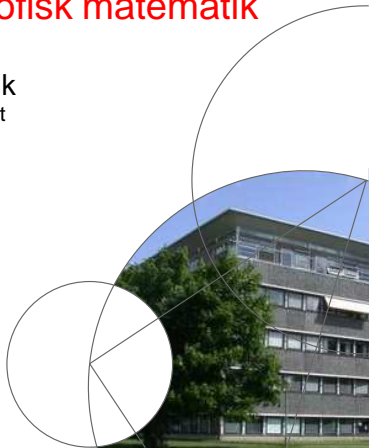




Matematikkens filosofi – filosofisk matematik

Flemming Topsøe, topsoe@math.ku.dk
Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet



Et svært spørgsmål

Hvad er matematik?

Matematik er læren om strukturer og sammenhænge der kan diskuteres på et abstrakt grundlag og – via ræsonneren – føre til præcise udsagn.



antydninger af en diskussion

abstrakt?

Det passer da ikke! Således optræder tallene, f.eks. 2, i matematikken, og det er da noget ganske konkret?

...hmmm... men så er matematik ikke en *natur*videnskab!
– for i naturvidenskaberne søger vi sandheden om den fysiske verden, vi er anbragt i.



Matematik, hvorfor egentlig?

Der er to grunde til at beskæftige sig med matematik:

- som et middel til at opnå erkendelse på andre felter,
- som erkendelse i sig selv.



Hvad indgår i matematik?

Matematikken har tre bestanddele:

- **Mængdelæren:** et sæt genstande, **mængder**, for vor ræsonneren,
- **Matematisk logik:** et regelsæt for vor ræsonneren,
- **Det æstetiske element**, skønheden ...

Vi forlader matematikkens filosofi og ser på et eksempel på matematik, hvor filosofiske betragtninger spiller en stor rolle, filosofisk matematik:





verden og dig

Det hele er **verden**, Ω .

Situationer fra verden vedrører **Naturen** og **lagttager**, dig!

Naturen har ingen **bevidsthed** – det har du!

Naturen er ikke **kreativ** – det er du!

Naturen er bærer af **sandheden**, x ,

du søger sandheden, men er henvist til **tro**, y .

Med erfaring kommer **viden**, **erkendelse**, z .

En anden opfattelse af viden:

sådan *opfatter* du sandheden! **perception**



eksempler på situationer

Naturfænomener: vejret i morgen, kommer tsunamien?

Fysik: tilstanden af en gas i et varmebad, ...

Sundhed: virker pillen? kommer der en epedemi? ...

Samfund, økonomi: kursernes udsving ...

Den religiøse sfære: forholdet mellem Vorherre og dig, ...

Personlige forhold: elsker hun mig? ...

Litteraturen: Daphne myten ...

Psykologi: udfyldning, placebo effekt

Spil: hvor mange øjne? er terningen ægte? ...



eksempler på verdener

Antagelse:

Viden afledes af sandhed og tro tilsammen, idet der findes en funktion Π , **vekselvirkeren** eller **interaktoren** således, at $z = \Pi(x, y)$.

Eksempler:

- Den **klassiske verden** Ω_1 er karakteriseret ved at $z = x$,
det, du ser, er det, der er sandt!
- Et **sort hul** Ω_0 er karakteriseret ved at $z = y$,
det, du ser, er det, du tror!
- **Blandinger**, f.eks. $\Omega_{\frac{3}{4}}$ svarende til $z = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y$.



Score-funktioner

I enhver situation (x, y) indebærer det et besvær at nå frem til viden (z) . Anden sprogbrug: Vi må betale en pris for at “score” den viden, der kan opnås i situationen. Lad $F(x, y)$ betegne denne pris.

Vi kalder F en **score-funktion** og siger, at F er en **ren score-funktion**, hvis besværet er mindst når tro matcher sandhed, dvs. når der for alle x og y gælder, at $F(x, y) \geq F(x, x)$ med lighedstegn kun når $y = x$. (Løvrigt: $F(x, x)$ er **entropien** af x . Så entropi er minimalt besvær.)

Hovedopgave: Bestem en ren score-funktion og udtænk en tilhørende **score-strategi** der sikrer, at besværet (den pris, der skal betales) i en given situation er højst $F(x, y)$.

