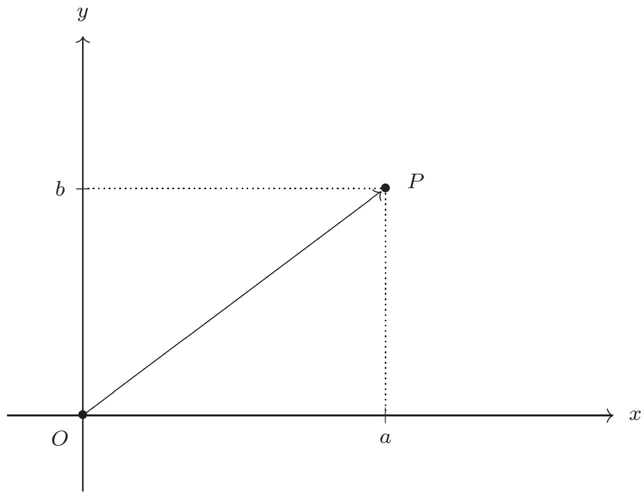
2　平面、空間のベクトルと簡単な図式

直交座標系とは、互いに直交している座標軸を指定することによって定まる座標系のことである。平面上の直交座標系ではそれぞれの点に対して一意に定まる 2 つの実数の組によって点の位置が指定される。

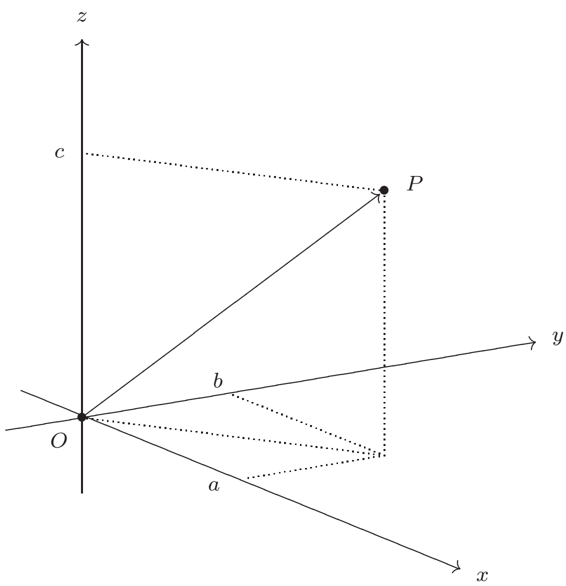


これは、次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

座標 a と b はそれぞれ x 軸成分と y 軸成分と呼ばれる。点 O は、原点と呼ばれる。

注：空間上の直交座標系では 3 つの実数の組によって座標が与えられる。

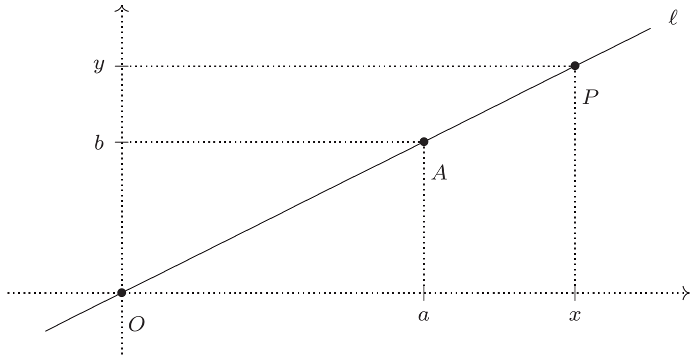


これは、次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

座標 a、b、c はそれぞれ x 軸成分、y 軸成分、z 軸成分と呼ばれる。点 O は、原点と呼ばれる。

問題 1. 原点を通る直線 ℓ の表示を考えましょう。ℓ 上に原点 O と異なる点 A をとる。



このとき、任意の ℓ 上の点 P が、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa \\ sb \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

ここで、$s = s(P)$ は点 P と一対一対応する実数（スカラー）である。この方程式は、直線 ℓ のパラメーター表示と呼ばれ、平面ベクトルを用いて次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

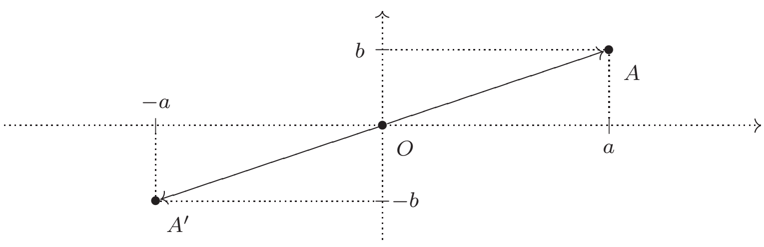
ここで、右辺は、スカラー s とベクトル $\overrightarrow{OA}$ のスカラー積と呼ばれる。

例 2. 原点 O と $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たす点 A を通る直線のパラメーター表示は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ 3s \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R}) \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

