1 写像

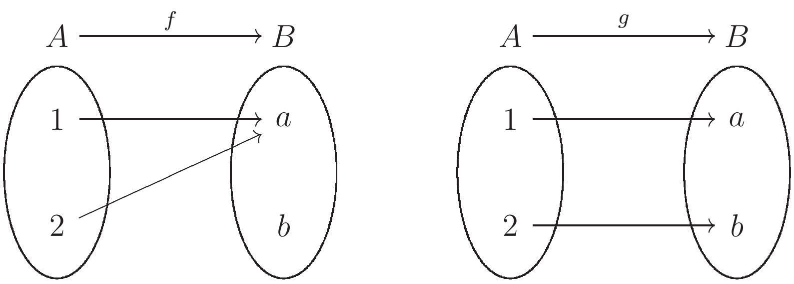
定義 **1.** 写像 $f\colon A \to B$ とは、集合 A と B と任意の $a \in A$ を $f(a) \in B$ に対応させるルール f を合わせたものである。集合 A は写像 $f\colon A \to B$ の定義域と呼ばれ、集合 B は写像 $f\colon A \to B$ の値域と呼ばれる。

写像 $f\colon A \to B$ も $A \xrightarrow{f} B$ と書かれる。

例 2. 集合 $A = \{1, 2\}$ と $B = \{a, b\}$ をおいておく。A が定義域、B が値域であるような写像に対しては、正確に次のように定める四つの写像がある。

$$\begin{aligned} f\colon A \to B, \quad & f(1) = a, \quad f(2) = a \\ g\colon A \to B, \quad & g(1) = a, \quad g(2) = b \\ h\colon A \to B, \quad & h(1) = b, \quad h(2) = a \\ i\colon A \to B, \quad & i(1) = b, \quad i(2) = b \end{aligned}$$

写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon A \to B$ も次の図式で表される。



例 3. 次の三つの写像は互いに異なる。

$$\begin{aligned} & f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \\ & g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad g(x) = x^2 \\ & h\colon [0, \infty) \to [0, \infty), \quad h(x) = x^2 \end{aligned}$$

なぜなら、定義域や値域が異なる。

例 4. 導関数は、次のような写像を定める。

$$\begin{aligned} & D\colon \{F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F \text{ は微分可能である }\} \to \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \\ & D(F)(x) = F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \end{aligned}$$

定義 **5.** 写像 $f\colon A\to B$ をおいておく。

(1) 任意の $b\in B$ に対して、$b=f(a)$ を満たす $a\in A$ が存在するとき、$f\colon A\to B$ が全射と呼ばれる。

(2) 任意の $a_1,a_2\in A$ に対して、$f(a_1)=f(a_2)$ が成り立つならば必ず $a_1=a_2$ が成り立つとき、$f\colon A\to B$ が単射と呼ばれる。

(3) 全射であるかつ単射であるような写像 $f\colon A\to B$ は全単射と呼ばれる。

注 6. 「$f(a_1)=f(a_2)$ ならば $a_1=a_2$」と「$a_1\neq a_2$ ならば $f(a_1)\neq f(a_2)$」は同値である。

例 7. 例 2 の四つの写像に関して、$g,h\colon A\to B$ は全単射あり、$f,i\colon A\to B$ は全射でも単射でもない。

例 8. 例 3 では、$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は全射でも単射でもない、$g\colon\mathbb{R}\to[0,\infty)$ は全射であり単射でない、$h\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ は全単射である。

定義 **9.** 写像 $f\colon A\to B$ において、部分集合

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}\subset B$$

は、写像 $f\colon A\to B$ の像と呼ばれる。

注 10. 写像 $f\colon A\to B$ は全射であることとその像 $f(A)$ が値域 B の全体であることは同値である。

例 11. 例 2 の四つの写像に関して、$f(A)=\{a\}$、$g(A)=h(A)=B$、$i(A)=\{b\}$ である。例 3 の三つの写像に関して、$f(\mathbb{R})=g(\mathbb{R})=h([0,\infty))=[0,\infty)$ である。例 4 で定めた写像に関して、

$$D(\{F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid F\text{ が微分可能である }\})=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f\text{ は原始関数を持つ }\}$$

である。

定義 **12.** 写像 $f\colon A\to B$ をおいておく。部分集合 $V\subset B$ の f による逆像は、

$$f^{-1}(V)=\{a\in A\mid f(a)\in V\}\subset A$$

で定義された A の部分集合である。部分集合 $V\subset B$ はただ一つの元 $b\in B$ からなるとき、逆像 $f^{-1}(V)=f^{-1}(\{b\})\subset A$ も $f^{-1}(b)$ と書かれる。

