Kædebrøker

Naturvidenskabsfestivalen 2006
foredrag på Herning htx, 26. september
Flemming Topsøe <topsoe@math.ku.dk>
Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet

b_0	f.eks.	3
$b_0 + \dfrac{a_1}{b_1}$	f.eks.	$3 + \dfrac{1}{7}$
$b_0 + \dfrac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}}$	f.eks.	$3 + \dfrac{1}{7 + \frac{1}{15}}$
$b_0 + \dfrac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}}$	f.eks.	$3 + \dfrac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$

Notation:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \; \frac{a_2}{b_2 +} \; \cdots \frac{a_n}{b_n}$$

eller

$$K \begin{pmatrix} - & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Generelle eksempler

$$b_0 = \frac{b_0}{1} = \frac{A_0}{B_0}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2}$$

$$= \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}} = \cdots \text{regne-regne} \cdots$$

$$= \frac{b_0 b_1 b_2 b_3 + b_0 b_1 a_3 + b_0 a_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3}{b_1 b_2 b_3 + b_1 a_3 + a_2 b_3}$$

$$= \frac{A_3}{B_3}$$

Tællere og nævnere, Fibonacci tallene dukker op

$$K\begin{pmatrix} - & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$= \frac{\cdots + a_1 b_2 a_4 b_5 a_7 b_8 + \cdots \text{(sum af 55 led)}}{\cdots + a_2 a_4 b_5 b_6 a_8 + \cdots \text{(sum af 34 led)}} = \frac{A_8}{B_8}$$

A'erne er *kanoniske,* a'erne *partielle tællere*
B'erne er *kanoniske,* b'erne *partielle nævnere*.

Antallet af led (i A'er og i B'er) bestemmes ved at se på tilfældet, hvor alle a'er og også alle b'er er 1:

$\boxed{\sharp \text{ led i } A_n = F_{n+2}}$ $\boxed{\sharp \text{ led i } B_n = F_{n+1}}$

HUSK: Fibonacci-tallene $F_0, F_1, \cdots$ er tallene
$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \cdots$.

Senere skal vi se på, hvordan de enkelte led bestemmes ... men først det vigtige spørgsmål:

Hvorfor kædebrøker?

Euklid's algoritme

start: *stor, lille*

beregning: *stor=lille ·kvotient+rest*

stopkriterium: *hvis rest* $=$ 0*: STOP, sfd er fundet!*

nye værdier: *ny stor=gl. lille, ny lille=rest*

rekursivt trin: *tilbage til beregning*

$$\text{Så er } \frac{\text{stor}}{\text{lille}} = \text{kvotient} + \frac{\text{rest}}{\text{lille}} \text{ altså:}$$

$$\boxed{\left(\frac{\text{stor}}{\text{lille}}\right) = \text{kvotient} + \frac{1}{\text{ny}\left(\frac{\text{stor}}{\text{lille}}\right)}}$$

$$\textbf{Eksempel } 2361 = 1113 \cdot 2 + 135$$
$$1113 = 135 \cdot 8 + 33$$
$$135 = 33 \cdot 4 + 3$$
$$33 = 3 \cdot 11 + 0 \text{ så:}$$

$$\boxed{\textit{sfd}(2361, 1113) = 3} \text{ og } \boxed{\frac{2361}{1113} = K\begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}}$$

fremstilling af brøk i en *regulær kædebrøk!*

Approksimation

Historisk har kædebrøker udspring i ønsket om at finde enkle og præcise måder at udtrykke vigtige størrelser på, typisk i relation til geometrien eller astronomien. Således har Euklids algoritme relation til størrelseslæren, hvor (geometriske) størrelser sammenlignes. Ofte dukker kvadratrødder eller π op. Berømt er Arkimedes' (287-212 f.kr.) undersøgelser vedrørende cirkelmåling. Til approksimationer for π benyttede han bl.a. vurderingerne $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, der direkte fås af kædebrøksteorien. Nævnes kan også kineseren Tsu (ca. år 500), som fandt approksimationen

$$\pi \approx K\begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 15 & 1 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} - & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 16 \end{pmatrix} = 3.141592\cdots$$

Ved en nærliggende udvidelse af Euklids algoritme ses: Ethvert tal kan udvikles i en regulær kædebrøk. *Men,* hvis tallet er irrationalt (ikke en brøk), får man en *uendelig* kædebrøk, hvor *konvergenterne* $\frac{A_n}{B_n}$ så bliver bedre og bedre approksimationer af tallet.

Approksimation: mere om π ...

$$\pi = K\begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 3 & 7 & 15 & 1 & 292 & 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix}$$

Sært: 100mill led kendes, men ikke mønstret! *Men:*

$$\frac{4}{\pi} = K\begin{pmatrix} - & 1 & 9 & 25 & 49 & 81 & 121 & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots \end{pmatrix}$$

Regulære kædebrøk giver de første konvergenter:

$3.1428 \qquad 3.14159292 \qquad 3.1415926$

$3 \qquad 3,1415 \qquad 3.141592653$

OBS: alternerer! (klart, at sådan må det være!)