Men hvordan? Det afhænger af den verden, vi befinder os i. Lad os se på verdener, hvor sandhed og tro udtrykkes i sandsynligheder:



Verdener baseret på sandsynlighed

Verdener, hvor situationer er bestemt ved sandsynligheder over et **alfabet**. Skematisk:

\mathbb{A}	sandhed	tro	viden
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
i	x_i	y_i	z_i
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot

Husk: z er givet ved (x, y) gennem vekselvirkeren Π .
 Antag nu, at denne virker lokalt. Så findes en funktion π , den **punktvise vekselvirker** eller **interaktor**, som virker på de enkelte punktsandsynligheder og så kan vi ovenfor sætte $z_i = \pi(x_i, y_i)$.

I den klassiske verden er den punktvise vekselvirker funktionen π_1 givet ved $\pi_1(s, t) = s$ og i et sort hul er den punktvise vekselvirker funktionen π_0 givet ved $\pi_0(s, t) = t$.



din kreativitet sætter ind!

Lys idé: Glem i første omgang det med en score-strategi og fokusér på at

- det samlede besvær er summen af bidrag fra de enkelte udfald;
- besværet svarende til et enkelt udfald i er proportional med $z_i = \pi(x_i, y_i)$ der er den vægt med hvilken jeg, iagttageren, opfatter udfaldet;
- ud over denne proportionalitet afhænger besværet svarende til i kun af den troede sandsynlighed y_i .

Så findes en funktion κ , **koderen**, så det samlede besvær, score-funktionen, er givet ved

$$F(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{A}} \pi(x_i, y_i) \kappa(y_i).$$



opsummering: $F(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{A}} \pi(x_i, y_i) \kappa(y_i)$

\mathbb{A}	x	y	z	besvær (pris, energi...)
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
i	x_i	y_i	$z_i = \pi(x_i, y_i)$	$z_i \kappa(y_i) = \pi(x_i, y_i) \kappa(y_i)$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot

Om κ forlanger vi, at $\kappa(1) = 0$ (valg af nulpunkt) og at $\kappa'(1) = -1$ (valg af enhed).

$\kappa : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$, knytter til en given værdi af t (den sandsynlighed, du tror, et udfald har) det besvær, $\kappa(t)$, du er villig til, eller nødt til, at acceptere for at finde frem til udfaldet. Anden sprogbrug:

$\kappa(t)$ er den pris, du er villig til at betale for at få information om at en hændelse er indtruffet, som funktion af hændelsens sandsynlighed t .

OBS: κ skal bestemmes, så den tilhørende score-funktion F er en ren score-funktion. Lad os se på det:



bestemmelse af κ i den klassiske verden

Vi gætter! Skal finde κ , så det for alle sandsynlighedsvektorer x og y gælder, at summen $F(x, x)$ er \leq summen $F(x, y)$, se skema:

\mathbb{A}	x	y	bidrag til $F(x, x)$	bidrag til $F(x, y)$
1	x_1	y_1	$x_1 \kappa(x_1)$	$x_1 \kappa(y_1)$
2	x_2	y_2	$x_2 \kappa(x_2)$	$x_2 \kappa(y_2)$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
i	x_i	y_i	$x_i \kappa(x_i)$	$x_i \kappa(y_i)$
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
sum	1	1	$F(x, x)$	$F(x, y)$

Et trick: Vis i stedet, at summen $F(x, x) + 1$ er \leq summen $F(x, y) + 1$, se skema:



\mathbb{A}	x	y	bidrag til $F(x, x) + 1$	bidrag til $F(x, y) + 1$
1	x_1	y_1	$x_1 \kappa(x_1) + x_1$	$x_1 \kappa(y_1) + y_1$
2	x_2	y_2	$x_2 \kappa(x_2) + x_2$	$x_2 \kappa(y_2) + y_2$
.
i	x_i	y_i	$x_i \kappa(x_i) + x_i$	$x_i \kappa(y_i) + y_i$
.
sum	1	1	$F(x, x) + 1$	$F(x, y) + 1$

Satser på at dette endog gælder “ledvist”, dvs. at

$$s\kappa(s) + s \leq s\kappa(t) + t \quad (1)$$

gælder for alle $0 \leq s \leq 1$ og alle $0 \leq t \leq 1$. Hold først s fast. Højre-siden i (1) er en funktion af t med mindsteværdi for $t = s$; derfor er der stationært punkt for $t = s$, dvs. $s\kappa'(s) + 1 = 0$. Dette gælder alle s og bestemmer dermed en differentialligning. Løsningen med $\kappa(1) = 0$ er funktionen $\kappa(t) = \ln \frac{1}{t}$.



