

10 行列式の定義

以下、正方行列を考える。

定義 1. 帰納法を用い、 n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の**行列式** (determinant) は、次のように定義される。 $n = 1$ のとき、

$$\det(A) = a_{11}$$

と定義され、 $n = r - 1$ のとき、行列式が定義されていると仮定し、 $n = r$ のとき、行列式が、次の公式で定義される。

$$\det(A) = \sum_{j=1}^r (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

ここで、 A_{1j} は、 r 次正方行列 A から第 1 行と第 j 列を除いた $r - 1$ 次正方行列である。

注 2. 行列式 $\det(A)$ は、 $|A|$ とも書かれる。

例 3. $n = 2$ のとき、

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{22})$$
$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{21})$$

ため、

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) \\ &= a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

を得る。

例 4. $n = 3$ のとき、

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ A_{12} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\ A_{13} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ため、

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13}) \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

を得る。

例 5. 次の行列式を計算してみる。

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 8 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-6) \\ &= -2 \end{aligned}$$

定義 1 における公式は、**第 1 行で展開された行列式**と呼ばれる。次の定理より、第 i 行で展開された行列式または第 j 列で展開された行列式は、同じ結果を与える。

定理 6. n 次正方行列 A をおいておく。

(1) (第 i 行で展開された行列式)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

である。

(2) (第 j 列で展開された行列式)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

である。

ここで、 A_{ij} は、 A から第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 正方行列である。

注 7. 定理 6 における符号 $(-1)^{i+j}$ は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

系 8. n 次正方行列 A において、

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。 $n=1$ のときは自明なので、 $n=r-1$ のときを正しいと仮定し、 $n=r$ のときを示せばよい。転置行列の定義より、 $({}^t A)_{ij} = {}^t(A_{ji})$ ため、

$$\det({}^t A) = \sum_{j=1}^r (-1)^{1+j} a_{j1} \det({}^t(A_{j1}))$$

を得る。今、帰納法の仮定より、 $\det({}^t(A_{j1})) = \det(A_{j1})$ が分かるため、

$$\det({}^t A) = \sum_{j=1}^r (-1)^{1+j} a_{j1} \det(A_{j1}) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

を得る。右辺は、 A の第 1 列で展開された行列式であるため、定理 6 より、 $\det({}^t A) = \det(A)$ が成り立つ。帰納法より、任意の $n \geq 1$ に対して、系は正しい。□

例 9. 第 2 行で展開し、例 5 における行列式を、もう一回計算してみる。

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (8 - 9) = -2$$

例 10. 次の行列 A の行列式 $\det(A)$ を計算してみる。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

第 3 列には、0 を 2 個あるため、第 3 列で展開して計算する。

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。以下、 $\det(A_{23})$ と $\det(A_{33})$ を、それぞれ第 1 列と第 2 行で展開して計算する。

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-13) + 3 \cdot (-11) \\ &= -59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} &= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-15) \\
&= -27
\end{aligned}$$

これで、

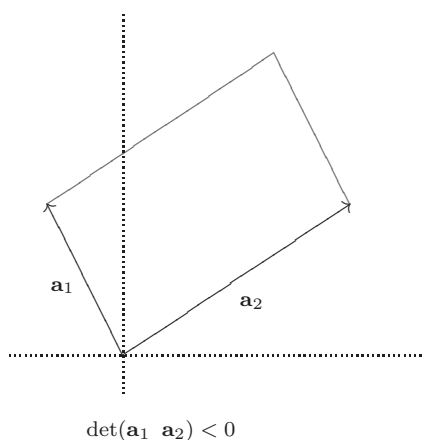
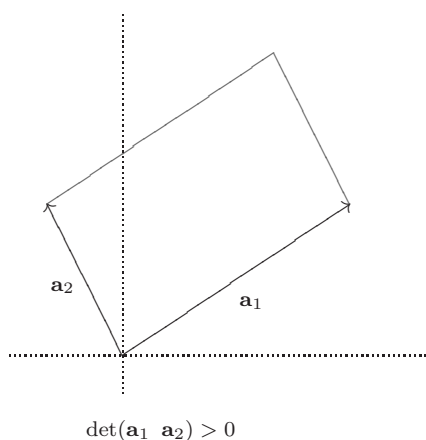
$$\det(A) = -2 \cdot (-59) + 1 \cdot (-27) = 91$$

が得られる。

例 11 (行列式の幾何的な記述). $n = 2$ のとき、

$|\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)| =$ ベクトル $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ で定義された平行四辺形の面積

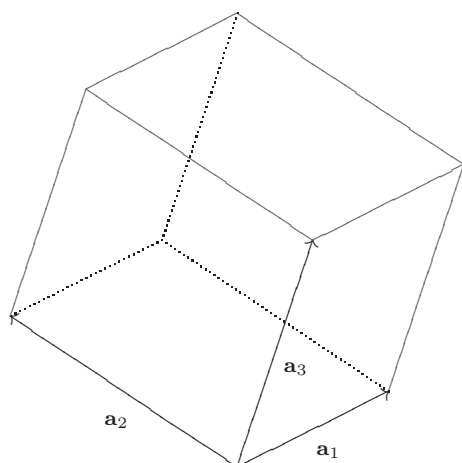
である。さらに、行列式 $\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$ の符号は、次のように与えられている。



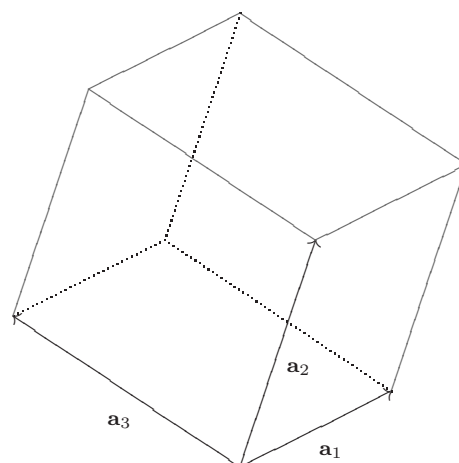
同様に、 $n = 3$ のとき、

$|\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)| =$ ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ と $\mathbf{a}_3$ で定義された平行六面体の体積

である。さらに、行列式 $\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$ の符号は、次のように与えられる。



$$\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) > 0$$



$$\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) < 0$$

命題 12. 単位行列 E_n の行列式は、

$$\det(E_n) = 1$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。 $n = 1$ のときは自明であるため、 $n = r - 1$ のときを正しいと仮定し、 $n = r$ のときを示せばよい。今、定義 1 より、

$$\det(E_r) = 1 \cdot \det((E_r)_{11}) = 1 \cdot \det(E_{r-1})$$

ため、帰納法より、任意の $n \geq 1$ に対して、命題は正しい。

□