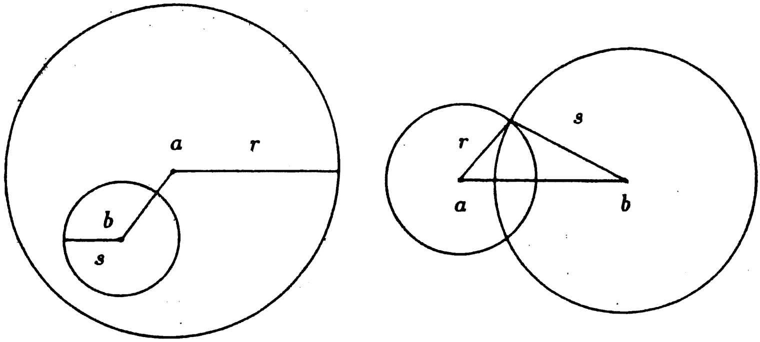
1.3. Kugler i et metrisk rum. Begrænsede mængder.
Vi vender os nu mod et vilkårligt metrisk rum (M, d) og definerer for $a \in M$, $r > 0$ *kuglen* med *centrum* a og *radius* r

$$K(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}.$$

Bemærk at $a \in K(a,r)$, og når $r_1 < r_2$ vil $K(a,r_1) \subseteq K(a,r_2)$. Som umiddelbar anvendelse af trekantsuligheden vil vi vise følgende

Kuglelemma 1.6. *(i) Hvis $b \in K(a,r)$ og $0 < s \leq r - d(a,b)$ så gælder $K(b,s) \subseteq K(a,r)$.*
(ii) Hvis $K(a,r) \cap K(b,s) \neq \varnothing$ så er $d(a,b) < r + s$.



Bevis. (i) Antag at $x \in K(b,s)$. Vi skal vise at $d(a,x) < r$, men det følger af trekantsuligheden

$$d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + s \leq r.$$

(ii) Vi vælger et punkt $c \in K(a,r) \cap K(b,s)$ og udnytter igen trekantsuligheden

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = d(a,c) + d(b,c) < r + s.$$

$\square$

For enhver ikke tom delmængde $A \subseteq (M,d)$ indføres *diameteren* $\operatorname{diam} A$ af A ved

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}.$$