\} \subseteq G$. Og σ^+ er injektiv, for tag $g, h \in A$, hvor $g \neq h$. Hvis $g, h \in B_j$ er $\sigma^+(g) \neq \sigma^+(h)$. Hvis $g \in B_j$ og $h \in B_i$ hvor $j \neq i$ er $g = t_j a_j$ for $a_j \in A_j$ og $h = t_i a_i$ for $a_i \in A_i$. Da $A_j \cap A_i = \emptyset$ og dermed $a_j \neq a_i$ er $\sigma^+(g) \neq \sigma^+(h)$.

Lad på samme vis

$$B_{n+1} = t_{n+1} A_{n+1}, \ldots, B_{n+m} = t_{n+1} A_{n+1} \backslash (B_{n+1} \cup \cdots \cup B_{n+m-1}),$$

og for $j \in \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ definer $\sigma^- \colon A \to A$ ved $\sigma^-(s) = t_j^{-1} s$ for $s \in B_j$. Da er $\sigma^-(A) = A_{n+1} \cup \cdots \cup A_{n+m}$. I lighed med σ^+ er σ^- en kongruens.

Desuden er $\sigma^+(A) \cap \sigma^-(A) = (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap (A_{n+1} \cup \cdots \cup A_{n+m}) = \emptyset$, som ønsket.

$\Leftarrow$: Antag at der findes kongruenser $\sigma^{\pm} \colon A \to A$ med disjunkte billeder. Dvs. der findes to endelige delmængder $S^+ = \{t_1^{-1}, t_2^{-1}, \ldots, t_n^{-1}\}$ og $S^- = \{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_m^{-1}\}$ af G, så $\sigma^+(g)g^{-1} \in S^+$ og $\sigma^-(g)g^{-1} \in S^-$ for alle $g \in A$. Hermed findes der for hvert $g \in A$ et $t_j^{-1} \in S^+$ og et $s_i^{-1} \in S^-$, så $\sigma^+(g) = t_j^{-1} g$ og $\sigma^-(g) = s_i^{-1} g$. Lad $A_j = \{\sigma^+(g) \in A \mid \sigma^+(g) = t_j^{-1} g\}$ og $B_i = \{\sigma^-(g) \in A \mid \sigma^-(g) = s_i^{-1} x\}$. Oplagt er $A_j, B_i \subseteq A$. Da kongruenserne

$\sigma^\pm$ er injektive, er $A_1, A_2, \dots, A_n$ hhv. $B_1, B_2, \dots, B_m$ parvist disjunkte, og da $\sigma^+(A) \cap \sigma^-(A) = \emptyset$ er alle mængderne parvist disjunkte. Da er

$$\bigcup_{j=1}^{n} t_j A_j = A = \bigcup_{i=1}^{m} s_i B_i.$$

Da $t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_m \in G$, er A paradoksal mht. G. □

Hvis der findes to kongruenser med disjunkte billeder findes der for hvert $n \in \mathbb{N}$ kongruenser $\sigma_j\colon A \to A$, $j = 1, 2, \dots, n$ med disjunkte billeder. Lad σ^+ og σ^- betegne de to kongruenser. Da er sammensætningerne $\sigma^+ \circ \sigma^+$, $\sigma^+ \circ \sigma^-$, $\sigma^- \circ \sigma^+$, $\sigma^- \circ \sigma^-\colon A \to A$ også kongruenser med disjunkte billeder. Dette indses nemt ved brug af injektiviteten af $\sigma^\pm$ og selvfølgelig ved brug af $\sigma^+(A) \cap \sigma^-(A) = \emptyset$.

Lemma 3.25. Lad G og K være grupper og lad $f\colon G \to K$ være en injektiv, uniform afbildning. Lad A være en delmængde af G og lad $\sigma\colon A \to G$ være en kongruens. Da er afbildningen $\tau\colon f(A) \to G$, givet ved $\tau \circ f = f \circ \sigma$, en kongruens.