... fortsat ...

Vi har gættet en κ -funktion og dermed en score-funktion!
Men er det en ren score-funktion? Vi checker: Er

$$s\kappa(s) + s \leq s\kappa(t) + t ?$$

– eller: er

$$s \ln \frac{1}{s} + s \leq s \ln \frac{1}{t} + t ?$$

– eller: er

$$s \ln \frac{t}{s} \leq t - s ?$$

JAJ! – det følger af den velkendte ulighed $\ln x \leq x - 1$. Vi konkluderer:

I den klassiske verden Ω_1 er F givet via $\kappa : t \mapsto \ln \frac{1}{t}$ den entydigt bestemte rene score-funktion!



...og hvad med score-strategien?

Det kan jeg kun antydningvis komme ind på. En anden gang måske ... Det har noget med **koder** at gøre og også med **beskrivelse**: “Den, der kan beskrive verden, behersker verden!”

Vores enhed er **naturlige enheder, nats**. Skifter vi til **binære enheder, bits**, kan vi beskrive ved hjælp af **binære koder**, strenge af 0'er og 1'er. Og så kan besvær (pris) måles i antallet af **binære cifre** der skal til for at beskrive (kode) de enkelte udfald. ...

Skemaet næste side må være nok som antydning. Dér ser vi på det stokastiske fænomen, der består i tilfældigt at udvælge et bogstav i Dickens roman “to byer”.

Der er vist to strategier, en dårlig (konstant kodeordslængde) og en smart svarende til en ren score-funktion.



Letter	frequency		fixed length		Huffman code		ideal length
			word	length	word	length	
a	47064	8.07 %	00000	5	1110	4	3.63
b	8140	1.40 %	00001	5	101111	6	6.16
c	13224	2.27 %	00010	5	01111	5	5.46
d	27485	4.71 %	00011	5	0110	4	4.41
e	72883	12.49 %	00100	5	000	3	3.00
f	13155	2.25 %	00101	5	111100	6	5.47
g	12120	2.08 %	00110	5	111101	6	5.59
h	38360	6.57 %	00111	5	1000	4	3.93
i	39786	6.82 %	01000	5	1010	4	3.87
j	622	0.11 %	01001	5	1111111110	10	9.87
k	4635	0.79 %	01010	5	11111110	8	6.98
l	21523	3.69 %	01011	5	10110	5	4.76
m	14923	2.56 %	01100	5	00111	5	5.29
n	41310	7.08 %	01101	5	1101	4	3.82
o	45118	7.73 %	01110	5	1100	4	3.69
p	9453	1.62 %	01111	5	101110	6	5.95
q	655	0.11 %	10000	5	111111100	10	9.80
r	35956	6.16 %	10001	5	0010	4	4.02
s	36772	6.30 %	10010	5	1001	4	3.99
t	52396	8.98 %	10011	5	010	3	3.48
u	16218	2.78 %	10100	5	00110	5	5.17
v	5065	0.87 %	10101	5	111110	7	6.85
w	13835	2.37 %	10110	5	01110	5	5.40
x	666	0.11 %	10111	5	111111101	10	9.77
y	11849	2.03 %	11000	5	111110	6	5.62
z	213	0.04 %	11001	5	111111111	10	11.42
total = 583.426		100 %	mean = 5.00		mean = 4.19		H = 4.16



tabel i uddrag

Letter	frequency		fixed length word length		Huffman code word length	
a	47064	8.07 %	00000	5	1110	4
b	8140	1.40 %	00001	5	101111	6
c	13224	2.27 %	00010	5	01111	5
d	27485	4.71 %	00011	5	0110	4
e	72883	12.49 %	00100	5	000	3
f	13155	2.25 %	00101	5	111100	6
g	12120	2.08 %	00110	5	111101	6
h	38360	6.57 %	00111	5	1000	4
i	39786	6.82 %	01000	5	1010	4
j	622	0.11 %	01001	5	1111111110	10
k	4635	0.79 %	01010	5	11111110	8

Tak for nu!