注 13. 値域の元 $b \in B$ について、逆像

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \subset A$$

は A の部分集合であり、集合 A の元ではない。

例 14. 例 3 で定義された写像に関して、ただ一つの元からなる部分集合の逆像は次のように与えられている。

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & (y > 0) \\ \{0\} & (y = 0) \\ \emptyset & (y < 0) \end{cases}$$

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & (y > 0) \\ \{0\} & (y = 0) \end{cases}$$

$$h^{-1}(y) = \{\sqrt{y}\}$$

ここで、$\emptyset$ は空集合である。

部分集合 $U, V \subset B$ において、その和集合 $U \cup V$ と交わり $U \cap V$ は次のように定められる。

$$U \cup V = \{b \in B \mid b \in U \text{ または } b \in V\}$$
$$U \cap V = \{b \in B \mid b \in U \text{ かつ } b \in V\}$$

補題 **15.** 写像 $f\colon A \to B$ をおいておく。

(1) 任意の部分集合 $U, V \subset B$ に対して、$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ である。

(2) 任意の部分集合 $U, V \subset B$ に対して、$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ である。

証明. 次のように、(1) が成り立つ。

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \cup V) &= \{a \in A \mid f(a) \in U \cup V\} \\ &= \{a \in A \mid f(a) \in U \text{ または } f(a) \in V\} \\ &= \{a \in A \mid a \in f^{-1}(U) \text{ または } a \in f^{-1}(V)\} \\ &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \end{aligned}$$

(2) が同様に示される。 □

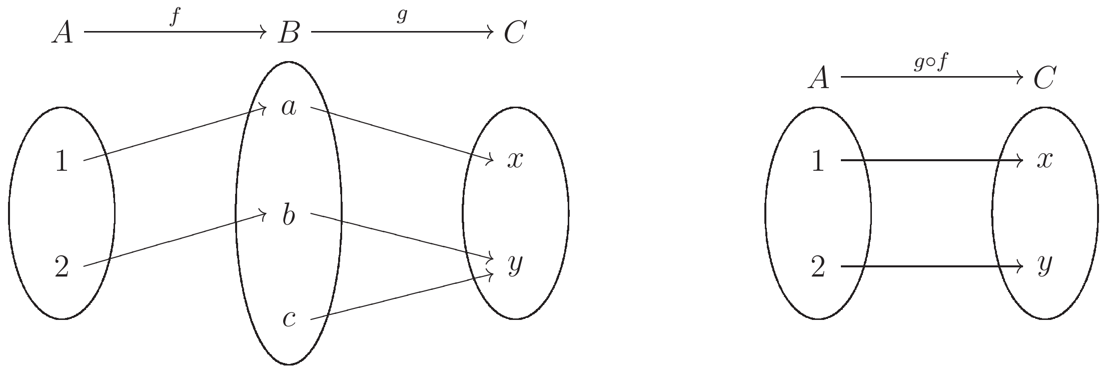
定義 16. 写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ において、次のように定義された写像 $g \circ f\colon A \to C$ は写像 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ の合成写像と呼ばれる。

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

注 17. 次の図式を見ると合成写像の定義が分かりやすい。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

例 18. 二つの写像とその合成写像。



補題 19. (1) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は全射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も全射である。

(2) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は単射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も単射である。

(3) $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ は全単射のとき、$g \circ f\colon A \to C$ も全単射である。

証明. (1) 合成写像 $g \circ f\colon A \to C$ の像は C であることを示せばよい。

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

(2)「$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$」を満たす元 $a_1, a_2 \in A$ をおいおく。$a_1 = a_2$ であることを示せばよい。まず、合成写像の定義より $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ であることが分かる。それに、$g\colon B \to C$ は単射であるため、$f(a_1) = f(a_2)$ が分かる。最後に、$f\colon A \to B$ も単射なので、$a_1 = a_2$ が分かる。よって、$g \circ f\colon A \to C$ は単射であることを示した。

(3) は、(1) と (2) から成り立つ。 □

定義 20. 集合 A において、任意の $a \in A$ に対して、$\mathrm{id}_A(a) = a$ で定める写像

$$\mathrm{id}_A\colon A \to A$$

は、A の恒等写像と呼ばれる。