

練習問題その3

問題 1. 平面の x 軸に関して対称な点を対応させる線形写像 $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、以下のように表す。

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

成分 b_{ij} を求めよ。

問題 2. 原点 O を中心とし $\pi/2$ 回転させる線形写像 $F_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、次のように表す。

$$F_{\pi/2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

成分 a_{ij} を求めよ。

問題 3. 問題 1 と 2 で定義された線形写像 $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $F_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ において、合成写像 $F_{\pi/2} \circ G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $G \circ F_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように表す。

$$(F_{\pi/2} \circ G) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad (G \circ F_{\pi/2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

次の問題に答えよ。

(1) 成分 c_{ij} を求めよ。

(2) 成分 d_{ij} を求めよ。

(3) 線形写像 $F_{\pi/2} \circ G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $G \circ F_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は等しいか？

問題 4. 問題 1 と 2 で定義された線形写像 $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $F_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、次の幾何的な記述を持つ。

(i) $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、 x 軸に関して対称な点を対応させる線形写像である。

(ii) $F_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、原点 O に関して角 $\pi/2$ 回転させる線形写像である。

次の問題に答えよ。

(1) 線形写像 $F_{\pi/2} \circ G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ について、幾何的な記述を求めよ。

(2) 線形写像 $G \circ F_{\pi/2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ について、幾何的な記述を求めよ。