... og noget om $\ln 2$

Siden ca. 1770 kendes kædebrøksudvikling af trigonometriske og logaritmiske funktioner. Skyldes især *Lambert*. Se f.eks. hans smukke formel:

$$\ln 2 \ \text{(areal af figuren: } 1 \leq x \leq 2\,, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\text{)}$$

$$= K \begin{pmatrix} \text{-} & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 9 & 9 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{pmatrix}$$

Approksimanter ($\ln 2 = 0.693147180\cdots$):

1		0.7000		0.6933		0.69315
	0.6667		0.6923		0.69312	

"standard" metode: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$

der har approksimanter:

1		0.83		0.78		0.759
	0.5		0.58		0.61	

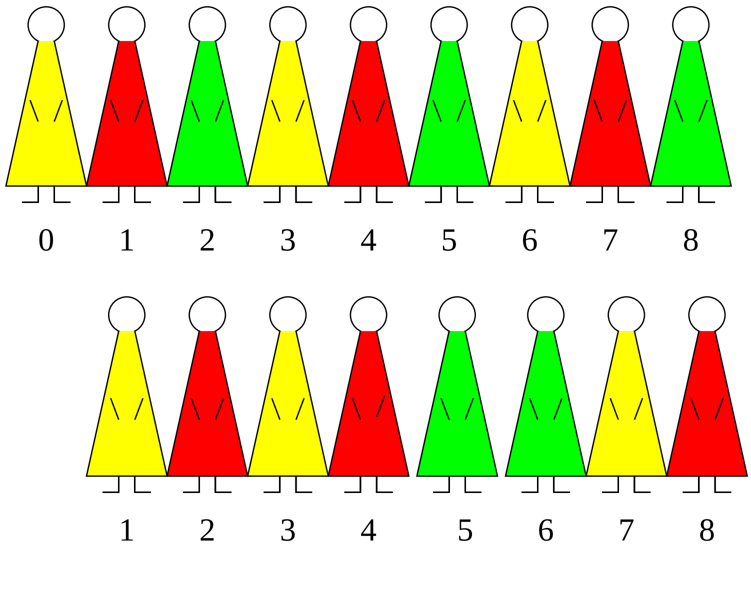
...håbløst! 100000 led kræves for at få samme nøjagtighed!

Mødre, døtre og frie kvinder!

Problem: Formler for A_n'erne og B_n'erne! Eller blot metode til at bestemme dem. Husk eksemplet:

$$A_8 = \cdots + a_1 a_4 a_7 b_2 b_5 b_8 + \cdots \,, \text{ (sum af 55 led),}$$
$$B_8 = \cdots + a_2 a_4 a_8 b_5 b_6 + \cdots \,, \text{ (sum af 34 led).}$$

... hænger sammen med familier af mødre, døtre og frie kvinder, se blot her:



Populationer

Vi vil bestemme A_n.

Se på *populationen* af alle *familier,* der kun består af kvinder efter følgende regler:

- hver familie består af præcis $n+1$ kvinder, een for hver *aldersklasse* $0, 1, \cdots, n$
- hvert familiemedlem er enten en *mor* , en *datter* eller en *fri kvinde*
- det yngste familiemedlem er ikke mor
- hver mor har een datter, som netop er een aldersklasse yngre end moderen
- frie kvinder er kvinder, der hverken er mødre eller døtre

Bestemmelse af A_5 og videre muligheder

... fremgår af figuren (næste side)! B_5 bestemmes tilsvarende, men svarende til familier over aldersklasserne $1, 2, 3, 4, 5$ (snarere end $0, 1, 2, 3, 4, 5$).

Mere om udnyttelse af familiestrukturen: Kig især efter *determinantformlen*! . Resultaterne er splinternye og netop præsenteret på kongressen ICM2006 i Madrid.

Vedrørende omhyggelige beviser: Faktisk let at indse, at A_n'erne og B_n'erne kan bestemmes via familierne som beskrevet. Måske kan man nøjes med at bevise, at antallet af familier over $\{0, 1, \cdots, n\}$ er Fibonaccitallet F_{n+2} (hjælp hertil: Del familierne op i de familier, hvor den ældste er en mor og så de andre familier ...).

Får I "blod på tanden" er en mulighed at kontakte Aarhus Universitet, der netop har lagt et forslag til besøg med foredrag og øvelser om kædebrøker på nettet, se http://www.imf.au.dk/besoegsservice/arrangementer/kaedebroeker.html. Videre oplysninger/inspiration fås mange andre steder på nettet, bl.a. fra min egen hjemmeside http://www.math.ku.dk/~topsoe.