Bevis. Bemærk at τ er veldefineret og injektiv, fordi σ og f er det. Da σ er en kongruens findes en endelig mængde $S \subseteq G$ så $\sigma(g)g^{-1} \in S$ for alle $g \in A$. Da f er uniform findes der, for alle $g, h \in G$, hvor $gh^{-1} \in S$, en endelig mængde $T \subseteq H$, så $f(g)f(h)^{-1} \in T$. Så

$$\sigma(g)g^{-1} \in S \Rightarrow f(\sigma(g))f(g)^{-1} \in T,$$

men $f(\sigma(g))f(g)^{-1} = \tau(f(g))f(g)^{-1}$, så $\tau(f(g))f(g)^{-1} \in T$ for alle $g \in A$. Derfor er τ en kongruens. □

Lemma 3.26. Lad G og H være grupper og lad $f\colon G \to H$ være en injektiv, uniform afbildning. Hvis A er en paradoksal delmængde af G, så er $f(A)$ en paradoksal delmængde af H.

Bevis. Antag at A er en paradoksal delmængde af G. Nu giver Lemma 3.24, at der findes kongruenser $\sigma^\pm\colon A \to A$ med disjunkte billeder. Sæt nu $B = f(A)$ og lad $\tau^\pm\colon B \to B$ være givet ved $\tau^\pm \circ f = f \circ \sigma^\pm$. Ved Lemma 3.25 er $\tau^\pm$ kongruenser. Da $\sigma^\pm$ har disjunkte billeder og f er injektiv, gælder at $\tau^+(B) \cap \tau^-(B) = \emptyset$. Ved Lemma 3.24 er $B = f(A)$ paradoksal. □

Sætning 3.27. En diskret gruppe G er ikke supramenabel hvis og kun hvis der findes en injektiv, uniform afbildning $f\colon \mathbb{F}_2 \to G$.

Bevis. $\Leftarrow$: Antag at der findes en injektiv, uniform afbildning $f\colon \mathbb{F}_2 \to G$. Da $\mathbb{F}_2$ er paradoksal (jævnfør beviset for Propsition 3.3), er $f(\mathbb{F}_2) \subseteq G$ også paradoksal ved Lemma 3.26. Derfor er G ikke-supramenabel.

$\Rightarrow$: Antag at G er en diskret gruppe, der ikke er supramenabel, og lad A være en paradoksal delmængde af G. Ved Lemma 3.24 og kommentaren nedenfor denne findes fem kongruenser med disjunkte billeder. Heraf udvælges fire $\sigma^{\pm}, \tau^{\pm}\colon A \to A$, og et $g_0 \in A$, der ligger i billedet for den sidste kongruens og dermed ikke i billedet for de fire udvalgte.

Lad a, b betegne frembringerne for $\mathbb{F}_2$ og definer en kongruens $\rho_x\colon A \to A$ for hvert $x \in \mathbb{F}_2$ induktivt efter ordets længde på følgende måde: Sæt $\rho_e = Id_A$ (er oplagt en kongruens). Antag at $\rho_{x'}$ er defineret, hvis $x = a^{\pm 1}x' \in \mathbb{F}_2$ sæt $\rho_x = \sigma^{\pm} \circ \rho_{x'}$, og ligeledes, hvis $x = b^{\pm 1}x' \in \mathbb{F}_2$ sæt $\rho_x = \tau^{\pm} \circ \rho'_x$.

For $x, y \in \mathbb{F}_2$ er $x \precsim y$, hvis der findes $x' \in \mathbb{F}_2$ så $y = xx'$ og xx' er et reduceret ord. I så tilfælde er $\rho_{xx'} = \rho_x \circ \rho_{x'}$. Bemærk desuden, at $\rho_x(A) \cap \rho_y(A) = \emptyset$ ved mindre $x \precsim y$ eller $y \precsim x$. Antag nemlig uden tab af generalitet, at $x \precsim y$. Så er $\rho_y(A) = \rho_x(\rho_{x'}(A))$, da $\rho_{x'}(A) \subseteq A$ er $\rho_{x'}(A) \cap A = \rho_{x'}(A) \neq \emptyset$. Heraf følger at $\rho_y(A) \cap \rho_x(A) \neq \emptyset$. Antag så at $x \not\precsim y$ og $y \not\precsim x$, og bemærk at $x = zx'$, $y = zy'$, hvor $x' = cx''$, $y' = dy''$ for $c \neq d$, hvor $z, x', x'', y', y'' \in \mathbb{F}_2$ og $c, d \in \{a^{\pm}, b^{\pm}\}$. Da er $\rho_{x'}(A) = \rho_c(\rho_{x''}(A)) \subseteq \rho_c(A)$ og $\rho_{y'}(A) = \rho_d(\rho_{y''}(A)) \subseteq \rho_d(A)$, så da $\rho_c, \rho_d \in \{\sigma^{\pm}, \tau^{\pm}\}$, er $\rho_{x'}(A) \cap \rho_{y'}(A) = \emptyset$. Da ρ_z er injektiv, følger det, at $\rho_x(A) \cap \rho_y(A) = \emptyset$.