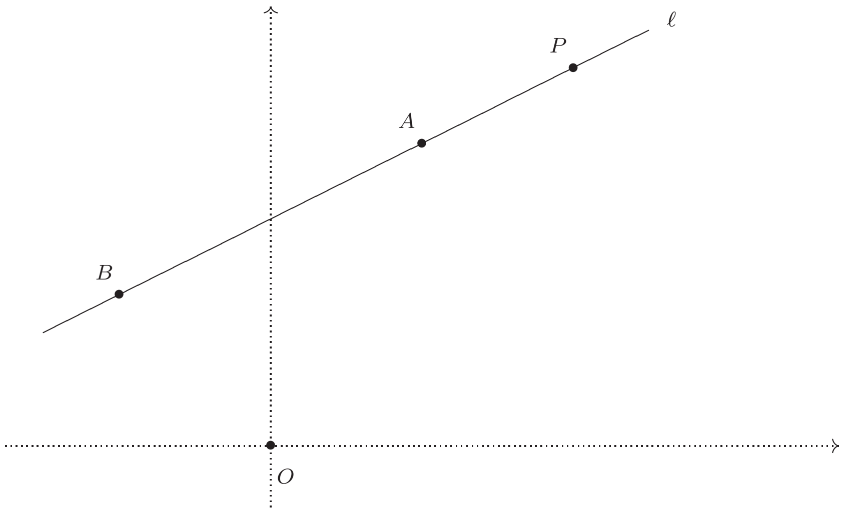
と表される。つまり、$x/2 = y/3$ となっている。

注 3. スカラー積 $(-1)\overrightarrow{OA}$ は単に $-\overrightarrow{OA}$ と略記される。



$$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$$

問題 4. 必ずしも原点を通らない直線 ℓ をどう書くか？



直線 ℓ 上に 2 点 A,B をとる。問題 1 より、直線 ℓ 上の点 P は、次の方程式を満たす。

$$\overrightarrow{BP} = s\overrightarrow{BA} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

よって、ℓ 上の点 P は、次のように表される。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BA} \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

ここで、「+」はベクトルの足し算を表す。ベクトルの足し算は、成分ごとに足すことである。次に、方程式 (5) の座標を考える。まず、

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と表す。それに、

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

なので、ベクトル $\overrightarrow{BA}$ は次のように表されることが分かる。

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると、方程式 (5) は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + s(a_1 - b_1) \\ b_2 + s(a_2 - b_2) \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

方程式 (5) と (6) は直線 ℓ のパラメーター表示と呼ばれる。

例 7. $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ で定まる点を通る直線のパラメータ表示を求める。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 3 + 6s \\ 4 + 3s \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

この方程式は、次の方程式と同じである。

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{3}$$

例 8. 空間内の直線も全く同じようにできる。例として、$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ で定まる点を通る直線のパラメーター表示は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 + 4s \\ -2 + 3s \\ -3 + 2s \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

この方程式は、次の方程式と同じである。

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{2}$$

注 9. パラメーター表示は、物理的な直観に合っている。パラメーター s を時間とみなす。

$$\begin{aligned} s = 0 &\quad \cdots \quad \overrightarrow{OB} \\ s = 1 &\quad \cdots \quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \\ s = 2 &\quad \cdots \quad \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

この捕らえ方で、直線は一定の速度で運動している物体の軌跡である。

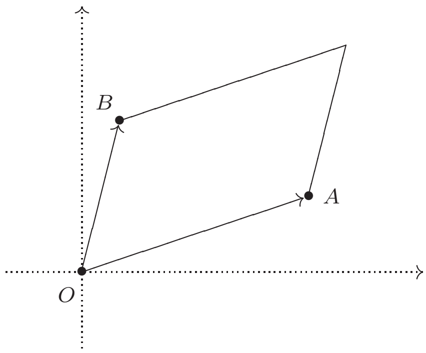
s	$\cdots$	時間
$\overrightarrow{OB}$	$\cdots$	時刻 0 での位置
$\overrightarrow{BA}$	$\cdots$	速度

注 10. 点 A、B を通る直線のパラメーター表示

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BA} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

において、「$0 \leqslant s \leqslant 1$」という条件と「$P$ が線分 BA にのっている」という条件は同値である。

問題 11. 平行四辺形を考えましょう。

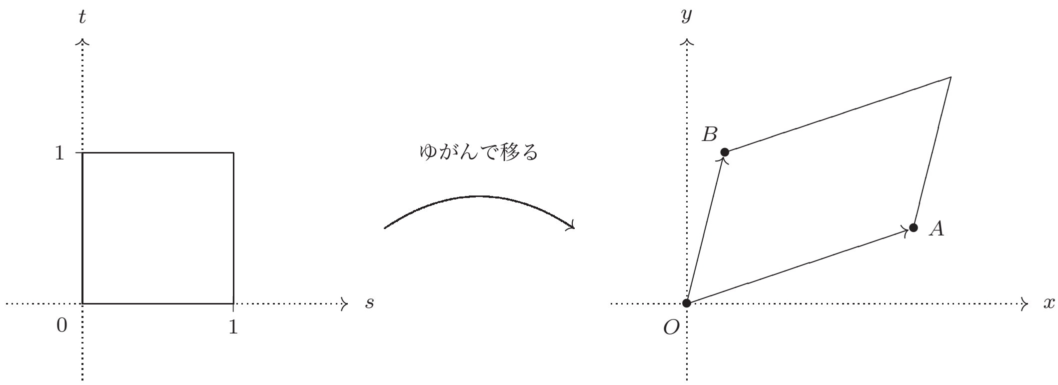


注 10 より、線分 OA、OB 上にのっている点 P は、それぞれ

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$
$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

と表される。同様に、平行四辺形内の点 P は、以下のように表示される。

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$



問題 12. 点 P を原点中心に角度 α だけ回転させた点を P' とする。このとき、

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad かつ \qquad \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすると、次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$