Definer nu en funktion $f\colon \mathbb{F}_2 \to G$ ved $f(x) = \rho_x(g_0)$.

Funktionen f er injektiv: Lad $x, y \in \mathbb{F}_2$ med $x \neq y$ være givet. Hvis $x \not\precsim y$ og $y \not\precsim x$, da er $\rho_x(A) \cap \rho_y(A) = \emptyset$, hvorfor der selvfølgelig også gælder, at

$$f(x) = \rho_x(g_0) \neq \rho_y(g_0) = f(y).$$

Hvis $x \precsim y$ eller $y \precsim x$, lad os uden tab af generalitet sige det første, er $y = xx'$ et reduceret ord, hvor $x' \neq e$. Så er $\rho_{x'}(g_0) \neq g_0$, fordi g_0 ikke er indeholdt i nogle af de fire kongruensers billeder. Derfor er

$$f(y) = \rho_x(\rho_{x'}(g_0)) \neq \rho_x(g_0) = f(x).$$

Derfor er f injektiv.

Funktionen f er uniform: Af bemærkningerne under Definition 3.22 er det tilstrækkeligt at vise, at der findes en endelig mængde $T \subseteq G$, så (3.5.1) gælder for den endelige symmetriske frembringermængde $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ af $\mathbb{F}_2$. Vælg

$$T = \bigcup_{c \in S} \{\rho_c(x)x^{-1} \mid x \in A\}.$$

Hvis $x, y \in \mathbb{F}_2$ og $xy^{-1} \in S$ er enten $x = cy$ eller $y = cx$ for et $c \in S$, sådan at cy hhv. cx er reducerede. Da $xy^{-1} \in S$ er $x = dy$ og $y = d^{-1}x$ for $d, d^{-1} \in S$. Desuden findes $c \in S$ og $y' \in \mathbb{F}_2$, så $y = cy'$ er reduceret. Antag først, at $c \neq d^{-1}$, da er $x = cy$ reduceret. Antag så, at $c = d^{-1}$, da er $x = dy = dd^{-1}y' = y'$, så $y = cy' = cx$ er reduceret. Derfor er enten $\rho_x = \rho_c \circ \rho_y$ eller $\rho_y = \rho_c \circ \rho_x$. I første tilfælde er

$$f(x)f(y)^{-1} = \rho_x(s_0)\rho_y(s_0)^{-1} = \rho_c(\rho_y(s_0))\rho_y(s_0)^{-1} \in T$$

Og i andet tilfælde gælder, at

$$f(x)f(y)^{-1} = \rho_x(s_0)\rho_c(\rho_x(s_0))^{-1} = [\rho_c(\rho_x(s_0))\rho_x(s_0)^{-1}]^{-1} \in T^{-1}$$

Da T er endelig, er T^{-1} også endelig. Derfor er f uniform, og det ønskede er vist. $\square$

4 Litteraturliste

[CB] Christian Berg: *Metriske rum*, Institut for matematiske fag, Københavns Universitet, Noter til Analyse 1: Fourierrækker og Metriske rum, forelæsningsnoter 1. udgave, side 71-73.

[GBF] Gerald B. Folland: *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, University of Washington, 1984, side 161-162, 204-208.

[FPG] Frederick P. Greenleaf: *Invariant means on topological groups and their applications*, no. 16, Van Nostrand Reinhold, 1969.

[EH] Ernst Hansen: *Measure Theory*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, fourth edition, side 113-114.

[JRM] James R. Munkres: *Topology - a first course*, Pretice-Hall, 1975, kapitel 5-3.

[KMR] Julian Kellerhals, Nicolas Monod, Mikael Rørdam: *Actions of non-supramenable groups on locally compact spaces*, kapitel 2-3.

[SW] Stan Wagon: *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985, kapitel 1, 3, 8-10, 12.